

Научная статья

УДК 517.952:532.517

DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-42-62

## ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

*Попов С. А.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
г. Москва, Российская Федерация  
e-mail: flowmech@mail.ru

Поступила в редакцию 25.08.2025

Принята к публикации 10.09.2025

### **Аннотация**

**Цель:** аналитическое развитие метода полных дифференциалов, созданного ранее для численного решения гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и построение полной системы интегралов уравнений движения.

**Процедура и методы.** Метод состоит в том, что системы уравнений в частных производных первого порядка с помощью линейных преобразований сводятся к связям между полными дифференциалами газодинамических переменных вдоль различных направлений. К полученным преобразованным системам применяется процедура интегрирования и выполняется анализ и синтез полученных результатов.

**Результаты.** Для системы уравнений газовой динамики Эйлера получена полная система интегралов. На основе их анализа получен новый результат о влиянии плоских волн и о гиперповерхностях, образованных точками пересечения этих волн, охватывающих характеристики. Получено новое представление о причинах численной неустойчивости решений общих уравнений газовой динамики методом характеристик. На основании применения метода к уравнению Лапласа получена интегральная теорема Коши.

**Теоретическая и практическая значимость.** Полные интегралы уравнений Эйлера дают представление о том, как в общем виде устроено его решение. Полученные в работе выражения также могут быть использованы и при построении разностных схем высокого разрешения и высокого порядка аппроксимации. Такие схемы наиболее пригодны для описания переходных режимов течения вязкого теплопроводного газа.

**Ключевые слова:** система уравнений Эйлера, метод полных дифференциалов, суперпозиция решений, характеристики, бихарактеристики, волновые процессы, уравнение Лапласа, интегральная теорема Коши, прямое численное моделирование, ламинарно-турбулентный переход

**Для цитирования:**

Попов С. А. Интегралы уравнений движения // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2025. № 3. С. 42–62. <https://doi.org/10.18384/10.18384/2949-5067-2025-3-42-62>

Original research article

## THE INTEGRALS OF THE EQUATIONS OF MOTION

*S. Popov*

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*  
*e-mail: flowmech@mail.ru*

*Received by the editorial office 25.08.2025*

*Accepted for publication 10.09.2025*

### **Abstract**

**Aim:** analytical development of the method of total differentials, created earlier for the numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order and the construction of a complete system of integrals of the equations of motion.

**Methodology.** The method consists in the fact that the systems of first-order partial differential equations are reduced to relationships between total differentials of gas-dynamic variables along different directions using linear transformations. The integration procedure is applied to the resulting transformed systems and the analysis and synthesis of the obtained results is performed.

**Results.** A complete system of integrals is obtained for the Euler system of gas dynamics equations. Based on their analysis, a new result was obtained on the influence of plane waves and on the hypersurfaces formed by the intersection points of these waves, covering the characteristics. A new idea is obtained about the causes of numerical instability of solutions of general gas dynamics equations by the method of characteristics. A new understanding of the causes of numerical instability of solutions to general gas dynamics equations is obtained using the method of characteristics. Based on the application of the method to the Laplace equation, the Cauchy integral theorem is obtained.

**Research implications.** Complete integrals of Euler equations give an idea of how its solution is generally structured. The expressions obtained in the work can also be used to construct difference schemes of high resolution and high order of approximation. Such schemes are most suitable for describing transition regimes of flow of viscous heat-conducting gas.

**Keywords:** Euler system of equations, total differential method, superposition of solutions, characteristics, bicharacteristics, wave processes, Laplace equation, Cauchy integral theorem, direct numerical simulation, laminar-turbulent transition

**For citation:**

Popov, S. A. The integrals of the equations of motion. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 42–62. <https://doi.org/10.18384/10.18384/2949-5067-2025-3-42-62>

## Введение

В аэрогидромеханике хорошо известны два интеграла уравнений движения идеальной среды. Это интеграл Коши-Лагранжа, описывающий поведение движущейся среды при потенциальном течении и интеграл Бернулли, применимый для установившегося движения [1]. Первый легко получается путём выноса пространственных производных в уравнении переноса импульса и выделения выражения, не зависящего от пространственных координат, т. е. такого, которое имеет одинаковые значения для любых точек потенциального потока. В случае неустановившегося течения оно является функцией только времени. Другой находится путём выделения, также из системы уравнений Эйлера, полного дифференциала от идентичного выражения, который для случая установившегося движения равен нулю вдоль линий тока, вихревых и винтовых линий. Само выражение при этом сохраняет постоянное значение, которое может быть различным для разных линий, что определяется граничными условиями.

В работе [2] для случая одномерного нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа были получены ещё два выражения, состоящие из комбинации газодинамических параметров, получившие название инвариантов Римана и сохраняющие для баротропного газа постоянство вдоль некоторых кривых линий. Эти кривые задаются системой обыкновенных дифференциальных уравнений и называются характеристиками. Работа послужила основой для создания одного из методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, получившего название метода характеристик. Метод заключается в приведении системы уравнений в частных производных к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого требуется найти характеристики, вдоль которых уравнения в частных производных превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Как только найдены обыкновенные дифференциальные уравнения, иногда называемые также условиями совместности, их можно проинтегрировать вдоль характеристик. Затем, воспользовавшись этим решением, можно найти и решение исходной системы уравнений в частных производных. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при описании плоских установившихся сверхзвуковых течений [3] и одномерных нестационарных течений идеальной среды [4].

В работах [5; 6] был сформулирован общий метод построения разностных схем для гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на основе связей между полными дифференциалами газодинамических переменных вдоль различных

направлений. Эти направления задаются коэффициентами, стоящими при частных производных по пространственным координатам. Для реализации этого метода, например применительно к уравнениям газовой динамики, уравнения не нужно преобразовывать в эквивалентную характеристическую форму и записывать в виде условий совместности вдоль однопараметрического семейства бихарактеристик [7; 8]. Метод также, в отличие от предложенного в работе [9], не требует знания геометрии характеристических нормалей, гиперплоскостей и гиперконусов. Настоящая работа посвящена аналитическому развитию метода полных дифференциалов и построению полной системы интегралов уравнений движения.

### Общий интеграл уравнений Эйлера

Запишем систему уравнений Эйлера, описывающих движение идеального газа, в векторно-матричном виде:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{Q}}{\partial y} + C \frac{\partial \vec{Q}}{\partial z} = 0, \text{ где} \quad (1)$$

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & v \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & w \end{bmatrix}.$$

Здесь  $t$  – время,  $u, v, w$  – проекции вектора скорости  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  на оси декартовой системы координат  $(x, y, z)$ ,  $p$  – давление,  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  – отношение удельных теплоёмкостей при постоянном давлении и объёме. Умножим систему (1) на некоторую матрицу  $\Omega_1$ , определитель которой отличен от нуля, имеющую вид

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $c$  – некоторый параметр, который подлежит определению. На такую невырожденную матрицу в [6] накладывались два условия:

1. Невырожденная матрица  $\Omega_1$  должна состоять из знакопостоянных элементов, а умножение на неё системы (1) приводить к физически согласованным уравнениям. Физическая согласованность означает, что все слагаемые, входящие в каждое уравнение, имеют одну размерность, а пространственные направления равноправны.

2. Если в каком-либо уравнении эквивалентной системы ОДУ имеют место пространственные производные от компоненты  $Q_i$  вектора  $\vec{Q}$ , то в этом же уравнении должна содержаться и частная производная по времени от этой компоненты; обратное не обязательно.

После умножения получим преобразованную систему уравнений, где матрицы коэффициентов  $\Omega_1 A$ ,  $\Omega_1 B$  и  $\Omega_1 C$ , см. (1) и (2), равны

$$\Omega_1 A = \begin{bmatrix} c^2 u & \rho \cdot c^2 - \gamma \cdot p & 0 & 0 & -u \\ 0 & u + \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & -u & -u & \frac{u+c}{\rho c} \\ 0 & -\left(u - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & u & -u & \frac{u-c}{\rho c} \\ 0 & -\left(u - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & -u & u & \frac{u-c}{\rho c} \\ 0 & u - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & u & u & -\frac{u-c}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 B = \begin{bmatrix} c^2 v & 0 & \rho \cdot c^2 - \gamma \cdot p & 0 & -v \\ 0 & v & -\left(v - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & -v & \frac{v-c}{\rho c} \\ 0 & -v & v + \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & -v & \frac{v+c}{\rho c} \\ 0 & -v & -\left(v - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & v & \frac{v-c}{\rho c} \\ 0 & v & v - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & v & -\frac{v-c}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 C = \begin{bmatrix} c^2 w & 0 & 0 & \rho \cdot c^2 - \gamma \cdot p & -w \\ 0 & w & -w & -\left(w - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & \frac{w-c}{\rho c} \\ 0 & -w & w & -\left(w - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & \frac{w-c}{\rho c} \\ 0 & -w & -w & w + \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & \frac{w+c}{\rho c} \\ 0 & w & w & w - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & -\frac{w-c}{\rho c} \end{bmatrix}.$$

Если мы примем, что  $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ , то в развернутом виде преобразованная система уравнений превращается в связь между полными производными от искомых газодинамических переменных:

$$c^2 \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$- \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v+c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v+c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$- \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w+c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w+c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0.$$

Умножим каждое уравнение этой системы на  $dt$ , воспользуемся определением дифференциала функции по направлению некоторого вектора [9], заменив его значок на проекции, в результате получим соотношения между полными дифференциалами:

$$c^2 d_{u,v,w} \rho - d_{u,v,w} p = 0;$$

$$\begin{aligned} d_{u+c,v,w} u - d_{u,v-c,w} v - d_{u,v,w-c} w + \frac{1}{\rho c} d_{u+c,v-c,w-c} p = 0; \\ -d_{u-c,v,w} u + d_{u,v+c,w} v - d_{u,v,w+c} w + \frac{1}{\rho c} d_{u-c,v+c,w+c} p = 0; \\ -d_{u-c,v,w} u - d_{u,v-c,w} v + d_{u,v,w+c} w + \frac{1}{\rho c} d_{u-c,v-c,w+c} p = 0; \\ d_{u-c,v,w} u + d_{u,v-c,w} v + d_{u,v,w-c} w - \frac{1}{\rho c} d_{u-c,v-c,w-c} p = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эту систему можно рассматривать как некоторый аналог условий совместности. Проинтегрируем систему (3) по времени от  $t_0$  до  $t$  вдоль 11 траекторий, определяемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), представленных в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Траектории (1) / Trajectories (1)

Tp	Св				Пв
$\frac{dx}{dt} = u$ ,	$\frac{dx}{dt} = u \pm c$ ,	$\frac{dx}{dt} = u$ ,	$\frac{dx}{dt} = u$ ,	$\frac{dx}{dt} = u \pm c$ ,	
$\frac{dy}{dt} = v$ ,	$\frac{dy}{dt} = v \pm c$ ,	$\frac{dy}{dt} = v \pm c$ ,	$\frac{dy}{dt} = v$ ,	$\frac{dy}{dt} = v \pm c$ ,	
$\frac{dz}{dt} = w$ ;	$\frac{dz}{dt} = w$ ;	$\frac{dz}{dt} = w$ ;	$\frac{dz}{dt} = w \pm c$ ;	$\frac{dz}{dt} = w \pm c$ .	

Первое уравнение системы представляет известную формулу для скорости распространения малых возмущений, т. е. звука. Для идеального газа  $p = \rho RT$ , где  $R$  – удельная газовая постоянная, поэтому в данном случае мы также получаем, что  $c = \sqrt{\gamma RT}$ . Правые части уравнений из табл. 1 являются функциями времени и координат. Для удобства дальнейших выкладок введём следующие обозначения координат некоторых начальных точек:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \int_{t_0}^t u dt, & x &= x_1 + \int_{t_0}^t (u + c) dt, & x &= x_2 + \int_{t_0}^t (u - c) dt, \\
 y &= y_0 + \int_{t_0}^t v dt, & y &= y_1 + \int_{t_0}^t (v + c) dt, & y &= y_2 + \int_{t_0}^t (v - c) dt, \quad (4) \\
 z &= z_0 + \int_{t_0}^t w dt; & z &= z_1 + \int_{t_0}^t (w + c) dt; & z &= z_2 + \int_{t_0}^t (w - c) dt.
 \end{aligned}$$

Интеграл от первого уравнения системы (3) тривиален, так как оно сводится к виду  $\gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p}$ . Выполнив интегрирование, получим условие постоянства

энтропии  $\frac{p(t, x, y, z)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)} = \left( \frac{\rho(t, x, y, z)}{\rho(t_0, x_0, y_0, z_0)} \right)^\gamma$  или  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$  вдоль траектории движения жидкой частицы. Предположим, что энтропия также сохраняет своё значение вдоль траекторий, заданных уравнениями из колонки Пв табл. 1. Тогда с учётом этого

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho c} dp &= \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dp} d\rho = \frac{c}{\rho} d\rho = \frac{1}{\rho} \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \cdot d\rho = \sqrt{\gamma \cdot \text{const} \cdot \rho^{\gamma-3}} \cdot d\rho, \text{ получим} \\
 \int \sqrt{\gamma \cdot \text{const} \cdot \rho^{\gamma-3}} \cdot d\rho &= \sqrt{\gamma \cdot \text{const}} \cdot \int \sqrt{\rho^{\gamma-3}} \cdot d\rho = \sqrt{\gamma \cdot \text{const}} \cdot \frac{2}{\gamma-1} \cdot \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + C,
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho^\gamma} \cdot \frac{2}{\gamma-1} \cdot \sqrt{\rho^{\gamma-1}}} = \frac{2}{\gamma-1} \cdot \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \frac{2}{\gamma-1} \cdot c;$$

при интегрировании следующих уравнений системы (3), опустив для краткости координаты значений функций в искомой точке  $(t, x, y, z)$ , будем иметь:

$$u - u(t_0, x_1, y_0, z_0) - v + v(t_0, x_0, y_2, z_0) - w + w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_1, y_2, z_2)] = 0,$$

$$-u + u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v - v(t_0, x_0, y_1, z_0) - w + w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_2, y_1, z_2)] = 0,$$

$$-u + u(t_0, x_2, y_0, z_0) - v + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w - w(t_0, x_0, y_0, z_1) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_2, y_2, z_1)] = 0,$$

$$u - u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v - v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w - w(t_0, x_0, y_0, z_2) - \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_2, y_2, z_2)] = 0.$$

Или, после простых преобразований, сгруппировав все неизвестные величины слева, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p(t_0, x_0, y_0, z_0)}{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)},$$

$$u - v - w + \frac{2}{\gamma-1} \cdot c = u(t_0, x_1, y_0, z_0) - v(t_0, x_0, y_2, z_0) - w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot c(t_0, x_1, y_2, z_2),$$

$$-u + v - w + \frac{2}{\gamma-1} \cdot c = -u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) - w(t_0, x_0, y_0, z_1) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot c(t_0, x_2, y_1, z_1), \quad (5)$$

$$-u - v + w + \frac{2}{\gamma-1} \cdot c = -u(t_0, x_2, y_0, z_0) - v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot c(t_0, x_2, y_2, z_1),$$

$$u + v + w - \frac{2}{\gamma-1} \cdot c = u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2) - \frac{2}{\gamma-1} \cdot c(t_0, x_2, y_2, z_2).$$

Из этих уравнений видно, что для случая 1D имеют место инварианты Римана. Далее, сложив второе и последнее уравнения, третью и последнее, четвёртое и последнее, получим:

$$u = \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{\gamma-1},$$

$$v = \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_2) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{\gamma-1}, \quad (6)$$

$$w = \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{\gamma-1};$$

а сложив уравнения системы (5) со 2 по 5, найдём  $c$

$$c = \frac{\gamma-1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] -$$

$$- \frac{\gamma-1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \quad (7)$$

$$+ \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{2}.$$

Далее обозначим  $Z = \frac{c^2}{\gamma}$ , тогда  $\frac{p}{\rho} = Z$  и  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p(t_0, x_0, y_0, z_0)}{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}$ , а следовательно

$\rho^{\gamma-1} = Z \cdot \frac{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)}$ . В итоге получим:

$$\rho = \left( Z \cdot \frac{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (8)$$

$$p = Z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left( \frac{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (9)$$

Это не единственные интегралы, которые могут быть получены для системы уравнений Эйлера. Например, можно применить другие преобразования, заданные матрицами:

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix},$$

получив при этом решения, отличные от первого, имеющие следующий вид для преобразования  $\Omega_2$ :

$$u = \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{\gamma-1},$$

$$v = \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_1)}{\gamma-1},$$

$$w = \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_2)}{\gamma-1}, \quad (10)$$

$$c = \frac{\gamma-1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] -$$

$$- \frac{\gamma-1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] +$$

$$+ \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{2};$$

для преобразования  $\Omega_3$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_1)}{\gamma - 1}, \\
 v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_2, z_1)}{\gamma - 1}, \\
 w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_1) - c(t_0, x_1, y_2, z_2)}{\gamma - 1}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] - \\
 &\quad - \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \\
 &\quad + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{2},
 \end{aligned}$$

для преобразования  $\Omega_4$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_2) - c(t_0, x_2, y_1, z_2)}{\gamma - 1}, \\
 v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_2) - c(t_0, x_1, y_2, z_2)}{\gamma - 1}, \\
 w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{\gamma - 1}, \quad (12) \\
 c &= \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] - \\
 &\quad - \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \\
 &\quad + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{2},
 \end{aligned}$$

соответственно. От первого решения эти интегралы для проекций скорости и  $c$  отличаются вторыми слагаемыми. Первые слагаемые в выражениях остаются без изменений.

Матрицы  $\Omega_i$  имеют одинаковую первую строку. Единственность выбора элементов их первой строки, приводящего к наиболее простой связи между полными производными плотности и давления, обусловлена видом матрицы  $A$ .

Так, например, если первый элемент строки задать как  $c^2 = D \cdot \gamma \frac{p}{\rho}$ , где  $D$  –

некоторое произвольное вещественное число, то второй элемент первой строки

матрицы  $\Omega_i \cdot A$  будет не равен нулю  $\rho \cdot D \cdot \gamma \frac{p}{\rho} - \gamma p \neq 0$  и первое уравнение преобразованной системы уже не будет являться связью между полными производными. Если у последнего элемента первой строки  $\Omega_i$  поменять знак, то  $c$  будет мнимым числом. Поэтому вдоль траектории движения жидкой частицы, описываемой уравнениями из колонки Тр табл. 1, первое выражение преобразованной системы для всех  $\Omega_i$  одно и то же.

В силу линейности системы (5) любые суперпозиции двух и более выражений, полученных для различных  $\Omega_i$ , также будут интегралами системы уравнений Эйлера. При этом можно складывать как исходные системы, так и их решения. Например, если мы далее сложим соответствующие уравнения для проекций вектора скорости из (6), (10), (11) и (12), то получим более общие выражения для них в выбранной системе координат:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \\
 &+ \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{4(\gamma-1)} - \\
 &- \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{4(\gamma-1)}, \\
 v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \\
 &+ \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{4(\gamma-1)} - \\
 &- \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1)}{4(\gamma-1)}, \\
 w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \\
 &+ \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_2, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1)}{4(\gamma-1)} - \\
 &- \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{4(\gamma-1)}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Чтобы получить более общее выражение для скорости распространения малых возмущений, надо также сложить (7) с соответствующими уравнениями для  $c$  из (10), (11) и (12). Мы последовательно складываем все имеющиеся выражения, чтобы получить в итоге самое общее. Чтобы получить ещё более общие выражения, надо воспользоваться другим множеством преобразований

$\Omega_i$ , отличным от использованного множества  $\Omega_1 - \Omega_4$ , определить на нём свои выражения и взять суперпозицию всех интегралов восьми преобразованных систем. Можно заметить, что такой подход сводится к вычислению средних значений проекций скорости  $c$  в каждой точке  $(t, x, y, z)$ . В итоге для проекций вектора скорости будут иметь место те же самые выражения (13), а для скорости распространения малых возмущений можно будет получить уравнение

$$\begin{aligned}
 c = & \frac{\gamma-1}{4} \cdot \left[ u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1) \right] - \\
 & - \frac{\gamma-1}{4} \cdot \left[ u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2) \right] + \\
 & + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{8} + \\
 & + \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{8}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Дополняющие выражения (8) и (9) останутся без изменений. В полученных выражениях задействованы все начальные точки из (4).

Мы установили, что первая строка матриц  $\Omega_i$  имеет единственно возможный самый простой вид. Чтобы ответить на вопрос о полноте интегралов уравнений газовой динамики, вначале умножим исходное уравнение на невырожденную матрицу  $\Omega$  общего вида, элементы которой  $\omega_{ij}$  произвольные вещественные числа

$$\Omega = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \omega_{22} & -\omega_{23} & -\omega_{24} & \frac{\omega_{25}}{\rho c} \\ 0 & -\omega_{32} & \omega_{33} & -\omega_{34} & \frac{\omega_{35}}{\rho c} \\ 0 & -\omega_{42} & -\omega_{43} & \omega_{44} & \frac{\omega_{45}}{\rho c} \\ 0 & \omega_{52} & \omega_{53} & \omega_{54} & -\frac{\omega_{55}}{\rho c} \end{bmatrix}, \text{ где } c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}. \tag{15}$$

В результате получим аналогичную связь между дифференциалами газодинамических функций вдоль различных направлений, заданных следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Траектории(2) / Trajectories (2)

$\frac{dx}{dt} = u + c \cdot \frac{\omega_{25}}{\omega_{22}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{25}}{\omega_{23}},$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{25}}{\omega_{24}};$	$\frac{dx}{dt} = u + c \cdot \frac{\omega_{22}}{\omega_{25}},$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{23}}{\omega_{25}},$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{24}}{\omega_{25}};$
--	--	--	--

$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{35}}{\omega_{32}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v + c \cdot \frac{\omega_{35}}{\omega_{33}},$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{35}}{\omega_{34}};$	$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{32}}{\omega_{35}},$ $\frac{dy}{dt} = v + c \cdot \frac{\omega_{33}}{\omega_{35}},$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{34}}{\omega_{35}};$
$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{45}}{\omega_{42}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{45}}{\omega_{43}},$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w + c \cdot \frac{\omega_{45}}{\omega_{44}};$	$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{42}}{\omega_{45}},$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{43}}{\omega_{45}},$ $\frac{dz}{dt} = w + c \cdot \frac{\omega_{44}}{\omega_{45}};$
$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{55}}{\omega_{52}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{55}}{\omega_{53}},$ $\frac{dz}{dt} = w,$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{55}}{\omega_{54}};$	$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{52}}{\omega_{55}},$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{53}}{\omega_{55}},$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{54}}{\omega_{55}}.$

Этот случай включает все рассмотренные до него варианты. А также в принципе может образовывать любые другие допустимые ( $\omega_{ij} \neq \pm 1$ ). Если в новой преобразованной системе уравнений в выражениях для полных производных от компонентов вектора скорости задать отношение коэффициентов  $\left| \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i5}} \right| < 1$ , то в полной производной давления в силу обратной

пропорциональности этих же коэффициентов получим  $\left| \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i5}} \right| > 1$  и траектории из

табл. 2 выйдут за пределы характеристической гиперповерхности системы (1), разделяющей причинно несвязанные области, чего не должно быть. Таким образом, отношение коэффициентов может быть только таким, когда  $\left| \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i5}} \right| = 1$ ,

следовательно и сами траектории должны лежать на самой гиперповерхности, где решение уравнений в принципе может иметь разрывы, даже если начальные и граничные условия непрерывны [10]. Если в новую преобразованную систему уравнений добавить ещё полные производные от плотности, заменив их затем на производные от давления, используя первое уравнение системы, то

коэффициенты при скорости звука будут распределены, например, как  $\frac{|\omega_{i5} \pm \omega_{i1}|}{|\omega_{ij}|}$

и  $\frac{|\omega_{ij}|}{|\omega_{i5} \pm \omega_{i1}|}$ , поэтому имеем тот же самый результат.

Далее необходимо ответить на вопрос: «Является ли полученная система интегралов (8, 9, 13, 14), построенная на конечном множестве начальных точек (4), полной, все ли возможные выражения в неё включены?» В любой другой декартовой системе координат  $(x', y', z')$  решение будет выглядеть точно также в силу однородности и изотропности пространства. Но при этом положение начальных точек  $(x'_0, y'_0, z'_0)$ ,  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  и  $(x'_2, y'_2, z'_2)$ , см. (4), будет другим, поэтому и значения интегралов  $u'(t, x', y', z')$ ,  $v'(t, x', y', z')$ ,  $w'(t, x', y', z')$ ,  $c'(t, x', y', z')$  могут также отличаться. Примем, что  $(x', y', z')$  – прямолинейные ортогональные координаты, связанные с  $(x, y, z)$  углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma & \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta & \cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где угол прецессии  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , угол нутации  $0 \leq \beta < \pi$  и угол собственного вращения  $0 \leq \gamma < 2\pi$  имеют указанные пределы их изменения. Эти три угла вполне характеризуют положение любой произвольной системы координат относительно исходной. Тогда, определив проекции скорости  $u'(t, x', y', z') = u'(t, \alpha, \beta, \gamma)$ ,  $v'(t, x', y', z') = v'(t, \alpha, \beta, \gamma)$  и  $w'(t, x', y', z') = w'(t, \alpha, \beta, \gamma)$  в момент времени  $t$  в системе координат  $(x', y', z')$ , мы можем определить в системе  $(x, y, z)$  некоторые функции углов Эйлера

$$\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \\ f_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ -\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \beta \cdot \sin \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить полные выражения для проекций скорости надо снова воспользоваться суперпозицией проекций вектора скорости, полученных для всех возможных систем координат. Для функций это может быть осуществлено на основании теоремы о среднем:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_u(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \\ v &= \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_v(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \\ w &= \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_w(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \tag{16}$$

Аналогичное выражение можно получить для скорости распространения малых возмущений

$$c = \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_c(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (17)$$

здесь  $f_c(t, \alpha, \beta, \gamma) = c'(t, x', y', z')$ .

Суперпозиция и принцип суперпозиции характерен для волновых процессов. Он позволяет собрать в каждой точке, где производится измерение, результирующее воздействие в виде суммы колебаний, создаваемых каждой волной в отдельности. Это мы и использовали при получении выражений (16) и (17). При этом в выражениях (13) и (14) первые слагаемые учитывают перенос возмущений вдоль траекторий, заданных уравнениями из колонки Св табл. 1, в которые входит такая величина, как скорость звука. В одномерном случае эти траектории описывали бы две волны Римана, приходящие в некоторую точку слева и справа. В более общем случае эти траектории совпадают с бихарактеристиками [8; 9]. Каждому набору параметров  $(\alpha, \beta, \gamma)$  соответствуют свои бихарактеристики, которые всей своей совокупностью образуют характеристические гиперповерхности, проходящие через каждую точку  $(t, x, y, z)$ . В фиксированный момент времени эти поверхности топологически эквивалентны сфере. Поэтому можно считать, что первые слагаемые учитывают воздействие сферических волн. Вторые слагаемые в выражениях (13) и (14) учитывают перенос возмущений вдоль траекторий, заданных уравнениями из колонки Пв табл. 1. В неподвижной среде их радиус в  $\sqrt{3}$  раза больше радиуса сферической волны. В общем случае они также образуют гиперповерхности, которые охватывают характеристики. Но характеристики представляют собой предельные поверхности, за пределы которых возмущения не могут распространяться. Однако если предположить, что точки этих кривых образованы пересечением трёх плоских волн, движущихся вдоль различных направлений, то траектории из колонки Пв при всех возможных значениях  $(\alpha, \beta, \gamma)$  формируют эти гиперповерхности. В случае 2D вместо  $\sqrt{3}$  будем иметь  $\sqrt{2}$ , см. рис. 1. Тогда можно считать, что вторые слагаемые в выражениях (14) и (15) учитывают воздействие плоских волн.

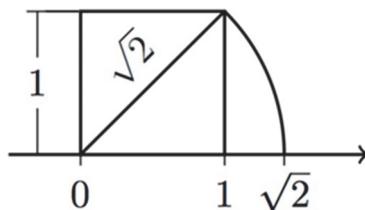


Рис. 1 / Fig. 1. Интерференция плоских волн / Interference of plane waves

Источник: составлено автором

Мы рассмотрели применение метода полных дифференциалов к общим уравнениям газовой динамики. Прежде чем обозначить перспективы

практического применения этого метода, остановимся на одном частном примере, когда уравнения имеют другой тип.

### Применение метода к уравнению Лапласа

Из теории дифференциальных уравнений с частными производными хорошо известно, что вместо уравнения Лапласа, которое описывает поведение гармонических функций  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , можно рассматривать систему уравнений Коши-Римана для аналитической функции  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  [11]. Эти уравнения являются эквивалентными условиями для дифференцируемости комплексной функции и связаны с гармоническими функциями через их вещественную и мнимую части

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Запишем эту систему уравнений в векторно-матричном виде

$$A \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \text{ где} \quad (18)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя нашему общему подходу, умножив эту систему на некоторую невырожденную матрицу, состоящую в данном случае из вещественных и мнимых единиц  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ , получим, что

$$\Omega A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \Omega B = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

После умножения получим преобразованную систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Поскольку в данном случае отсутствуют выделенные направления, как в системе (3), проинтегрируем эту систему по любому замкнутому контуру с учётом того, что  $w = \varphi + i\psi$  и  $\bar{w} = \varphi - i\psi$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

В результате получим, что

$$\oint \frac{dw}{dz} dz = \oint dw = \oint d\bar{w} = 0, \quad (20)$$

а это есть известная интегральная теорема Коши из теории функций комплексного переменного.

### Заключение

Мы показали применение одного подхода, использованного ранее для построения противопоточных разностных схем, к построению полных интегралов систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В частности мы применили его для построения полных интегралов системы уравнений Эйлера и Коши-Римана. Последняя связана с уравнением Лапласа. Хорошо известно, что, в принципе, системы уравнений или одно уравнение высшего порядка сводятся к системам первого порядка, поэтому этот подход является достаточно общим. Выражения для интегралов (16, 17, 8, 9) и (20) можно использовать для анализа решений смешанных задач внешней аэродинамики и внутренней газовой динамики на гладких и кусочно-непрерывных функциональных многообразиях. Такой подход, в частности, был применён в работе [2].

Полные интегралы уравнений Эйлера дают представление о том, как в общем виде устроено его решение. При их анализе был получен новый результат о влиянии плоских волн и о гиперповерхностях, образованных точками пересечения этих волн, охватывающих характеристики. Это позволяет по-новому взглянуть на проблему реализации общего пространственного метода характеристик [5]. Классический метод характеристик основан на использовании характеристических соотношений на волновых гиперплоскостях и гиперплоскостях тока. Поскольку число таких соотношений несизмеримо больше числа уравнений, то имеется значительный произвол при их выборе. В ходе реализации нестационарного пространственного метода характеристик автор работы [9] и его коллеги столкнулись с проблемой численной неустойчивости. Позже, в работе [12] было показано, что эта проблема связана с невыполнением условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви. В ней также было обосновано, что устойчивость обеспечивается модификацией расчётной сетки и использованием интерполяционных расчётных схем, существенно увеличивающих область определённости разностной системы уравнений. При построении численных решений на малых шагах по времени вместо выражений (16, 17, 8, 9) можно воспользоваться системой (13, 14, 8, 9), которая является аналогом подобных уравнений в методе характеристик. При этом разностная область зависимости будет гарантированно больше физической, поскольку гиперповерхности, образованные точками пересечений плоских волн,

охватывают характеристики. Тоже самое будет выполняться и для гиперконусов, касательных к ним. Однако трудоёмкость при реализации такого численного метода будет больше, чем, например, при реализации метода полных дифференциалов с использованием полиномиального способа построения разностных схем. Такой подход, предложенный в работе [5], порождает более детальные разностные схемы, чем сеточно-характеристический метод. В настоящее время интерес к таким методам, применяемым для решения сложных динамических задач газовой динамики и задач механики деформируемого твёрдого тела [13; 14], неуклонно растёт.

Полученные в работе выражения также могут быть использованы и при построении разностных схем высокого разрешения и высокого порядка аппроксимации в рамках методов конечных разностей или объёмов. Такие схемы, как нельзя лучше, приспособлены для описания переходных режимов течения вязкого теплопроводного газа. Поэтому мы включили в эту статью раздел, посвящённый эллиптическим уравнениям. Это важно для более корректного учёта влияния вязких членов и теплового потока за счёт теплопроводности в общих уравнениях переноса. Проблема теоретического описания [15] и прямого численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода [16; 17] на сегодня является одной из приоритетных задач механики жидкости и газа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Euler L. Principes généraux du mouvement des fluids // Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres (Berlin). 1757. T. 11 (1755). P. 274–315.
2. Riemann B. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860. Bd. 8. S. 43–66.
3. Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики / пер. с англ. М.: Иностранная литература, 1960. 520 с.
4. Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1960. Т. 58. С. 3–150.
5. Попов С. А. Моделирование течений сжимаемого газа на основе метода полных дифференциалов // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 3. С. 99–119.
6. Попов С. А. Метод полных дифференциалов для численного решения гиперболических систем уравнений // Труды МАИ (электронный журнал). 2006. № 22. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34103> (дата обращения: 25.07.2025).
7. Магомедов К. М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 2. С. 313–325.
8. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
9. Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 508–527.

10. Hadamard J. *Leçons sur la Propagation des Ondes: Et les Équations de l'Hydrodynamique*. Paris: A. Hermann, 1903. 375 p.
11. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
12. Зауэрвайн Х., Зусман М. Устойчивость численных решений при применении метода характеристик к трёхмерному течению // Ракетная техника и космонавтика. 1964. Т. 2. № 2. С. 209–211.
13. Петров И. Б. Сеточно-характеристические методы. 55 лет разработки и решения сложных динамических задач // Computational Mathematics and Information Technologies. 2023. Т. 6. № 1. С. 6–21. DOI: 10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21.
14. Васюков А. В., Смирнов И. Е. Сеточно-характеристический численный метод на нерегулярной расчетной сетке с расширением шаблона интерполяции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 10. С. 1591–1599. DOI: 10.31857/S0044466923100174.
15. Воронков С. С. Турублентность – одна из нерешенных проблем современной физики (краткий обзор) // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2022. Т. 8. № 3. С. 77–85.
16. Nakagawa K., Tsukahara T., Ishida T. DNS Study on Turbulent Transition Induced by an Interaction between Freestream Turbulence and Cylindrical Roughness in Swept Flat-Plate Boundary Layer // Aerospace. 2023. Vol. 10. Iss. 2. Article no. 128. DOI: 10.3390/aerospace10020128.
17. Егоров И. В., Новиков А. В., Чувахов П. В. Численное моделирование развития турбулентных пятен в сверхзвуковом пограничном слое на пластине // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 7. С. 63–72. DOI: 10.20948/mm-2022-07-04.

## REFERENCES

1. Euler, L. (1757). Principes généraux du mouvement des fluids. In: *Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres (Berlin)*, 11 (1755), 274–315.
2. Riemann, B. (1860). Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. In: *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 8, 43–66.
3. Liepmann, H. W. & Roshko, A. (1960). *Elements of Gas Dynamics*. Moscow: Inostrannaya literatura publ. (in Russ.).
4. Zhukov, A. I. (1960). Application of the method of characteristics to the numerical solution of one-dimensional problems in gas dynamics. In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 58, 3–150 (in Russ.).
5. Popov, S. A. (2005). Total differential method for compressible gas flow modeling. In: *Mathematical Models and Computer Simulations*, 17 (3), 99–119 (in Russ.).
6. Popov, S. A. (2006). The Total Differentials Method for Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Equations. In: *Trudy MAI*, 22. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34103> (accessed: 25.07.2025) (in Russ.).
7. Magomedov, K. M. (1966). Method of characteristics for numerical calculation of spatial gas flows. In: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 6 (2), 313–325 (in Russ.).

8. Ovsyannikov, L. V. (1981). *Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
9. Rusanov, V. V. (1963). Characteristics of general equations of gas dynamics. In: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3 (3), 508–527 (in Russ.).
10. Hadamard, J. (1903). *Leçons sur la Propagation des Ondes: Et les Équations de l'Hydrodynamique*. Paris: A. Hermann.
11. Godunov, S. K. (1971). *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
12. Sauerwein, H. & Sussman, M. (1964). Numerical stability of the three-dimensional method of characteristics. In: *Rocketry and astronautics (AIAA Journal)*, 2 (2), 209–211 (in Russ.).
13. Petrov, I. B. (2023). Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems. In: *Computational Mathematics and Information Technologies*, 6 (1), 6–21. DOI: 10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21 (in Russ.).
14. Vasyukov, A. V. & Smirnov, I. E. (2023). Grid-characteristic numerical method on an irregular grid with extending the interpolation stencil. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63 (10), 1591–1599. DOI: 10.31857/S0044466923100174 (in Russ.).
15. Voronkov, S. S. (2022). Turbulence is one of the unsolved problems of modern physics (short review). In: *Journal of Science and Education of North-West Russia*, 8 (3), 77–85 (in Russ.).
16. Nakagawa, K., Tsukahara, T. & Ishida, T. (2023). DNS Study on Turbulent Transition Induced by an Interaction between Freestream Turbulence and Cylindrical Roughness in Swept Flat-Plate Boundary Layer. In: *Aerospace*, 10 (2), no. 128. DOI: 10.3390/aerospace10020128.
17. Egorov, I. V., Novikov, A. V. & Chuvakhov, P. V. (2022). Numerical simulation of turbulent spots evolution in supersonic boundary layer over a plate. In: *Mathematical Models and Computer Simulations*, 34 (7), 63–72. DOI: 10.20948/mm-2022-07-04 (in Russ.).

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Попов Сергей Александрович (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аэродинамики, динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);

<https://orcid.org/0009-0004-4724-5424>; e-mail: flowmech@mail.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey A. Popov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Aerodynamics, Dynamics and Control of Aircraft, Moscow Aviation Institute (National Research University);

<https://orcid.org/0009-0004-4724-5424>; e-mail: flowmech@mail.ru