

Научная статья

УДК 530.145

DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-36-41

## ГЕНЕРАЦИЯ ЗАПУТАННЫХ ФОТОННЫХ ПАР В ВИДЕ УДАРНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

**Камалов Ю. Т.\*; Кузнецов М. М.**

*Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация*

*\*Корреспондирующий автор, e-mail: kamalov@gmail.com*

*Поступила в редакцию 10.09.2025*

*Принята к публикации 15.09.2025*

### **Аннотация**

**Цель.** Динамика *классических* полей, которая приводит к рождению фотонов в нелинейных кристаллах, подчиняется нелинейным уравнениям. Эти уравнения имеют решения в виде солитонов и описывают формирование ударно-волновых профилей.

**Процедура и методы.** В работе представлено математическое описание процессов параметрического рассеяния на основе уравнений связанных волн и нелинейного уравнения Шрёдингера.

**Результаты.** Показана связь между решением типа ударной волны в уравнении Бюргерса и формированием фронта рождения би-фотонов.

**Теоретическая и/или практическая значимость.** Математический аппарат и физические аналогии из теории ударных волн и солитонов чрезвычайно полезны для описания и понимания того, как и при каких условиях рождаются новые фотоны.

**Ключевые слова:** бифотон, солитон, ударная волна, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Бюргерса, фазовый синхронизм, генерация фотонных пар

**Благодарности.** Авторы благодарны профессору Беляеву В. В. за общее руководство и ценные советы, которые повлияли на написание этой работы.

### **Для цитирования:**

Камалов Ю. Т., Кузнецов М. М. Генерация запутанных фотонных пар в виде ударной электромагнитной волны // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2025. № 3. С.36–41. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-36-41>

Original research article

## GENERATION OF ENTANGLED PHOTON PAIRS IN THE FORM OF A SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVE

*Yu. Kamalov\**, *M. Kuznetsov*

*Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation*

*\*Corresponding author, e-mail: kamalov@gmail.com*

*Received by the editorial office 10.09.2025*

*Accepted for publication 15.09.2025*

### **Abstract**

**Aim.** The dynamics of *classical* fields, which leads to photon production in nonlinear crystals, obey nonlinear equations. These equations have soliton solutions and describe the formation of shock-wave profiles.

**Methodology.** This paper presents a mathematical description of parametric scattering processes based on coupled-wave equations and the nonlinear Schrödinger equation.

**Results.** The relationship between the shock wave type solution in the Burgers equation and the formation of the bi-photon generation front is shown.

**Research implications.** The mathematical apparatus and physical analogies from the theory of shock waves and solitons are extremely useful for describing and understanding how and under what conditions new photons are produced.

**Keywords:** biphoton, soliton, shock wave, nonlinear Schrödinger equation, Burgers equation, phase matching, photon-pair generation

**Acknowledgments.** The authors are grateful to Professor V. V. Belyaev for his general guidance and valuable advice that influenced the writing of this work.

### **For citation:**

Kamalov, Yu. T. & Kuznetsov, M. M. (2025). Generation of entangled photon pairs in the form of a shock electromagnetic wave. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 36–41. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-36-41>

### **Введение**

Взаимодействие света с нелинейными кристаллами является фундаментальной областью современной квантовой оптики. Одним из важнейших процессов в этой области является спонтанное параметрическое рассеяние (СПР), приводящее к рождению пар фотонов (би-фотонов), которое лежит в основе генерации запутанных состояний света. Несмотря на квантовую природу явления, его макроскопическое описание можно строить, опираясь на динамику классических полей. В этом случае полезным оказывается привлечение аналогий с теорией нелинейных волн и ударных процессов.

## Нелинейная динамика и уравнения движения

Основные процессы в нелинейной оптике второго порядка, такие как генерация второй гармоники (ГВГ) и параметрическое усиление, описываются системой уравнений связанных волн. Эти уравнения выводятся из нелинейного волнового уравнения для монохроматического поля [1; 2]:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряжённость электрического поля,  $c$  – скорость света,  $\mu_0$  – магнитная постоянная, а  $\mathbf{P}^{NL}$  – нелинейная поляризация среды. Для среды с квадратичной нелинейностью  $\chi^{(2)}$  нелинейная поляризация записывается как  $P_i^{NL} = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$ .

Рассмотрим трёхволновое взаимодействие с частотами  $\omega_p$  (накачка),  $\omega_s$  (сигнал) и  $\omega_i$  (холостая), удовлетворяющими условию  $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ . В приближении медленных огибающих, предполагая, что амплитуды волн меняются медленно по сравнению с длиной волны, уравнения связанных волн для коллинеарного взаимодействия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_p}{\partial z} + \frac{1}{v_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} &= i \frac{\omega_p d_{eff}}{n_p c} A_s A_i e^{i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{1}{v_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} &= i \frac{\omega_s d_{eff}}{n_s c} A_p A_i^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial z} + \frac{1}{v_i} \frac{\partial A_i}{\partial t} &= i \frac{\omega_i d_{eff}}{n_i c} A_p A_s^* e^{-i\Delta k z}. \end{aligned} \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

Здесь  $A_j$  – комплексные амплитуды волн ( $j = p, s, i$ ),  $v_j$  – групповые скорости,  $n_j$  – показатели преломления,  $d_{eff}$  – эффективный нелинейный коэффициент, а  $\Delta k = k_p - k_s - k_i$  – расстройка волновых векторов. При точном фазовом синхронизме ( $\Delta k = 0$ ) эффективность преобразования максимальна.

## Солитонные решения

В условиях, когда дисперсионные эффекты уравниваются нелинейностью, система уравнений (2)–(4) допускает солитонные решения. Если рассматривать распространение только одной волны (например, мощной накачки) в среде с кубичной нелинейностью (эффект Керра), её эволюция описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) [2; 3]:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (5)$$

где  $A$  – огибающая импульса,  $T = t - z/v_g$  – время в движущейся системе координат,  $\beta_2$  – коэффициент дисперсии групповых скоростей (ГВД), а  $\gamma$  – нелинейный коэффициент. Это уравнение имеет фундаментальное солитонное решение:

$$A(z, T) = A_0 \operatorname{sech} \left( \frac{T}{T_0} \right) \exp \left( i \frac{\gamma |A_0|^2}{2} z \right), \quad (6)$$

где  $A_0$  – амплитуда, а  $T_0$  – длительность импульса, причём выполняется условие  $|\beta_2|/T_0^2 = \gamma |A_0|^2$ . В трёхволновом взаимодействии также существуют параметрические солитоны, когда волны накачки, сигнала и холостой распространяются как единое целое, не меняя своей формы.

### Ударно-волновая аналогия в оптике

Аналогия с ударными волнами становится наглядной при рассмотрении эволюции огибающей интенсивного светового поля в нелинейной среде с дисперсией. В пределе, когда дисперсией можно пренебречь по сравнению с нелинейностью, эволюция огибающей описывается уравнением типа Бюргерса:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \gamma A \frac{\partial A}{\partial T} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение известно тем, что его решения могут формировать разрывы (ударные фронты) за конечное расстояние распространения. Решение методом характеристик для уравнения (7) показывает, что точки с большей интенсивностью движутся медленнее, что приводит к «опрокидыванию» волнового фронта и его резкому кручению.

На рис. 1 схематически изображён этот процесс. Изначально гладкий импульс (а) по мере распространения в нелинейной среде испытывает нелинейное искажение (b), так как его вершина (соответствующая большей интенсивности) отстаёт от фронтов. В конечном счёте это приводит к формированию почти вертикального фронта (с), аналогичного ударной волне.

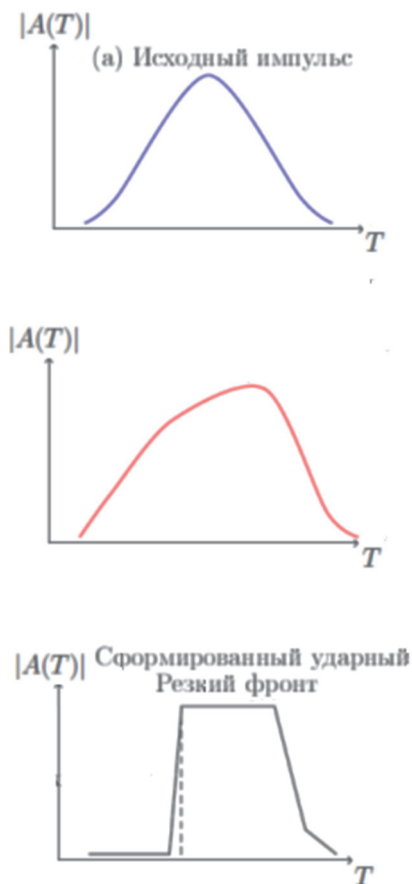
В реальной среде дисперсия ограничивает бесконечное кручение фронта, и формируется стационарный профиль, аналогичный ударной волне в вязкой среде. Именно в области этого крутого фронта происходит наиболее эффективное параметрическое преобразование и рождение би-фотонов с широким спектром частот.

### Рождение би-фотонов

Процесс рождения би-фотонов в СПР можно рассматривать как квантовый аналог классического формирования ударной волны. Квантовая теория СПР описывает рождение пар из вакуумных флуктуаций в присутствии классической волны накачки. Скорость счёта пар фотонов  $R$  пропорциональна интенсивности накачки  $I_p$  и квадрату нелинейного коэффициента:

$$R \propto \left( \frac{\omega_s \omega_i d_{eff}^2 L^2 I_p}{n_s n_i n_p c \epsilon_0} \right) \text{sinc}^2 \left( \frac{\Delta k L}{2} \right), \quad (8)$$

где  $L$  – длина кристалла. Корреляции между фотонами пары можно связать с параметрами ударно-подобного профиля. Широкий спектр рождённых пар соответствует широкому спектральному составу ударного фронта. Условие фазового синхронизма  $\Delta k = 0$  определяет «закон сохранения импульса» для этого процесса, аналогичный условию Гюгонио для классических ударных волн.



**Рис. 1 / Fig. 1.** Формирование ударного фронта при нелинейном распространении светового импульса. (а) Начальная форма импульса. (б) Нелинейное искажение приводит к опрокидыванию: точки с большей амплитудой движутся медленнее. (с) Формирование резкого, почти разрывного фронта, аналогичного ударной волне / Formation of a shock front during nonlinear propagation of a light pulse. (a) Initial pulse shape. (b) Nonlinear distortion leads to a reversal: points with a larger amplitude move more slowly. (c) Formation of a sharp, almost discontinuous front, similar to a shock wave.

Источник: составлено авторами

### Заключение

Использование понятийного аппарата нелинейной динамики, солитонной теории и теории ударных волн позволяет глубже понять процессы рождения фотонных пар в нелинейных кристаллах. Представленные математические модели – уравнения связанных волн, НУШ и уравнение типа Бюргера – дают количественное описание связи между нелинейными волновыми процессами и квантовыми характеристиками рождаемого света. Эти подходы открывают путь к созданию новых источников квантового света и к управлению их свойствами за счёт контроля параметров среды и формы нелинейных волн [2; 3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Boyd R. W. *Nonlinear Optics*. London: Academic press, 2020. 634 p. 10.1016/C2015-0-05510-1.
2. Agrawal G. P. *Nonlinear Fiber Optics*. London: Academic press, 2019. 728 p. DOI: 10.1016/C2018-0-01168-8.
3. Drummond P. D., Hillery M. *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 380 p. DOI: 10.1017/CBO9780511783616.

### REFERENCES

1. Boyd, R. W. (2020). *Nonlinear Optics*. London: Academic press. DOI: 10.1016/C2015-0-05510-1.
2. Agrawal, G. P. (2019). *Nonlinear Fiber Optics*. London: Academic press. DOI: 10.1016/C2018-0-01168-8.
3. Drummond, P. D. & Hillery, M. (2014). *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511783616.

---

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Камалов Юрий Тимурович* (г. Москва) – аспирант кафедры теоретической физики Государственного университета просвещения;  
<https://orcid.org/0000-0003-0475-7556>; e-mail: kamalov@gmail.com

*Кузнецов Михаил Михайлович* (г. Москва) – доктор физико-математических наук, профессор, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;  
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Yuri T. Kamalov* (Moscow) – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal University of Education;  
<https://orcid.org/0000-0003-0475-7556>; e-mail: kamalov@gmail.com

*Mihail M. Kuznetsov* (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Assoc. Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;  
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru