Научная статья
УДК 517.956.35
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-26-36

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА

Бозиев О. Л.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Кабардино-Балкарская республика, Российская Федерация;
Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, 360000, г. Нальчик, ул. И. Арманд, д. 37А, Кабардино-Балкарская республика, Российская Федерация
e-mail: boziev@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.09.2024
После доработки 16.09.2024
Принята к публикации 20.09.2024

Аннотация
Цель: установление априорных оценок для интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа, моделирующего некоторые нелинейные колебательные процессы. Здесь нагрузкой является рациональная степень m / n линейной функции от нормы искомого решения в пространстве $H^1(\Omega)$.
Процедура и методы. Для установления априорных оценок производятся интегральные преобразования слагаемых скалярного произведения исходного уравнения и временной производной его решения. Применение некоторого известного интегрального неравенства приводит к искомым оценкам.
Результаты. Установлены априорные неравенства, ограничивающие интегральную нагрузку уравнения Кирхгоффа известной функцией, зависящей от правой части уравнения и начальных условий, зависящие от знака и вида показателя степени. Показан способ редукции уравнения Кирхгоффа к линейному уравнению путём замены интегральной нагрузки правыми частями этих оценок. Приведён пример такой редукции.
Теоретическая и/или практическая значимость. Описанный способ установления априорных оценок и последующей редукции нелинейного уравнения к линейному может быть применён к широкому классу нагруженных уравнений, содержащих модуль интеграла рациональной степени искомой функции или её производной.
Ключевые слова: априорная оценка, интегральная нагрузка, редукция к линейному уравнению, уравнение Кирхгофа
Для цитирования.
Бозиев О. Л. Априорные оценки интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 26-36. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-26-36

Original research article

A PRIORI ESTIMATES OF THE INTEGRAL LOAD OF THE HYPERBOLIC KIRCHHOFF EQUATION

O. Boziev

Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, ulitsa Tchernyshevskogo 173, Nalchik 360004, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation;
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardin-Balkar Scientific Center of Russian Academy of Sciences, ulitsa I. Armand 37A, Nalchik 360000, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation
e-mail: boziev@yandex.ru

Received by the editorial office 02.09.2024
Revised by the author 16.09.2024
Accepted for publication 20.09.2024

Abstract
Aim. The aim of this work is to establish a priori estimates for the integral load of the Kirchhoff equation. This equation models some nonlinear oscillatory processes. Here, the load is the rational degree m/n of a linear function of the norm of the desired solution in the space $H^1(\Omega)$.
Methodology. To establish a priori estimates, integral transformations of the terms of the scalar product of the original equation and the time derivative of its solution are performed. The application of some well-known integral inequality leads to the desired estimates.
Results. A priori inequalities limiting the integral load of the Kirchhoff equation to a known function are established. This function depends on the right side of the equation and the initial conditions, depending on the sign and type of exponent. A method is shown for reducing the Kirchhoff equation to a linear equation by replacing the integral load with the right-hand sides of these estimates. An example of such a reduction is given.
Research implications. The described method of establishing a priori estimates and subsequent reduction of a nonlinear equation to a linear one can be applied to a wide class of loaded equations containing the modulus of the integral of the rational degree of the desired function or its derivative.
Keywords: a priori estimation, integral load, Kirchhoff equation, reduction to a linear equation.
For citation:
Boziev, O. V. (2024). A priori estimates of the integral load of the hyperbolic Kirchhoff equation. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp.26-36.
https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-26-36

Введение

Нелинейное гиперболическое уравнение Кирхгофа

$$u_{tt} - a(s)\Delta u = f(x,t), \tag{1}$$

в котором

$$s = s(t) = \|\nabla u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \ \Omega \subset R^n,$$

будем рассматривать в области $Q=\{(x,t): x\in\Omega\subseteq R^n,\ t\in[0,T]\}$ с границей $\partial\Omega$ класса дважды непрерывно-дифференцируемых функций при условиях

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ u_t(x,0)=\varphi_2(x), \nabla u\big|_{\partial\Omega}=0, x=(x_1,...,x_n)\in\Omega. \qquad (2)$$

Уравнение вида (1) моделирует некоторые колебательные процессы, в частности, оно учитывает изменения длины струны, вызванные поперечными колебаниями. Данное уравнение является нагруженным в силу того, что содержит нагрузку $a(s)$, где s – это интеграл указанного вида. Подобную нагрузку будем называть интегральной. В статье полагается

$$a(s)=\left(C_1s+C_2\right)^p, C_1,C_2>0,\ p\in R, p\neq 0.$$

В [1] для уравнения указанного вида была установлена разрешимость в целом первой смешанной задачи с однородными начальными условиями при натуральных p. В [2] разрешимость этой же задачи в целом установлена при $p = -2$. В [3] доказывается существование и единственность задачи Коши для однородного уравнения вида (1). Работы [4–9], как и большое количество других, также посвящены подобным уравнениям, в том числе и с младшими членами.

Полученные в этих работах результаты соответствуют основным натуральным p, реже – целым отрицательным. Проблема нахождения решения какой-либо начально-краевой задачи для уравнения (1) в них не рассматривается. Как известно, непосредственное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в большинстве случаев не представляется возможным. В подобных случаях часто прибегают к аппроксимации нелинейных уравнений линейными. При этом процесс, описываемый аппроксимирующим линейным уравнением, может существенно отличаться от моделируемого исходным уравнением нелинейного процесса. В настоящей работе устанавливаются априорные оценки интегральной нагрузки уравнения при рациональных значениях p. Правые части этих оценок являются известными функциями свободного члена уравнения и начальных условий. Они могут быть использованы для редукции нагруженного уравнения к ассоциированному с ним линейному уравнению путём замены ими интегральной нагрузки. Подобная линеаризация представляется более обоснованной по сравнению с другими способами. Кроме того, полученное таким образом аппроксимирующее линейное уравнение может быть принято за начальное приближение к исходному нагруженному уравнению в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (2). Этот приём применялся в случае одномерного уравнения вида (1) в [10; 11], где были получены априорные оценки производных решения одномерного уравнения вида (1). Для установления априорных оценок применяется

Лемма. [12, теорема 1.4] Если функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t)\leq\alpha(t)\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)u(\tau)d\tau+f(t), t\geq t_0,$$

где функция $f(t)$ и неотрицательные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \le \alpha(t)\int_{t_0}^{t} f(\tau)\beta(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{t}\alpha(s)\beta(s)ds\right)d\tau + f(t).$$

Также неоднократно используются обозначения

$$F_1(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2, \quad K_0(t) = \int_0^t F_2(\tau)e^{t-\tau}d\tau + F_2(t),$$

а при доказательстве теорем возникает неравенство

$$\|u_t\|^2 \le K_0(t). \tag{3}$$

Легко видеть, что в предположении $u \in H^1(\Omega)$ имеют место равенства

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2, -(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2,$$

где скалярное произведение рассматривается в смысле пространства $L_2(\Omega)$.

1. Интегральная нагрузка со степенью $p = \frac{m}{n}, m,n \in N$

Рассмотрим уравнение (1) в виде

$$u_{tt} - \left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m}{n}} \Delta u = f(x,t), m,n \in N. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть решением задачи (4), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t, u_{tt}, \nabla\varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $(C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}}$ ограничена зависящей от t константой.

Доказательство. Скалярное произведение (1) и функции u_t имеет вид:

$$(u_{tt}, u_t) - a(s)(\Delta u, u_t) = (f, u_t). \tag{5}$$

Заметим, что

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2}a(s)\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right).$$

Это позволяет записать соотношение

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right) = 2\int_\Omega f u_t dx,$$

интегрирование которого в свою очередь приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m+n}{n}} = 2\int_0^t\int_\Omega f u_t dx d\tau + \|u_t(x,0)\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши:

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m+n}{n}} \le \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}. \tag{6}$$

Исключая второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \le \int_0^t \|u_t\|^2\, d\tau + F_2(t),$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму, получаем оценку (3). В левой части (6) исключим $\|u_t\|^2$, а в правой части заменим его на $K_0(t)$:

$$\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}(C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \le \int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Отсюда перейдём к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \le K(t), \tag{7}$$

$$K(t) = C_1\frac{m+n}{n}\left(\int_0^t K_0 d\tau + F_1(t)\right),$$

Теорема 1 доказана.

С помощью (7) редуцируем нелинейное уравнение (4) к линейному уравнению. Для этого положим в (4)

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} = \left(K(t)\right)^{\frac{m}{m+n}},$$

что приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - \left(K(t)\right)^{\frac{m}{m+n}} \Delta u = f(x,t). \tag{8}$$

2. Интегральная нагрузка со степенью $p = -\frac{m}{n}, m, n \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \left(C_1 s + C_2\right)^{-\frac{m}{n}} \Delta u = f(x,t), m, n \in N. \tag{9}$$

Заметим, что при $a(s) = \left(C_1 s + C_2\right)^{-\frac{m}{n}}$ в скалярном произведении (5) имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2}a(s)\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{-\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right).$$

Продолжим его при $m = n$ и $m \ne n$.

При $m = n$ ($p = -1$) имеем

$$\frac{1}{2C_1}(C_1 s + C_2)^{-1}\frac{d}{dt}(C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1}\frac{d}{dt}\ln(C_1 s + C_2). \tag{10}$$

Пусть $m \ne n$. Тогда

$$\frac{1}{2C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{-\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right) = \frac{1}{2C_1}\frac{n}{n-m}\frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}. \tag{11}$$

Теорема 2. Пусть решением задачи (9), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, такая, что u_t, u_{tt}, $\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2, f \in L_2(\Omega), m, n \in N$. Тогда ограничены зависящими от t константами следующие функции:

a) $\ln(C_1s+C_2)$ при $C_1s+C_2 \ge 1$, $p = -1$;

b) $\ln(C_1s+C_2)^{-1}$ при $C_1s+C_2 < 1$ и $s'(t) < 0$, $p = -1$;

c) $(C_1s+C_2)^{\frac{n-m}{n}}$ при $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0$, $m < n$;

d) $(C_1s+C_2)^{\frac{m-n}{n}}$ при $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0$, $s'(t) > 0$, $m > n$.

Доказательство.

a) С учётом (10) запишем:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\ln(C_1s+C_2)\right) = 2\int_\Omega fu_t dx.$$

После интегрирования последнего перейдём к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\ln(C_1s+C_2) \le \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t), \tag{12}$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1}\ln(C_1s(0)+C_2).$$

Пусть $C_1s+C_2 \ge 1$. Исключая в (12) второе слагаемое левой части и применяя лемму, приходим к оценке (3).

Выбирая верхнюю границу неравенства, в правой части (12) заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$, исключая при этом первое слагаемое левой части. Это приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$\ln(C_1s+C_2) \le K_1(t), \tag{13}$$

$$K_1(t) = C_1\left(\int_0^t K_0(\tau)d\tau + F_1(t)\right),$$

b) Пусть $C_1s+C_2 < 1$. С учётом знака логарифма запишем (12) в виде

$$\|u_t\|^2 \le \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) - \frac{1}{C_1}\ln\frac{C_1s(0)+C_2}{C_1s+C_2},$$

Последний член правой части исключим в силу $s(0) = \max s(t)$. После применения леммы при $F_2(t) = F_1(t)$ получаем неравенство (3).

В (11) заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$, исключая при этом первое слагаемое левой части, что приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$\ln(C_1s+C_2)^{-1} \le K_2(t), \tag{14}$$

$$K_2(t) = C_1\left(\int_0^t K_0(\tau)d\tau + F_1(t)\right),$$

c) С учётом (11) запишем:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2+\frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}\right)=2\int\limits_\Omega fu_t dx. \qquad (15)$$

После интегрирования перейдём к неравенству

$$\|u_t\|^2+\frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}\le\int\limits_0^t\|u_t\|^2\,d\tau+F_2(t). \qquad (16)$$

$$F_2(t)=F_1(t)+\frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}.$$

Исключая в (16) второе слагаемое левой части с применением леммы имеем оценку (3). Подстановка $K_0(t)$ в правую часть (16) вместо $\|u_t\|^2$ с одновременным исключением первого слагаемого левой части приводит к выполняющейся для всех $t\in[0,T]$ оценке

$$\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}\le K(t), \qquad (17)$$

$$K(t)=C_1\frac{n-m}{n}\left(\int\limits_0^t K_0 d\tau+F_1(t)\right).$$

d) С помощью (11) перейдём к уравнению (15). Проинтегрируем его, замечая, что в силу возрастания функции s

$$\int\limits_0^t\frac{d}{dt}\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}d\tau=\frac{\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}-\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}}{\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}}=F_0(t)<0,$$

после чего перейдём к неравенству

$$\|u_t\|^2+\frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}F_0(t)\le\int\limits_0^t\|u_t\|^2\,d\tau+F_1(t). \qquad (18)$$

Исключая второе слагаемое левой части, запишем оценку

$$\|u_t\|^2\le\int\limits_0^t\|u_t\|^2\,d\tau+F_1(t).$$

Очередное применение леммы при $F_2(t)=F_1(t)$ даёт оценку (3).

Вновь заменяя $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$ в правой части (18) с одновременным исключением первого слагаемого левой части, получаем неравенство

$$\frac{n}{n-m}F_0(t)\le C_1\left(\int\limits_0^t K_0(\tau)d\tau+F_1(t)\right).$$

Из последнего следует, что для всех $t\in[0,T]$ выполнено неравенство

$$\left(C_1 s+C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}\le K(t), \qquad (19)$$

$$K(t)=C_1\frac{m-n}{n}\left(\int\limits_0^t K_0(\tau)d\tau+F_1(t)\right)\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим применение полученных оценок для редуцирования нелинейного уравнения (8) к соответствующим линейным уравнениям.

a) и b) Переход к равенствам в (13) и (14) позволяет перейти от (9) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp\big(K(t)\big)\Delta u = f(x,t), \tag{20}$$

в котором

$$K(t) = \begin{cases} -K_1(t),\ C_1 s + C_2 \geq 1, \\ K_2(t),\ C_1 s + C_2 < 1. \end{cases}$$

c) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = \big(K(t)\big)^{\frac{m}{m-n}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (17), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \big(K(t)\big)^{\frac{m}{m-n}} \Delta u = f(x,t). \tag{21}$$

d) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = \big(K(t)\big)^{\frac{m}{n-m}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (20), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \big(K(t)\big)^{\frac{m}{n-m}} \Delta u = f(x,t). \tag{22}$$

3. Пример

Приведём одномерный пример, соответствующий случаю c) теоремы 2. Пусть задача (9), (2) имеет вид

$$u_{tt} - \left(\int_0^1 |u_x|^2\,dx + 1\right)^{-\frac{1}{2}} u_{xx} = x + t,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{6}x^2(2x-3), u_t(x,0) = x, x \in [0,1], u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, t \in [0,T].$$

Таким образом, в формулировке теоремы 2 имеем

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{6}x^2(2x-3),\ \varphi_2(x) = x, f(x,t) = x+t, C_1 = C_2 = 1, m = 1, n = 2.$$

Найдём величины, входящие в (17):

$$\int_0^t \|f\|^2\,dx = \int_0^t\int_0^1 |x+t|^2\,dx d\tau = t^2 + t + \frac{1}{3},\ \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},\ F_1(t) = \frac{1}{6}t(2t^2+3t+2) + \frac{1}{3},$$

$$s(0) = \int_0^1 |u_x(x,0)|^2\,dx = \int_0^1 |\varphi_{1x}(x)|^2\,dx = \int_0^1 |x^2 - x|^2\,dx = \frac{1}{30}, (s(0)+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}01653.$$

$$F_2(t) = 0{,}16667t(2t^2+3t+2) + 2{,}36639,\ K_0(t) = 5{,}69972e^t - t^2 + 3{,}333333t - 2{,}99748,$$

$$\int_0^t K_0(\tau)d\tau = 5,69972e^t - 0,25t^4 - 3,33333t^3 - 2,99748t,$$

$$K(t) = 2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319.$$

После подстановки в (21) получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \left(2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319\right)^{-0,5} u_{xx} = x + t.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки для интегральной нагрузки $a(s) = \left(C_1 s + C_2\right)^{\pm\frac{m}{n}}, C_1, C_2 > 0,\ m, n \in N,$ уравнения Кирхгофа (1) при условиях (2) и показано их применение к его линеаризации. Положительной степени интегральной нагрузки соответствует оценка (7). Для отрицательной степени рассмотрены случаи $m = n$ с оценками (12) и (14), а также случаи $m < n$ и $m > n$ с оценками (17) и (19) соответственно. Правые части полученных выражений, рассматриваемых как равенства, используются для линеаризации уравнения (1) путём замены ими интегральной нагрузки. Результатом являются уравнения (8), (20), (21), (22), Приводится одномерный пример, иллюстрирующий редукцию нагруженного уравнения к линейному. Решение последнего при исходных начально-краевых условиях может быть принято за первое приближение к решению нагруженной задачи.

Практическое значение работы состоит в том, что использование рациональных значений степени p в интегральной нагрузке расширяет класс исследуемых уравнений Кирхгофа, а установленные априорные оценки дают возможность получения некоторых качественных результатов для данного уравнения. Кроме того, способ редукции к линейному уравнению может быть полезным для решения практически важных задач, связанных с малыми поперечными колебаниями упругих струн и мембран.

ЛИТЕРАТУРА

1. Похожаев С. И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 1975. Т. 96 (138). № 1. С. 152–166.
2. Похожаев С. И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 101–108.
3. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. Vol. 8. Iss. 6. P. 623–636. DOI: 10.1016/0362-546X(84)90007-5.
4. Crippa H. R. On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1993. Vol. 21. Iss. 8. P. 565–574. DOI: 10.1016/0362-546X(93)90001-9.
5. Ngoc L. T. P., Long N. T. Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed

nonhomogeneous conditions // Acta Applicandae Mathematicae. 2010. Vol. 112. P. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.

6. Frota C. L., Medeiros L. A., Vicente A. Wave equation in domains with non-locally reacting boundary // Differential Integral Equations. 2011. Vol. 24. No. 11/12. P. 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.
7. Frota C. L., Medeiros L. A., Vicente A. A mixed problem for semilinear wave equations with acoustic boundary conditions in domains with non-locally reacting boundary // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. No. 243. P. 1–14. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf (дата обращения: 02.04.2024).
8. Ono K. Lower decay estimates for non-degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations // Journal of Mathematics, Tokushima University. 2018. Vol. 52. P. 39–52 [Электронный ресурс]. URL: https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2018/2018-3-ono.pdf (дата обращения: 02.04.2024).
9. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains // Journal of Mathematics, Tokushima University. 2021. Vol. 55. P. 11–18 [Электронный ресурс]. URL: https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2021/2021-2-ono.pdf (дата обращения: 02.04.2024).
10. Бозиев О. Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.
11. Бозиев О. Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/89/1.
12. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 151 с.

REFERENCES

1. Pokhozhaev, S. I. (1975). On a class of quasilinear hyperbolic equations. In: *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 138 (1), 152–166 (in Russ).
2. Pokhozhaev, S. I. (1985). A quasilinear hyperbolic Kirchhoff equation. In: *Differential Equations*, 21 (1), 101–108 (in Russ.).
3. Nishihara, K. (1984). Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Application*s, 8 (6), 623–636. DOI: 10.1016/0362-546X(84)90007-5.
4. Crippa, H. R. (1993). On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 21 (8), 565–574. DOI: 10.1016/0362-546X(93)90001-9.
5. Ngoc, L. T. P. & Long, N. T. (2010). Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. In: *Acta Applicandae Mathematicae*, 112, 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
6. Frota, C. L., Medeiros, L. A. & Vicente, A. (2011). Wave equation in domains with non-locally reacting boundary. In: *Differential Integral Equations*, 24 (11/12), 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.
7. Frota, C. L., Medeiros, L. A. & Vicente, A. (2014). A mixed problem for semilinear wave equations with acoustic boundary conditions in domains with non-locally reacting

boundary. In: *Electronic Journal of Differential Equations*, 243, 1–14. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf (accessed: 02.04.2024).
8. Ono, K. (2018). Lower decay estimates for non-degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations. In: *Journal of Mathematics, Tokushima University*, 52, 39–52. URL: https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2018/2018-3-ono.pdf (accessed: 02.04.2024).
9. Ono, K. (2021). Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. In: *Journal of Mathematics, Tokushima University*, 55, 11–18. URL: https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2021/2021-2-ono.pdf (accessed: 02.04.2024).
10. Boziev, O. K. (2022). On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions. In: *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 80, 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.
11. Boziev, O. K. (2024). A priori estimates for derivative solutions of one-dimensional inhomogeneous wave equations with an integral load in the main part. In: *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 89, 5–16. DOI: 10.17223/19988621/89/1.
12. Filatov, A. N. & Sharova, L. V. (1976). Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Nauka publ.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бозиев Олег Людинович (г. Нальчик) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник отдела автоматизации и информатизации региональных систем управления Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;
ORCID: 0000-0001-6660-7444; e-mail: boziev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Oleg L. Boziev (Nalchik) – Cand. Sci (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computer Technologies and Information Security, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov; Senior Researcher, Department of Automation and Informatization of Regional Control Systems, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardin-Balkar Scientific Center of Russian Academy of Sciences;
ORCID: 0000-0001-6660-7444; e-mail: boziev@yandex.ru