Научная статья
УДК 533 6.011
DOI: 10.18384/2949-5067-2025-1-52-65

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОТНОСИТЕЛЬНЫМ СКОРОСТЯМ МОЛЕКУЛ В УДАРНО-СЖАТОЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Кузнецов М. М., Сатюков Д. Г.*, Кулешова Ю. Д., Владимирова Е. Я., Кузнецов Г. В., Халиков Р. Ф.

Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация
*Корреспондирующий автор, e-mail: dsatyukov@gmail.com

Поступила в редакцию 14.01.2025
Принята к публикации 03.02.2025

Аннотация

Цель – аналитически исследовать существование или отсутствие эффекта перехлёста значений функций распределения по относительным скоростям молекул в ударно-сжатой бинарной смеси газов.

Процедура и методы. Применялись асимптотические и аппроксимационные методы математической физики.

Результаты. Аналитически показано, что в модифицированной бимодальной модели ударно-сжатой бинарной смеси газов существуют эффекты перехлёста функций распределения по относительным скоростям молекул. Эти эффекты, заключающиеся в превышении количеств энергетически активных молекул, преодолевающих порог барьерных процессов внутри фронта волны по сравнению с аналогичным количеством за ней, могут иметь место в широком диапазоне значений молекулярных масс и концентраций в ударно-сжатой бинарной смеси газов.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные аналитические результаты имеют существенное значение для выяснения вопроса о необходимости учёта поступательной неравновесности при определении коэффициентов скоростей энергетически активированных неупругих соударений внутри фронтов ударных волн.

Ключевые слова: асимптотическая модель, эффект перехлёста, рэлеевская смесь, неравновесность

Для цитирования:

Аналитические свойства функций распределения по относительным скоростям молекул в ударно-сжатой бинарной смеси газов / М. М. Кузнецов, Д. Г. Сатюков, Ю. Д. Кулешова, Е. Я. Владимирова, Г. В. Кузнецов, Р. Ф. Халиков // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2025. № 1. С.52–65. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-1-52-65>

Original research article

ANALYTICAL PROPERTIES OF DISTRIBUTION FUNCTIONS FOR RELATIVE VELOCITIES OF MOLECULES IN A SHOCK-COMPRESSED BINARY MIXTURE OF GASES

M. Kuznetsov, D. Satyukov, Y. Kuleshova, E. Vladimirova, G. Kuznetsov, R. Halikov*

Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation

**Corresponding author, e-mail: dsatyukov@gmail.com*

Received by the editorial office 14.01.2025

Accepted for publication 03.02.2025

Abstract

Aim: to analytically investigate the existence or absence of the effect of overlapping values of distribution functions for relative velocities of molecules in a shock-compressed binary mixture of gases.

Methodology. Asymptotic and approximation methods of mathematical physics were used.

Results. It is analytically shown that in the modified bimodal model of a shock-compressed binary mixture of gases, there are effects of overlapping distribution functions with respect to the relative velocities of molecules. These effects, consisting in an excess of the amounts of energetically active molecules overcoming the threshold of barrier processes inside the wave front compared with a similar amount beyond it, can occur in a wide range of molecular weights and concentrations in a shock-compressed binary mixture of gases.

Research implications. The obtained analytical results are essential for clarifying the issue of the need to take into account translational disequilibrium when determining the velocity coefficients of energetically activated inelastic collisions inside shock wave fronts.

Keywords: asymptotic model, overlap effect, Rayleigh mixture, disequilibrium

For citation:

Kuznetsov, M. M., Satyukov, D. G., Kuleshova, Y. D., Vladimirova, E. Ya., Kuznetsov, G. V. & Halikov, R. F. (2025). Analytical properties of distribution functions for relative velocities of molecules in a shock-compressed binary mixture of gases. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, 52–65. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-1-52-65>

Введение

Известно, что поступательная неравновесность внутри фронтов ударных волн, проявляющаяся в «забросе» (или что тоже самое в «перехлёсте» – термин, используемый в иностранной литературе) величин макроскопических параметров, например, таких как температура или концентрации молекул, участвующих в энергетически активированных кинетических процессах, представляет большой интерес в ряде авиационных и физико-химических технологий. Например, повышение скорости горения топлива в детонационной волне позволит обойтись без камеры сгорания и сделать экологически чистыми выбросы продуктов реакции. В лабораторных условиях повышение числа

энергетически активных молекул внутри фронтов ударных волн может способствовать увеличению выхода количества новых нано- и мета-материалов.

В предыдущих работах авторов основное внимание уделялось лабораторному способу использования эффектов перехлёста в перспективных технологиях [1; 2].

В аэродинамических проблемах, таких как спуск космических аппаратов в атмосферах планет Солнечной системы, эффект перехлёста также представляет большой интерес, например, в связи с ускорением процессов обменных химических реакций. С экологической точки зрения даже небольшое увеличение выхода «ядов»: окислов азота, углерода и т. д. может стать губительным для живой биосферы.

В последнее время эффекты перехлёста стали представлять интерес и для фармакологии, поскольку спекание «летучих металлов» с углеродными наноматериалами в ударных волнах приводило к образованию веществ, обладающих лечебными онкологическими свойствами.

В настоящей работе модифицированная бимодальная модель ударно-сжатых смесей газов, предложенная ранее в работе [3] и развитая в предыдущих работах авторов до уровня аналитического определения функций распределения молекул по относительным скоростям, применена к исследованию проблемы существования эффектов перехлёста для величин этих функций.

1. Функции распределения по модулю относительной скорости молекул внутри фронта ударной волны в бинарной смеси газов

Функции распределения пар молекул по модулю относительной тепловой скорости и пространственной координате внутри фронта ударной волны были получены ранее в работах авторов [1; 2]. Для аналитического представления этих функций была использована модифицированная бимодальная модель Тамма – Мотт-Смита, априорно задающая аналитическую аппроксимацию функций распределений отдельных молекул в ударно сжатой смеси газов [3]. Построенные авторами на основе этих одночастичных распределений аналитические представления двухчастичных распределений имели различный вид в зависимости от молекулярного состава взаимодействующих пар молекул. В бинарной смеси газов можно составить три сорта пар взаимодействующих молекул и соответствующих им три сорта двухчастичных распределений [4]. Эти двухчастичные распределения являются плотностями вероятностей N_{11} , N_{22} , N_{12} , относящихся соответственно к парам частиц лёгкой компоненты (молекулярная масса m_1), тяжёлой компоненты (молекулярная масса m_2) и парам частиц (с различной молекулярной массой m_1 и m_2):

1.1. Плотность вероятности взаимодействий частиц лёгкой компоненты бинарной смеси N_{11} :

$$N_{11}(\mathbf{c}, x) = \varepsilon^2 N_1^{-2}(x) \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \rangle + \varepsilon N_1^{-2}(x) \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Delta_1(\vec{c}) \rangle a(x) + \varepsilon N_1^{-1}(x) N_2^{-1}(x) \rho_{12} \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle \tilde{a}(x) + \varepsilon N_1^{-2}(x) \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Delta_1(\vec{c}) \rangle a(x) + N_1^{-2}(x) \langle \Delta_1(\vec{c})^2 \rangle a(x)^2 + N_1^{-1}(x) N_2^{-1}(x) \rho_{12} \langle \Delta_1(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle a(x) \tilde{a}(x) + \varepsilon N_1^{-1}(x) N_2^{-1}(x) \rho_{12} \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle \tilde{a}(x) + N_1^{-1}(x) N_2^{-1}(x) \rho_{12} \langle \Delta_1(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle a(x) \tilde{a}(x) + N_2^{-2}(x) \rho_{12}^2 \langle \Delta_2(\vec{c})^2 \rangle \tilde{a}(x)^2 \quad (1.1)$$

1.2. Плотность вероятности взаимодействий частиц тяжёлой компоненты N_{22} :

$$N_{22}(\mathbf{c}, x) = N_2^{-2}(x) \{ \varepsilon^2 \langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \rangle + \varepsilon [\langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle + \langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle] a(x) + \langle \Delta_2(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle a^2(x) + \varepsilon [\rho_{21} \langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle + \rho_{21} \langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle] \tilde{a}(x) + \rho_{21} \rho_{21} \langle \Delta_1(\vec{c}) \Delta_1(\vec{c}) \rangle \tilde{a}^2(x) + \rho_{21} \langle \Delta_1^2(\vec{c}) \rangle a(x) \tilde{a}(x) + \rho_{21} \langle \Delta_1^2(\vec{c}) \rangle \tilde{a}(x) a(x) \} \quad (1.2)$$

1.3. Плотность вероятности взаимодействий частиц лёгкой и тяжёлой компонент N_{12} :

$$N_{12}(\mathbf{c}, x) = N_1^{-1}(x) N_2^{-1}(x) \{ \varepsilon^2 \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \rangle + \varepsilon [\langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle + \langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Delta_1(\vec{c}) \rangle] a(x) + \langle \Delta_1(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle a^2(x) + \varepsilon [\rho_{21} \langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Delta_1(\vec{c}) \rangle + \rho_{12} \langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Delta_2(\vec{c}) \rangle] \tilde{a}(x) + \rho_{12} \rho_{21} \langle \Delta_2(\vec{c}) \Delta_1(\vec{c}) \rangle \tilde{a}^2(x) + \rho_{21} \langle \Delta_1^2(\vec{c}) \rangle a(x) \tilde{a}(x) + \rho_{12} \langle \Delta_2^2(\vec{c}) \rangle \tilde{a}(x) a(x) \} \quad (1.3),$$

где ε^{-1} – степень сжатия в ударной волне, ρ_{12} – отношение молекулярных масс компонентов бинарной смеси, $\rho_{12} = m_2 / m_1 = \rho_{21}^{-1}$, величины в угловых скобках:

$\Delta_1(\vec{c}) = [\Phi_1^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon \Phi_1^{(-)}(\vec{c})]$, $\Delta_2(\vec{c}) = [\Phi_2^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon \Phi_2^{(-)}(\vec{c})]$; $\Phi_1^{(-)}(\vec{c})$, $\Phi_2^{(-)}(\vec{c})$, $\Phi_1^{(+)}(\vec{c})$, $\Phi_2^{(+)}(\vec{c})$ и их произведения представляют собой подинтегральные функции, интегрируемые по всем угловым переменным в трёхмерном пространстве тепловых скоростей молекул, зависящие после интегрирования от модуля относительной скорости пар молекул; плотности вероятностей $\Phi_1^{(-)}(\vec{c})$, $\Phi_2^{(-)}(\vec{c})$, $\Phi_1^{(+)}(\vec{c})$, $\Phi_2^{(+)}(\vec{c})$ являются максвелловскими распределениями обоих сортов газа 1 и 2 (нижний индекс) на входе в ударную волну (верхний индекс минус) и выходе из неё (верхний индекс плюс); величины N_1 и N_2 , равные $N_1(x) = \varepsilon + (1-\varepsilon)a(x) + (1-\varepsilon)\tilde{a}(x) \rho_{12}$, $N_2(x) = \varepsilon + (1-\varepsilon)a(x) + (1-\varepsilon)\tilde{a}(x) \rho_{21}$ (1.4),

являются нормировочными множителями; коэффициенты $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ зависят только от координаты x внутри фронта ударной волны и изменяются в диапазоне от 0 до 1 [1–3].

Для удобства выполнения последующих преобразований и уменьшения громоздкости равенств (1.1–1.3) введём следующие компактные обозначения:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_1^{(+)}(\vec{c}) \Phi_2^{(+)}(\vec{c}) \rangle &= G_{12}^{(+)}(g), \\
\langle \Phi_1^{(+)}(\vec{c}) \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \rangle &= G_{12}^{(+,-)}(g), \\
\langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Phi_2^{(+)}(\vec{c}) \rangle &= G_{12}^{(-,+)}(g), \\
\langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \rangle &= G_{12}^{(-)}(g), \\
\langle \Phi_1^{(+)}(\vec{c}) \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \rangle &= G_{11}^{(+,-)}(g), \\
\langle \Phi_1^{(+)}(\vec{c}) \Phi_1^{(+)}(\vec{c}) \rangle &= G_{11}^{(+)}(g), \\
\langle \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \Phi_1^{(-)}(\vec{c}) \rangle &= G_{11}^{(-)}(g), \\
\langle \Phi_2^{(+)}(\vec{c}) \Phi_2^{(+)}(\vec{c}) \rangle &= G_{22}^{(+)}(g), \\
\langle \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \Phi_2^{(+)}(\vec{c}) \rangle &= G_{22}^{(-)}(g), \\
\langle \Phi_2^{(+)}(\vec{c}) \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) \rangle &= G_{22}^{(+,-)}(g)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Функции модуля относительной скорости пар молекул g вычислялись ранее. Для однокомпонентного газа в работах [5; 6], для смесей – в [7–9]. В соответствии с терминами, введёнными в [5; 6], функции $G_{ii}^{(-)}$, $G_{ii}^{(+)}$, $G_{ij}^{(-,+)}$, $G_{ij}^{(+,-)}$ могут быть названы как «холодная», «горячая» и «перекрёстная» моды распределений пар молекул. При этом среди «перекрёстных» мод оказываются одинаковыми следующие:

$$G_{ij}^{(-,+)} = G_{ji}^{(+,-)}; \quad G_{ji}^{(-,+)} = G_{ij}^{(+,-)} \tag{1.6}$$

Приведём эти моды распределения пар молекул для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned}
G_{12}^{(+)}(g) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{\mu}{2kT_c} g^2\right), & G_{12}^{(-)}(g) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_b} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{\mu}{2kT_b} g^2\right), \\
G_{11}^{(+)}(g) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{4kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_1}{4kT_c} g^2\right), & G_{11}^{(-)}(g) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{4kT_b} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_1}{4kT_b} g^2\right), \\
G_{22}^{(+)}(g) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{4kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_2}{4kT_c} g^2\right), & G_{22}^{(-)}(g) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{4kT_b} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_2}{4kT_b} g^2\right), \\
G_{12}^{(+,-)}(g) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_{c1}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{\mu(g-u)^2}{2kT_{c1}}\right), & G_{21}^{(+,-)}(g) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_{c2}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{\mu(g-u)^2}{2kT_{c2}}\right), \\
G_{11}^{(+,-)}(g) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_{cb}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{m_1(g-u)^2}{2kT_{cb}}\right), & G_{22}^{(+,-)}(g) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{2kT_{cb}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{m_2(g-u)^2}{2kT_{cb}}\right),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где μ – приведённая масса, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $u = (u_b - u_c)$, u_b, T_b – скорость и температура смеси газов на входе в волну, u_c, T_c – скорость и температура на выходе, T_{c1}, T_{c2}, T_{cb} – т. н. эффективные температуры, $T_{c1} = (m_1 T_c + m_2 T_b) / (m_1 + m_2)$, $T_{c2} = (m_2 T_c + m_1 T_b) / (m_1 + m_2)$, $T_{cb} = (T_c + T_b) / 2$.

Учитывая формулы (1.5), (1.6) и аналогичные им (в которых для краткости опустим аргументы), представим равенства (1.1) – (1.3) следующим образом:

$$H_{11} = \varepsilon^2 N_1^{-2} G_{11}^{(-)} + 2\varepsilon N_1^{-2} \{G_{11}^{(-,+)} - \varepsilon G_{11}^{(-)}\} a + 2\varepsilon N_1^{-1} N_2^{-1} \rho_{12} \{G_{12}^{(-,+)} - \varepsilon G_{12}^{(-)}\} \tilde{a} + N_1^{-2} \{G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}\} a^2 + 2N_1^{-1} N_2^{-1} \rho_{12} \{G_{12}^{(+)} - \varepsilon G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{12}^{(-)}\} a \tilde{a} + N_2^{-2} \rho_{12}^2 \{G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)}\} \tilde{a}^2 \quad (1.8)$$

$$H_{22}(g,x) = N_2^{-2}(x) \{ \varepsilon^2 (G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)}) + \varepsilon [(G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)}) + (G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)})] a(x) + (G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)}) a^2(x) + \varepsilon [\rho_{21} (G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)}) + \rho_{21} (G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)})] \tilde{a}(x) + \rho_{21} \rho_{21} (G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}) \tilde{a}^2(x) + \rho_{21} (G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}) a(x) \tilde{a}(x) + \rho_{12} (G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}) \tilde{a}(x) a(x) \} \quad (1.9)$$

$$H_{12}(g,x) = N_1^{-1}(x) N_2^{-1}(x) \{ \varepsilon^2 G_{12}^{(-)} + \varepsilon [G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-)} + G_{21}^{(-,+)} - \varepsilon G_{12}^{(-)}] a(x) + [G_{12}^{(+)} - \varepsilon G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{12}^{(-)}] a^2(x) + \varepsilon [\rho_{21} (G_{11}^{(-,+)} - \varepsilon G_{11}^{(-)}) + \rho_{12} (G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)})] \tilde{a}(x) + \rho_{12} \rho_{21} (G_{21}^{(+)} - \varepsilon G_{21}^{(+,-)} - \varepsilon G_{21}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{21}^{(-)}) \tilde{a}^2(x) + \rho_{21} (G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}) a(x) \tilde{a}(x) + \rho_{12} (G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)}) \tilde{a}(x) a(x) \} \quad (1.10)$$

В более кратком виде формулы (1.8) – (1.10) можно представить следующим образом:

$$H_{11}(g,x) = N_1^{-2} G_{11}, \quad H_{22}(g,x) = N_1^{-2} G_{22}, \quad H_{12}(g,x) = N_1^{-1} N_2^{-1} G_{12}, \quad (1.11)$$

где множители G_{12} , G_{11} , G_{22} соответствуют выражениям, записанным в фигурных скобках правых частей равенств (1.8) – (1.10).

2. Структура функций распределения пар молекул по модулю относительной скорости, когда параметр ρ равен единице

Далее для упрощения задачи рассмотрим подмножество значений параметра ρ_{12} , когда

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \rho = 1, \quad (2.1)$$

Этот случай часто встречается в численных расчётах структур ударно-сжатых смесей газов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [10].

Нормировочные функции (1.4) приобретут более простой вид:

$$N_1(x) = N_2(x) = N(x) = \varepsilon + (1-\varepsilon)[a(x) + \tilde{a}(x)], \quad (2.2)$$

Формулы (1.11) можно представить следующим образом:

$$H_{12}(g,x) = N^{-2} G_{12}, \quad H_{11}(g,x) = N^{-2} G_{11}, \quad H_{22}(g,x) = N^{-2} G_{22}, \quad (2.3)$$

Статистические распределения по модулю относительной скорости пар молекул G_{11} , G_{22} , G_{12} , (1.6) приобретут следующий структурный вид:

$$G_{11} = \{ \varepsilon^2 G_{11}^{(-)} + Q_1 a + Q_2 a^2 + Q_3 \tilde{a} + Q_4 \tilde{a}^2 + Q_5 a \tilde{a} \} \quad (2.4)$$

$$G_{22} = \{ \varepsilon^2 G_{22}^{(-)} + \varepsilon R_1 a + R_2 a^2 + \varepsilon R_3 \tilde{a} + R_4 \tilde{a}^2 + R_5 a \tilde{a} \} \quad (2.5)$$

$$G_{12} = \{ \varepsilon^2 G_{12}^{(-)} + \varepsilon G_1 a + G_2 a^2 + \varepsilon G_3 \tilde{a} + G_4 \tilde{a}^2 + G_5 a \tilde{a} + G_6 \tilde{a} a \} \quad (2.6)$$

В формуле (2.4) коэффициенты Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 соответственно равны:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\varepsilon \{ G_{11}^{(-,+)} - \varepsilon G_{11}^{(-)} \} \\ Q_2 &= \{ G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)} \} \\ Q_3 &= 2\varepsilon \{ G_{12}^{(-,+)} - \varepsilon G_{12}^{(-)} \} \\ Q_4 &= \{ G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)} \} \\ Q_5 &= 2 \{ G_{12}^{(+)} - \varepsilon G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{12}^{(-)} \} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Проведём асимптотическое упрощение коэффициентов функций распределения пар молекул (зависящих от модуля относительной скорости) при использовании высокоскоростного предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0, T_b \rightarrow 0, \beta = m_2 / m_1 > 1, g = u$, используя значения из (1.7).

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\varepsilon \{ G_{11}^{(-,+)} - \varepsilon G_{11}^{(-)} \} \rightarrow Q_1 = 2\varepsilon G_{11}^{(-,+)} = 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_{cb}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{m_1(g-u)^2}{2kT_{cb}} \right) \rightarrow \\ Q_1 &= 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_{cb}} \right)^{1/2} \\ &\rightarrow Q_1 = 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{kT_c} \right)^{1/2} \\ Q_2 &\rightarrow Q_2 = G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{4kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_1}{4kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_{cb}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{m_1(g-u)^2}{2kT_{cb}} \right), \\ &\rightarrow Q_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{4kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_1}{4kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_{cb}} \right)^{1/2}, \rightarrow Q_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_1}{4kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{kT_c} \right)^{1/2}, \\ Q_3 &\rightarrow Q_3 = 2\varepsilon G_{12}^{(-,+)} = 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_{c2}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{\mu(g-u)^2}{2kT_{c2}} \right), \rightarrow Q_3 = 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_{c2}} \right)^{1/2} \\ &\rightarrow Q_3 = 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_c} \right)^{1/2} \\ Q_4 &\rightarrow Q_4 = G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{4kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_2}{4kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{2kT_{cb}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{m_2(g-u)^2}{2kT_{cb}} \right), \\ &\rightarrow Q_4 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{m_2}{4kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{kT_c} \right)^{1/2}, \\ Q_5 &\rightarrow Q_5 = 2 \{ G_{12}^{(+)} - \varepsilon G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-,+)} \} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{\mu}{2kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \\ &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_{c1}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{\mu(g-u)^2}{2kT_{c1}} \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_{c2}} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{u} \right) \exp\left(-\frac{\mu(g-u)^2}{2kT_{c2}} \right) \rightarrow \\ Q_5 &= \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT_c} \right)^{3/2} g^2 \exp\left(-\frac{\mu}{2kT_c} g^2 \right) - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{2kT_c} \right)^{1/2} - 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_1}{2kT_c} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогично предыдущему коэффициенты R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 в формуле (2.5) будут равны:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \{ G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)} \} \\ R_2 &= \{ G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)} \} \\ R_3 &= 2 \{ G_{21}^{(-,+)} - \varepsilon G_{21}^{(-)} \} \\ R_4 &= \{ G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)} \} \\ R_5 &= 2 \{ G_{21}^{(+)} - \varepsilon G_{21}^{(+,-)} - \varepsilon G_{21}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{21}^{(-)} \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Наконец, коэффициенты $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ в формуле (2.6) равны:

$$\begin{aligned} G_1 &= G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-)} + G_{21}^{(-,+)} - \varepsilon G_{12}^{(-)} = 2[G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-)}], \\ G_2 &= G_{12}^{(+)} - \varepsilon G_{12}^{(+,-)} - \varepsilon G_{12}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{12}^{(-)}, \\ G_3 &= G_{11}^{(-,+)} - \varepsilon G_{11}^{(-)} + G_{22}^{(-,+)} - \varepsilon G_{22}^{(-)}, \\ G_4 &= G_{21}^{(+)} - \varepsilon G_{21}^{(+,-)} - \varepsilon G_{21}^{(-,+)} + \varepsilon^2 G_{21}^{(-)}, \\ G_5 &= G_{11}^{(+)} - 2\varepsilon G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}, \\ G_6 &= G_{22}^{(+)} - 2\varepsilon G_{22}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(-)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для количественной оценки эффектов перехлёста функций пар молекул H_{12}, H_{11}, H_{22} найдём отлчия их $\Delta H_{12}, \Delta H_{11}, \Delta H_{22}$ от своих соответствующих равновесных значений:

$$\Delta H_{12} = (H_{12} - G_{12}^{(+)}) > 0, \quad \Delta H_{11} = (H_{11} - G_{11}^{(+)}) > 0, \quad \Delta H_{22} = (H_{22} - G_{22}^{(+)}) > 0 \quad (2.11)$$

Положительные значения величин (2.10) будут соответствовать абсолютным значениям величин перехлёста функций распределения соответствующих пар молекул. Ясно, что для относительных величин эффектов перехлёста будет:

$$\begin{aligned} (\Delta H_{12})|_{\text{ref}} &= (\Delta H_{12}) / G_{12}^{(+)} > 0, \quad (\Delta H_{11})|_{\text{ref}} = (\Delta H_{11}) / G_{11}^{(+)} > 0, \quad (\Delta H_{22})|_{\text{ref}} = (\Delta H_{22}) \\ & / G_{22}^{(+)} > 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. Сокращение числа макроскопических параметров в модифицированной бимодальной модели

В настоящей работе предлагается уменьшить в модифицированной модели [3] число параметров, меняющихся по ширине фронта ударной волны, сведя его, как и в классической модели, к одному.

При этом число остальных необходимых допущений, использованных для формулировки априорной аппроксимации, остаётся тем же, что и в [11].

Ниже предлагается представить второй параметр $\tilde{a}$ модели [1] в виде следующей функциональной зависимости от первого параметра a :

$$\tilde{a} = a(1 - a) \quad (3.1)$$

Более общий вид аналитической зависимости второго параметра $\tilde{a}$ как функции первого параметра a , который соответствовал бы исходной модифицированной модели [3], можно представить как

$$\tilde{a} = a^m(1 - a)^n f(a) \quad (3.2)$$

Здесь степени m или n – целые или дробные положительные числа (в зависимости от исследования особенностей на входе в ударную волну при $a = 0$ и выходе из неё при $a = 1$), $f(a)$ – некоторая гладкая аналитическая функция.

Ниже мы используем выражение (3.1) для оценки существования эффекта перехлёста функции распределения по модулю относительной скорости пар молекул тяжёлого компонента ударно сжатой смеси газов.

Термин «эффект перехлёста», используемый в научной литературе по кинетике частиц различных сред, означает преобладание во фронте ударной волны количества энергетически активных молекул над количеством аналогичных молекул за её фронтом. Под энергетически активными молекулами понимаются молекулы с кинетической энергией значительно большей, чем средняя энергия теплового движения.

4. Оценка эффекта перехлёста в бинарной смеси ударно сжатых газов

Рассмотрим с аналитических позиций эффект перехлёста в тяжёлом компоненте ударно сжатой бинарной смеси газов ($m_2 > m_1$), в котором, судя по результатам численных исследований, указанный эффект существует и наиболее значителен по сравнению с лёгким компонентом. Численные результаты не дают полной информации об условиях существования эффекта перехлёста.

Покажем, что в рамках модифицированной бимодальной модели такие условия можно установить.

Ранее в работах авторов [1; 2] были найдены функции распределения пар молекул по модулю их относительных тепловых скоростей для всех трёх их возможных сортов. Пары, составленные из молекул: лёгкого компонента, тяжёлого компонента и смешанного состава компонента. Соответствующие им функции распределения обозначались как N_{11} , N_{22} и N_{12} . Однако для последующих аналитических преобразований они оказались слишком громоздкими. Громоздкость формул для функций N_{11} , N_{22} и N_{12} удалось устранить, воспользовавшись теми же физическими условиями, которые реализуются в высокоскоростном газодинамическом эксперименте на ударных трубах при наблюдении структур сильных ударных волн.

Эти условия можно записать в следующем математическом виде:

$$\varepsilon \rightarrow 0, T_b \rightarrow 0, \beta = m_2 / m_1 > 1, g = u, \quad \rho_{12} = 1, \quad (4.1)$$

где ε – обратная величина степени сжатия, T_b – температура «холодной» бинарной смеси газов в потоке, набегающем на ударную волну со скоростью u , g – модуль относительной скорости в парах молекул, приближённо равный $(2E_a / \mu)^{1/2}$, где E_a – энергия активации барьерного кинетического процесса, ρ_{12} – основной параметр подобия в исследованиях эффекта перехлёста [5], $\rho_{12} = n_2 m_2 / n_1 m_1$

В силу условий (4.1) выражения для H_{11} , H_{22} и H_{12} сильно упрощаются.

Далее для выявления наличия или отсутствия эффекта перехлёста удобно перейти к относительным значениям функций пар молекул $H_{11}|_{\text{ref}}$, $H_{22}|_{\text{ref}}$ и $H_{12}|_{\text{ref}}$, поделив H_{11} , H_{22} и H_{12} на соответствующие им поступательно равновесные значения. В частности для $H_{22}|_{\text{ref}}$ будет:

$$\begin{aligned} H_{22}|_{\text{ref}} &= N^{-2} [\varepsilon K \{ a - a^2 + (\frac{1}{\beta})^{1/2} \tilde{a} - (\frac{1}{\beta})^{1/2} \tilde{a}^2 - (1 + (\frac{1}{\beta})^{1/2}) a \tilde{a} \} + a^2] = \\ &= N^{-2} [\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} \tilde{a}) [1 - a - \tilde{a}] \} + a^2], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $N = \varepsilon + (1-\varepsilon)a + (1-\varepsilon)\tilde{a}$, $K = \left(\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{\beta+1}\right) \exp\left(\frac{\beta+1}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}\right)$, a и $\tilde{a}$ – коэффициенты в модифицированном бимодальном представлении функций распределения по тепловым скоростям молекул лёгкого и тяжёлого компонентов ударно сжатой бинарной смеси. Эти коэффициенты являются функциями координаты x внутри фронта волны [1–3].

В поступательно равновесном состоянии за ударной волной, когда $a = 1$, $\tilde{a} = 0$ из формулы (4.2) непосредственно следует, что $H_{22}|_{\text{ref}}$ равно 1, что совпадает с точным значением $H_{22}|_{\text{ref}}$ в равновесии.

Таким образом, наличие эффекта перехлёста будет зависеть от выполнения довольно простого неравенства:

$$(H_{22}|_{\text{ref}} - 1) > 0 \quad (4.3)$$

или

$$[\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} \tilde{a}) [1 - a - \tilde{a}] \} + a^2] > N^2 \quad (4.4)$$

Выполнение неравенств (4.3) или (4.4) и является достаточным условием реализации эффекта перехлёста.

Проверим выполнение неравенства (4.4) при аппроксимации параметра $\tilde{a}$ в виде (3.1)

$$\begin{aligned} &[\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} a(1-a)) [1 - a - a(1-a)] \} + a^2] > N^2 \\ &[\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} a(1-a)) [1 - 2a + a^2] \} + a^2] > (\varepsilon + (1-\varepsilon)a + (1-\varepsilon)a(1-a))^2 \\ &[\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} a(1-a)) (1-a)^2 \} + a^2] > (\varepsilon + (1-\varepsilon)(2a - a^2))^2 \\ &[\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} a(1-a)) (1-a)^2 \} + a^2] > \{ \varepsilon + (1-\varepsilon)[1+2a - a^2-1] \}^2 \\ &[\varepsilon K \{ (a + (\frac{1}{\beta})^{1/2} a(1-a)^3 \} + a^2] > \{ \varepsilon + (1-\varepsilon)[1 - (1-a)^2] \}^2 \end{aligned}$$

Видно, что при a , стремящемся к единице, неравенство всегда выполняется.

5. Численное значение эффекта перехлёста в точке максимума второго макроскопического параметра модифицированной модели $\tilde{a}$

Аналитические свойства модифицированной бимодальной модели тесно связаны с теоремами математического анализа о функциях, дифференцируемых на отрезке.

Так, второй параметр модели $\tilde{a}$ (a), в силу необходимости выполнения граничных условий

$$\tilde{a}(0) = \tilde{a}(1) = 0 \quad (5.1)$$

и теоремы Ролля, должен в общем случае иметь нулевую производную по первому параметру $a(x)$.

В табл. 1 для соответствующих параметров задачи приведены относительные значения функции пар молекул тяжёлого компонента $H_{22}|_{\text{ref}}$, свидетельствующие о наличии значительной величины эффекта перехлёста.

Таблица 1 / Table 1

**Значения эффекта перехлёста $H_{22}|_{\text{ref}}$ для тяжёлого компонента смеси /
Values of the overlap effect $H_{22}|_{\text{ref}}$ for the heavy component of the mixture**

γ	ε	β	a	$\tilde{a}$	$H_{22} _{\text{ref}}$
5/3	1/4	2	1/2	1/4	2,052
5/3	1/4	3	1/2	1/4	5,780
7/5	1/6	2	1/2	1/4	4,334
7/5	1/6	3	1/2	1/4	19,479
9/7	1/8	2	1/2	1/4	11,274
9/7	1/8	3	1/2	1/4	82,296

Выводы

Для модифицированной бимодальной модели ударной волны аналитически построены функции пар молекул в бинарных смесях газов. Показано, что модифицированная модель сохраняет простоту классической бимодальной модели Тамма – Мотт-Смита для однокомпонентных ударно сжатых газов. Это позволяет при её применении получить окончательные обозримые результаты до конца аналитически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические модели поступательно-неравновесной динамики ударно-сжатых бинарных смесей газов / М. М. Кузнецов, Г. В. Кузнецов, В. И. Парёнкина, Д. Г. Сатюков, Р. Ф. Халиков // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 4. С. 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48.
2. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Сатюков Д. Г. Статистические распределения пар молекул в модифицированной бимодальной модели ударно-сжатой смеси газов // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2024. № 3. С. 50–57. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57.
3. Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures // Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej). 1983. Vol. 35. No. 2. P. 215–239.

4. Функция распределения пар молекул модифицированной бимодальной модели ударной волны / М. М. Кузнецов, Ю. Д. Кулешова, В. И. Парёнкина, Д. Г. Сатюков // X Поляховские чтения: материалы международной научной конференции по механике (Санкт-Петербург, 23-27 сентября 2024 г.). СПб.: Издательство ВВМ, 2024. С. 424–427.
5. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. 1993. Т. 12. № 3. С. 340–342.
6. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика эволюции распределения молекул однокомпонентного газа по относительным скоростям во фронте УВ // Физика горения и взрыва. 1994. Т. 30. № 4. С. 140–144.
7. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of kinetic processes inside the bimodal hypersonic shock wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
8. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотров Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 2. С. 108–115.
9. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотров Л. В. Эффект поступательной неравновесности в Тамм – Мотт-Смитовской модели ударной волны // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 3. С. 84–86.
10. Бёрд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: МИР, 1981. 319 с.
11. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

REFERENCES

1. Kuznetsov, M. M., Kuznetsov, G. V., Parenkina, V. I., Satyukov, D. G. & Halikov, R. F. (2023). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48 (in Russ.).
2. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Ju. D. & Satyukov, D. G. (2024). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, 50–57. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57 (in Russ.).
3. Bratos, M. & Herczynski, R. (1983). Shock waves in noble gases and their mixtures. In: *Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej)*, 35 (2), 215–239.
4. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Ju. D., Parenkina, V. I. & Satyukov, D. G. (2024). Distribution function of pairs of molecules of the modified bimodal shock wave model. In: *X Polyakhov readings: proceedings of the international scientific conference on mechanics (St. Petersburg, September 23-27, 2024)*. St. Petersburg: VVM publ., pp. 424–427 (in Russ.).
5. Kulikov, S. V., Ternovaya, O. N. & Chereshevnev, S. L. (1993). Specificity of Translational Nonequilibrium in the Shock Wave Front Propagating through a Single-Component Gas. In: *Soviet Journal of Chemical Physics*, 12 (3), 340–342 (in Russ.).

6. Kulikov, S. V., Ternovaya, O. N. & Chereshev, S. L. (1994). Specificity of the evolution of the distribution of one-component gas molecules by relative velocities in the shock wave front. In: *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 30 (4), 140–144 (in Russ.).
7. Kuznetsov, M. M. & Kuleshova, Yu. D. (2012). Increase in rates of kinetic processes inside the bimodal hypersonic shock wave. In: *Heat Transfer Research*, 43 (3), 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
8. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Ju. D. & Smotrova, L. V. (2012). On the increase of the kinetic processes rates in Tamm-Mott-Smith shock wave model. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2, 108–115 (in Russ.).
9. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Ju. D. & Smotrova, L. V. (2012). Theorems on the maximum of relative high velocity overshoot in bimodal shock wave. In: *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 3, 84–86 (in Russ.).
10. Bird, G. (1981). *Molecular Gas Dynamics*. Moscow: MIR publ. (in Russ.).
11. Kogan, M. N. (1967). *Dynamics of Rarefied Gas*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Сатюков Дмитрий Геннадьевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

Кулешова Юлия Дмитриевна (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Владимирова Елена Яковлевна (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0009-0000-3382-1516>; e-mail: e.vladimirova7@gmail.com

Кузнецов Глеб Витальевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0002-6878-8346>; e-mail: glebwow7@yandex.ru

Халиков Руслан Фанусович (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: rustek95@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Dmitry G. Satyukov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

Juliya D. Kuleshova (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Elena Ya. Vladimirova (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0009-0000-3382-1516>; e-mail: e.vladimirova7@gmail.com

Gleb V. Kuznetsov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0002-6878-8346>, e-mail: glebwow7@yandex.ru

Ruslan F. Halikov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: rustek95@gmail.com