

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ ПО ОБЛАСТЯМ И УРОВНЯМ ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 519.217

DOI: 10.18384/2310-7251-2024-2-60-78

РАСЧЁТ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В КОМПЬЮТЕРНЫХ КЛАССАХ

Хасанов А. С.

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
115054, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация

Целью данной статьи является рассмотрение алгоритмов расчёта стационарных характеристик систем массового обслуживания в компьютерных классах с использованием табличного процессора Excel.

Процедура и методы. Приводится краткое содержание данной темы. Дается общий подход для расчёта стационарных характеристик систем массового обслуживания. Общий подход конкретизируется для систем массового обслуживания с отказами, с очередью и с неограниченной очередью.

Результаты. Описан один из способов организации занятий в компьютерных классах при изучении систем массового обслуживания.

Практическая значимость работы обусловлена необходимостью проведения занятий по системам массового обслуживания для некоторых направлений подготовки студентов. В условиях жёстких временных ограничений занятия могут быть организованы в компьютерных классах. Предложенный подход может быть использован преподавателями как на занятиях, так и при организации самостоятельной работы студентов, так как использует простейшие инструменты общедоступного табличного процессора Excel.

Ключевые слова: случайный процесс, система массового обслуживания, поток требований, поток обслуживания, граф состояний

CALCULATION OF THE QUEUING SYSTEMS CHARACTERISTICS IN COMPUTER CLASSES

A. Khasanov

Plekhanov Russian University of Economics

Stremyanny pereulok 36, Moscow 115054, Russian Federation

Abstract

Aim of this article is to consider algorithms for calculating stationary characteristics of queuing systems in computer classes using an Excel spreadsheet processor.

Methodology. A summary of this topic is provided. A general approach is given for calculating the stationary characteristics of queuing systems. The general approach is specified for queuing systems with failures, with a queue and with an unlimited queue.

Results. One of the ways of organizing classes in computer classes in the study of queuing systems is described.

Research implications. The practical significance of the work is due to the need to conduct classes on queuing systems for some areas of student training. In conditions of strict time constraints, classes can be organized in computer classes. The proposed approach can be used by teachers both in the classroom and when organizing students' independent work, since it uses the simplest tools of the publicly available Excel spreadsheet processor.

Keywords: random process, queuing system, requirements flow, service flow, status graph

Введение

При решении многих прикладных задач возникает необходимость привлечения теории массового обслуживания. Рассмотрим работу крупного морского порта. В порт прибывают суда из многих стран. Моменты прихода судов и длительности их обслуживания не могут быть точно определены заранее, следовательно, в этом процессе присутствует элемент случайности. Поток судов образует входящий поток требований (заявок), который порту предстоит обслужить. В данном случае порт является примером системы массового обслуживания (коротко СМО), а причалы – примерами каналов обслуживания (приборов) системы. Суда, отходящие от причала, образуют поток обслуживания причала или выходящий поток. Специалист, ответственный за организацию работы порта, нуждается в инструменте анализа функционирования СМО. Таким инструментом, учитывающим случайные колебания в подходе судов и их обслуживания, является теория массового обслуживания.

Структуру СМО определяют четыре элемента:

1. Входящий поток однородных требований, поступающих в СМО в случайные моменты времени (требования ещё называют заявками).
2. Поток обслуживания (поток требований на выходе непрерывно работающего прибора, его ещё называют выходящим потоком).
3. Количество однородных приборов (или каналов) в системе.

4. Число мест ожидания.

СМО с одним прибором называется одноканальным, а СМО с несколькими приборами – многоканальным. Если число мест ожидания в СМО равно нулю, то такая система называется СМО с отказами. В такой СМО требование, поступившее в момент, когда все приборы заняты, получает отказ и покидает систему. Если число мест ожидания больше нуля, то такая система называется СМО с ожиданием. В случае бесконечного числа мест ожидания система называется СМО с неограниченной очередью (в ней ни одно требование не получает отказ).

Функционирование любой системы обслуживания зависит от способа организации обслуживания (дисциплины обслуживания). Дисциплина обслуживания указывает, в каком порядке обслуживаются поступающие в систему требования. Мы будем рассматривать СМО, в которых приборы установлены параллельно и поступившие требования обслуживаются на одном из свободных приборов в порядке их поступления в СМО.

Для повышения эффективности функционирования реальных систем необходимо уметь рассчитывать характеристики их вероятностных моделей. При этом различают нестационарные (для произвольного момента времени) и стационарные (для достаточно удалённого момента времени) характеристики. Мы будем рассчитывать только стационарные характеристики.

Теория массового обслуживания является важным элементом общей математической подготовки специалистов широкого профиля. Подробное изложение этой теории можно найти в работах [1–7]. В условиях жёстких временных ограничений важное значение приобретает организация самостоятельной работы студентов. Как и при организации самостоятельной работы студентов при изучении других предметов [8–11], самостоятельная работа студентов при изучении систем массового обслуживания может быть организована на основе индивидуальных заданий для самостоятельного выполнения студентами.

1. Простейший поток событий

Обозначим через $v(t)$ число требований, поступивших в СМО за временной промежуток $[0, t)$, где $v(0) = 0$. Так как требования поступают в СМО в случайные моменты времени, то $v(t)$ является случайной величиной при $\forall t \in (0, +\infty)$. Это означает, что $v(t)$ является случайным процессом с непрерывным временем $t \in [0, +\infty)$. В результате одного наблюдения за случайным процессом мы получим некоторую функцию от времени (траекторию процесса). Повторяя наблюдения, мы получим различные траектории этого процесса, но все они принимают неотрицательные значения и не убывают, так как число поступивших требований является целым числом и не может убывать с ростом времени. Так мы приходим к понятию потока событий. Говорят, что задан поток событий, если задан случайный процесс $v(t)$ с непрерывным временем $t \in [0, +\infty)$, принимающий целые неотрицательные

значения, траектории которого не убывают и $v(0) = 0$. Значение $v(t)$ имеет смысл числа событий, наступивших за промежуток времени $[0, t)$. Входящий поток требований и поток обслуживания являются частными случаями потока событий. В случае потока обслуживания значение $v(t)$ имеет смысл числа требований, покинувших прибор за промежуток $[0, t)$, а в случае входящего потока – числа требований, поступивших в СМО за временной промежуток $[0, t)$.

Поток называется стационарным, если сдвиг начала отсчёта по оси времени не влияет на вероятностные характеристики потока, т.е. для $\forall c > 0$ с вероятностной точки зрения поток $v(t + c) - v(c)$ эквивалентен потоку $v(t)$. Интенсивностью стационарного потока называется «математическое ожидание числа событий, наступивших за единицу времени». Эту величину мы будем обозначать через a .

Поток $v(t)$ называется потоком с независимыми приращениями, если для любых значений $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ из множества $T = [0, +\infty)$ соответствующие приращения $v(t_1) - v(t_0), v(t_2) - v(t_1), \dots$ являются независимыми случайными величинами. Такие потоки называют ещё потоками без последствия.

Поток называется ординарным, если вероятность наступления за малый промежуток времени h двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события. Это можно записать в эквивалентной форме через условную вероятность:

$$P(v(h) \geq 2 | v(h) \geq 1) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (1)$$

В данной работе мы будем рассматривать только те потоки, которые удовлетворяют условиям стационарности, ординарности и отсутствия последствия – их называют простейшими. Можно доказать, что $v(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром at :

$$P(v(t) = k) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Простейший поток с интенсивностью a будем называть пуассоновским и обозначать через $v(a, t)$. Пуассоновский поток $v(a, t)$ обладает следующим определяющим свойством: после наступления события следующее событие ожидается через случайное время $t_{ож}$, распределённое по показательному закону с параметром a . Действительно, из формулы (2) следует, что $P(v(t) = 0) = e^{-at}$. Эта вероятность равна вероятности того, что за временной промежуток $[0, t)$ не появится ни одно событие потока, т.е. вероятности события $\{t_{ож} \geq t\}$. Но тогда $P(t_{ож} \geq t) = e^{-at}$, а $P(t_{ож} < t) = 1 - e^{-at}$.

В дальнейшем будем считать, что входящий поток и поток обслуживания являются пуассоновскими потоками с интенсивностями λ и μ . Тогда время ожидания следующего входящего требования (время между последовательными моментами поступления требований) $t_{вх}$ и время ожидания выхода следующего требования из непрерывно работающего

прибора $t_{об}$ (время обслуживания) распределены по показательному закону с параметрами λ и μ . Из свойств показательного распределения следуют формулы для математических ожиданий случайных величин $t_{вх}$, $t_{об}$: $Et_{вх} = 1/\lambda$, $Et_{об} = 1/\mu$. Эти формулы используются для оценивания значений параметров λ и μ (их оценки также обозначим буквами λ и μ). Если $\bar{t}_{вх}$, $\bar{t}_{об}$ – оценки математических ожиданий $Et_{вх}$, $Et_{об}$, полученные на основе наблюдений случайных величин $t_{вх}$ и $t_{об}$, то

$$\lambda = 1/\bar{t}_{вх}, \quad (3)$$

$$\mu = 1/\bar{t}_{об}. \quad (4)$$

При заданном уровне значимости проверка гипотезы о том, что промежуток времени между последовательными моментами поступления требований $t_{вх}$ и время обслуживания $t_{об}$ распределены по показательному закону, осуществляется по стандартной схеме на основе статистических данных. Нами рассмотрены только те СМО, в которых $t_{вх}$ и $t_{об}$ распределены по показательному закону. В противном случае анализ СМО усложняется.

Пуассоновский поток обладает ещё одним естественным свойством: объединение двух независимых пуассоновских потоков с параметрами a_1 и a_2 даёт пуассоновский поток с параметром $a_1 + a_2$. Отсюда следует, что n независимо работающих приборам соответствует пуассоновский поток обслуживания с интенсивностью $n\mu$.

Пуассоновский поток $\nu(a, t)$ является примером марковских процессов, т. е. процессов, поведение которых после момента t при фиксированном состоянии в момент времени t не зависит от поведения процесса до момента t , а зависит только от состояния этого процесса в момент времени t (значения процесса называются его состояниями).

Пуассоновский поток обычно обозначают буквой M . Как было сказано во введении, структура СМО определяется входящим потоком, потоком обслуживания одного прибора, количеством приборов в системе (обозначается буквой n), числом мест ожидания (обозначается буквой m). Мы ограничимся рассмотрением трёх типов СМО: $M|M|n|0$ – система с отказами (входящий поток и поток обслуживания прибора являются пуассоновскими, имеются n приборов, мест ожидания нет), $M|M|n|m$ – система с очередью (имеются m мест ожидания), $M|M|n|\infty$ – система с неограниченной очередью.

2. Предельные вероятности состояний

Пусть $L(t)$ – число требований, находящихся в СМО в момент времени t . Некоторые требования находятся на обслуживании, а некоторые – в очереди. Значения $L(t)$ назовём состояниями СМО, а множество состояний системы обозначим через S . В СМО типа $M|M|n|0$ могут пребывать не более n требований и $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, а в СМО типа $M|M|n|m$ $S = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$. В СМО типа $M|M|n|\infty$ множество S состоит из всех неотрицательных чисел: $S = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. В общем случае, если $L(t)$

является марковским процессом, то система называется марковской. Все рассматриваемые нами типы СМО с пуассоновскими входящими и выходящими потоками являются марковскими СМО. Из свойства (1) входящего потока и потока обслуживания можно сделать вывод, что для $L(t)$ в состоянии $i \in S$ за малый промежуток времени h возможны переходы только в соседние состояния (на основании свойства (1) остальными переходами можно пренебречь). Такие процессы являются важным классом марковских процессов и называются процессами гибели и размножения. Название этих процессов связано с рядом биологических задач, где они служат математической моделью изменения численности биологических популяций: переход $i \rightarrow i + 1$ соответствует рождению одного члена популяции, а переход $i \rightarrow i - 1$ – гибели. Для $L(t)$ переход $i \rightarrow i + 1$ означает поступление нового требования, а переход $i \rightarrow i - 1$ происходит тогда, когда одно из требований после обслуживания покидает прибор.

Воспользуемся методами анализа процессов гибели и размножения. При анализе $L(t)$ удобно пользоваться геометрической схемой – так называемым графом состояний. Переходы из состояния в соседние состояния будем изображать стрелками с указанием интенсивностей потоков, под воздействием которых этот переход совершается. В любом состоянии i переход $i \rightarrow i + 1$ происходит за счёт входящего потока с интенсивностью λ , а переход $i \rightarrow i - 1$ – за счёт суммарного потока обслуживания работающих в этом состоянии приборов. Интенсивность суммарного потока обслуживания зависит от числа работающих приборов. Как уже было сказано выше, если заняты k приборов, то суммарный поток имеет интенсивность $k\mu$. Ниже приведены графы состояний в зависимости от структуры СМО.

1. СМО типа $M|M|n|0$. В такой системе в состоянии i работают i приборов:

$$0 \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} 1 \xrightleftharpoons[2\mu]{\lambda} 2 \xrightleftharpoons[3\mu]{\lambda} 3 \xrightleftharpoons[4\mu]{\lambda} 4 \xrightleftharpoons[5\mu]{\lambda} \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n. \quad (5)$$

2. В СМО типа $M|M|n|m$ во всех состояниях $i \in [n + 1, n + m]$ работают n приборов, а $i - n$ требований образуют очередь:

$$0 \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} 1 \xrightleftharpoons[2\mu]{\lambda} \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n + 1 \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n + m \quad (6)$$

3. В СМО типа $M|M|n|\infty$ также во всех состояниях $i \geq n + 1$ работают n приборов, а $i - n$ требований образуют очередь:

$$0 \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} 1 \xrightleftharpoons[2\mu]{\lambda} \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n + 1 \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} n + 2 \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} \dots \quad (7)$$

В любой фиксированный момент времени $t \in [0, +\infty)$ СМО находится в одном из своих состояний. Пусть $P_i(t)$ – вероятность состояния i , т. е. вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии i (если $i \notin S$, то $P_i(t) = 0$). Ясно, что

$$\sum_i P_i(t) = 1, \forall t \in [0, +\infty). \quad (8)$$

Обозначим через $\lambda_{i,j}$ интенсивность потока, переводящего систему из состояния i в соседнее состояние j (если $i \notin S$ или $j \notin S$, то $\lambda_{i,j}=0$). Можно доказать, что для среднего состояния i , в котором возможны оба перехода $i \rightarrow i-1$ и $i \rightarrow i+1$, справедлива формула для производной $P'_i(t)$:

$$P'_i(t) = \lambda_{i-1,i}P_{i-1}(t) + \lambda_{i+1,i}P_{i+1}(t) - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i(t). \quad (9)$$

В крайних состояниях некоторые потоки отсутствуют, т.е. некоторые интенсивности равны нулю, что упрощает формулу (9). Для левого крайнего состояния 0 (переход $i \rightarrow i-1$ невозможен):

$$P'_0(t) = \lambda_{1,0}P_1(t) - \lambda_{0,1}P_0(t), \quad (10)$$

а для правого крайнего состояния N (переход $N \rightarrow N+1$ невозможен):

$$P'_N(t) = \lambda_{N-1,N}P_{N-1}(t) - \lambda_{N,N-1}P_N(t). \quad (11)$$

Уравнения (9)–(11) называются дифференциальными уравнениями Колмогорова. Добавим к ним начальные условия $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, \forall i \geq 1$, связанные с условием $v(0) = 0$.

Интерес представляют вероятности $P_i(t)$ в предельном режиме при $t \rightarrow +\infty$. Эти вероятности называются предельными вероятностями состояний и обозначаются через P_i :

$$P_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_i(t), \text{ где } i \in S. \quad (12)$$

Для СМО типа $M|M|n|0$ и $M|M|n|m$ (в них число состояний конечно) всегда существуют положительные предельные вероятности состояний. Переходя к пределу в соотношении (8), получим уравнение:

$$\sum_i P_i = 1. \quad (13)$$

В случае СМО типа $M|M|n|\infty$ не всегда существуют положительные предельные вероятности. Пусть

$$\gamma = \frac{\lambda}{n\mu}. \quad (14)$$

Будем считать, что для СМО типа $M|M|n|\infty$ выполнено следующее условие:

$$\gamma < 1. \quad (15)$$

Можно показать, что в этом случае предельный режим существует.

Так как $P_i = \text{const}$, то $P'_i = 0$. Переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в уравнениях (9)–(11), мы получим уравнения для предельных вероятностей P_i . Для левого крайнего состояния 0:

$$\lambda_{1,0}P_1 = \lambda_{0,1}P_0. \quad (16)$$

Для среднего состояния i :

$$(\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i = \lambda_{i-1,i}P_{i-1} + \lambda_{i+1,i}P_{i+1}. \quad (17)$$

Для правого крайнего состояния N (если оно существует):

$$\lambda_{N,N-1}P_N = \lambda_{N-1,N}P_{N-1}. \quad (18)$$

Уравнения (16)–(18) можно объединить в одно уравнение:

$$\lambda_{i,i-1}P_i = \lambda_{i-1,i}P_{i-1} \text{ при } \forall i \in S, i \geq 1. \quad (19)$$

Учитывая, что все $\lambda_{i-1,i}$ в уравнении (19) равны λ (см. графы состояний (5)–(7)), и добавляя к ним уравнение (13), получим следующую систему уравнений относительно предельных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} P_i = \frac{\lambda}{\lambda_{i,i-1}} P_{i-1}, \forall i \geq 1, i \in S, \\ \sum_i P_i = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Под системой для предельных вероятностей состояний мы будем иметь в виду систему (20). Последовательно выражая по первой формуле системы (20) $P_1, P_2, \dots$ через P_0 и подставляя эти выражения во вторую формулу системы (20), можно найти сначала P_0 , а затем и $P_1, P_2, \dots$. Из системы (20) могут быть получены общие формулы для $P_0, P_1, P_2, \dots$. Эти формулы, а также нахождение вероятности $P_{оч}$ наличия очереди в СМО, вероятности занятости всех приборов π , вероятности отказа $P_{отк}$ и средней длины очереди N мы обсудим на этапе рассмотрения конкретных типов СМО.

Зная предельные вероятности, можно найти другие характеристики СМО. Вероятность отказа $P_{отк}$ имеет конкретный смысл: она равна доле среднего времени пребывания системы в состоянии полной занятости (нет свободных приборов и мест ожидания). Другими словами, если система работала в течение единицы времени, то в среднем в течение времени $P_{отк}$ система была полностью загружена. За это время полной занятости в среднем поступило $\lambda P_{отк}$ требований, и они получили отказ. Так как за единицу времени поступают в среднем λ требований, то величина $P_{отк}$ соответствует доле требований, получивших отказ, а $1 - P_{отк}$ – доле требований, принятых на обслуживание. Величина $1 - P_{отк}$ называется относительной пропускной способностью системы и обозначается через Q :

$$Q = 1 - P_{отк}. \quad (21)$$

Как было сказано выше, по определению интенсивности потока, за единицу времени в среднем в систему поступают λ требований и из них λQ требований будут обслужены, а $\lambda P_{отк}$ требований получают отказ. Величина λQ называется абсолютной пропускной способностью системы и обозначается через A :

$$A = \lambda Q. \quad (22)$$

Эта величина равна среднему количеству требований, принятых системой на обслуживание в единицу времени. Можно показать, что в предельном режиме среднее число находящихся в системе требований L равно произведению абсолютной пропускной способности системы A на среднее время пребывания в системе одного требования V :

$$L = AV. \quad (23)$$

Эта формула называется формулой Литтла. Также справедливы следующие аналоги формулы Литтла:

$$N = AW, \quad (24)$$

где N – средняя длина очереди, W – среднее время ожидания в очереди,

$$\bar{k} = A/\mu, \quad (25)$$

где $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов в системе.

Коэффициент занятости прибора $Q_{зан}$ – это отношение среднего числа занятых каналов к общему числу каналов:

$$Q_{зан} = \frac{\bar{k}}{n}. \quad (26)$$

Зная среднюю длину очереди N , величину среднего времени ожидания в очереди W можно найти по формуле (24):

$$W = N/A. \quad (27)$$

Среднее время пребывания в системе одного требования V складывается из среднего времени ожидания в очереди W и среднего времени обслуживания $1/\mu$:

$$V = W + 1/\mu. \quad (28)$$

Среднее количество требований в системе L складывается из средней длины очереди N и среднего количества требований, находящихся в занятых каналах, т. е. $\bar{k}$:

$$L = N + \bar{k}. \quad (29)$$

Мы привели общий подход для нахождения предельных вероятностей состояний и для расчёта некоторых характеристик СМО. Перейдём к реализации этого подхода в случае конкретных типов СМО.

3. СМО с отказами

Исходными данными для расчётов являются величины значения λ , μ и n . Множеством состояний системы $M|M|n|0$ будет $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, граф состояний имеет вид (5). Пусть

$$\rho = \lambda/\mu. \quad (30)$$

Величина ρ называется интенсивностью нагрузки канала. Так как $\lambda_{i,i-1} = i\mu$ в этом типе СМО, то система (20) имеет вид:

$$\begin{cases} P_i = \frac{\rho}{i} P_{i-1}, \forall i \geq 1, i \in S, \\ \sum_i P_i = 1. \end{cases} \quad (31)$$

Последовательно выражая $P_1, P_2, \dots, P_n$ через P_0 из первой формулы системы (31), получим следующую формулу:

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n. \tag{32}$$

Подставляя эти выражения для $P_1, P_2, \dots, P_n$ во вторую формулу системы (31), приходим к следующей формуле:

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} S^{-1}, \text{ где } S = \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}, i = 0, 1, \dots, n. \tag{33}$$

Пусть $\lambda = 3,1746$, $\mu = 1,2183$ и $n=5$. В Excel заполним следующую таблицу (см. табл. 1). В ячейке A1 приведено название таблицы. В ячейках A2:D2 приведены обозначения λ , μ , n и ρ . В ячейки A3:C3 выведем значения исходных величин λ , μ и n . Для вычисления значения ρ в ячейку D3 введём формулу =A3/B3. В ячейке A4 находится обозначение i для состояний системы. В ячейках B4:G4 расположены состояния системы (их можно ввести, используя автозаполнение), а в ячейке H4 – обозначение суммы S из формулы (33). В ячейке A5 находится обозначение слагаемых s_i суммы S , а в ячейках B5:G5 вычисляются их значения. Для этого в ячейку B5 введём значение, равное единице, а затем в ячейку C5 введём формулу =B5*\$D\$3/C4 и скопируем эту формулу для всех ячеек D5:G5. В ячейке H5 вычислим значение суммы S , для чего курсор установим в ячейке H5 и с помощью кнопки Σ найдём сумму значений ячеек B5:G5. В ячейке A6 приведено обозначение вероятности состояния P_i . В ячейках B6:G6 получим предельные вероятности состояний. Для этого в ячейку B6 введём формулу =B5/\$H\$5 и скопируем эту формулу для всех ячеек C6:G6. Если формулу в ячейке H5 скопировать в ячейку H6, то получим сумму предельных вероятностей состояний, т. е. единицу. Результаты округлены до четырёх знаков после запятой.

Таблица 1 / Table 1

Предельные вероятности состояний для СМО с отказами / Limit probabilities of states for queueing systems with failures

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Таблица 1							
2	λ	μ	n	ρ				
3	3,1746	1,2183	5	2,6058				
4	i	0	1	2	3	4	5	S
5	s_i	1	2,6058	3,3950	2,9489	1,9210	1,0011	12,8717
6	P_i	0,0777	0,2024	0,2638	0,2291	0,1492	0,0778	1

Источник: составлено автором.

В СМО типа $M|M|n|0$ требование получит отказ, если все приборы заняты, что соответствует состоянию n . Таким образом, для вероятности отказа $P_{отк}$ и вероятности занятости всех приборов π имеем формулы:

$$P_{отк} = P_n, \tag{34}$$

$$\pi = P_n. \tag{35}$$

Так как в СМО типа $M|M|n|0$ нет мест ожидания, то вероятность очереди $P_{оч}$ и средняя длина очереди N равны нулю:

$$N=0, \tag{36}$$

$$P_{оч}=0. \tag{37}$$

В Excel заполним новую таблицу (см. табл. 2). В ячейке A8 приведено её название. В ячейках A9:K9 приведены обозначения характеристик. В ячейках A10:K10 вычисляются их значения. В ячейку A10 введём нулевое значение (см. формулу (37)). Так как $n = 5$, то $\pi = P_5$ и $P_{отк} = P_5$ (см. формулы (34)–(35)). В ячейки B10 и C10 введём формулу = G6, так как в ячейке G6 находится значение P_5 . В ячейку D10 введём нулевое значение (см. формулу (36)). В ячейки E10:H10 введём следующие формулы: =1–C10 – в E10 (см. формулу (21)), =A3*E10 – в F10 (см. формулу (22)), =F10/B3 – в G10 (см. формулу (25)), = G10/C3 – в H10 (см. формулу (26)). Так как очереди нет, то среднее время ожидания в очереди $W = 0$ и в ячейку I10 введём нулевое значение (см. формулу (27)). Так как $W = 0$, то в ячейку J10 введём формулу =1/B3 (см. формулу (28)). Так как $N = 0$, то в ячейку K10 введём формулу = G10 (см. формулу (29)). В табл. 2 результаты округлены до двух знаков после запятой.

Таблица 2 / Table 2

Стационарные характеристики для СМО с отказами / Stationary characteristics for queueing systems with failures

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Таблица 2										
9	$P_{оч}$	π	$P_{отк}$	N	Q	A	$\bar{k}$	$Q_{зан}$	W	V	L
10	0	0,08	0,08	0	0,92	2,93	2,40	0,48	0	0,82	2,40

Источник: составлено автором.

4. СМО с очередью

Множеством состояний в системе $M|M|n|m$ будет $S = \{0, 1, \dots, n, \dots, n + m\}$. Граф состояний такой системы имеет вид (6). Так как $\lambda_{i,i-1} = i\mu$ при $1 \leq i \leq n$ и $\lambda_{i,i-1} = n\mu$ при $n + 1 \leq i \leq n + m$, то в этом типе СМО система (20) имеет вид (γ определяется по формуле (14)):

$$\begin{cases} P_i = \frac{\rho}{i} P_{i-1}, \text{ если } 1 \leq i \leq n, \\ P_i = \gamma P_{i-1}, \text{ если } n + 1 \leq i \leq n + m. \\ \sum_i P_i = 1. \end{cases} \tag{38}$$

Из системы (38) следует, что

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n. \quad (39)$$

$$P_i = \frac{\rho^n}{n!} \gamma^{i-n} P_0, \text{ где } i = n + 1, \dots, n + m. \quad (40)$$

Подставляя эти выражения в третью формулу системы (38), получим, что

$$P_0 \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{n+m} \gamma^{i-n} = 1. \quad (41)$$

Второе слагаемое в формуле (41) равно сумме вероятностей состояний, в которых есть очередь и, следовательно, равно вероятности наличия в системе очереди $P_{оч}$. Из формул (39)–(41) следует, что

$$P_0 = S^{-1}, \text{ где } S = \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{n+m} \gamma^{i-n}, \quad (42)$$

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} S^{-1}, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n, \quad (43)$$

$$P_i = \frac{\rho^n \gamma^{i-n}}{n!} S^{-1}, \text{ где } i = n + 1, \dots, n + m, \quad (44)$$

$$P_{оч} = S^{-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{n+m} \gamma^{i-n}. \quad (45)$$

Все приборы заняты в состоянии n и в состояниях, в которых есть очередь. Для вероятности занятости всех приборов π получим формулу:

$$\pi = P_n + P_{оч}. \quad (46)$$

Приведём формулы для вероятности отказа $P_{отк}$ и средней длины очереди N . Требование получит отказ, если все приборы и все места ожидания заняты, а этому соответствует состояние $n + m$. Итак,

$$P_{отк} = P_{n+m}. \quad (47)$$

В состоянии $i \in [0, n]$ очередь пуста, а в состоянии $i \in [n + 1, n + m]$ длина очереди равна $i - n$. Если ввести признак наличия очереди r_i по формуле

$$r_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leq n, \\ 1, & \text{если } i > n, \end{cases} \quad (48)$$

то в любом состоянии i длину очереди q_i можно найти по формуле

$$q_i = r_i(i - n). \quad (49)$$

Отсюда получим формулу для средней длины очереди:

$$N = \sum_{i=0}^{n+m} q_i P_i. \quad (50)$$

Пусть $\lambda = 1,624$, $\mu = 0,468$, $n = 5$ и $m = 3$. В Excel добавим новый лист для этого типа СМО (Лист2). Заполним следующую таблицу (см. табл. 3). В ячейке A1 приведено название таблицы. В ячейках A2:F2 приведены обозначения λ , μ , n , m , ρ и γ . В ячейки A3:D3 введём исходные данные λ , μ , n и m . Для вычисления

значений ρ и γ в ячейки E3 и F3 введём формулы $=A3/B3$ и $=E3/C3$. В ячейке A4 находится обозначение i для состояний системы. В ячейках B4:J4 расположены сами состояния системы (их можно ввести, используя автозаполнение). В ячейке A5 находится обозначение r_i , а в ячейках B5:J5 вычисляются значения r_i по формуле (48). Для этого в ячейку B5 введём формулу $=ЕСЛИ(B4>\$C\$3;1;0)$ и скопируем эту формулу для ячеек C5:J5. В ячейке K5 находится обозначение суммы S из формулы (42), в ячейке A6 приведено обозначение s_i для её слагаемых, а в ячейках B6:J6 вычисляются сами значения этих слагаемых. Для этого в ячейку B6 введём значение, равное единице. В ячейку C6 введём формулу $=B6*ЕСЛИ(C5=0;\$E\$3/C4;\$F\$3)$ и скопируем эту формулу для ячеек D6:J6. В ячейке K6 с помощью кнопки Σ найдём сумму значений ячеек B6:J6. В ячейке A7 приведено обозначение вероятности состояния P_i . В ячейках B7:J7 получим предельные вероятности состояний. Для этого в ячейку B7 введём формулу $=B6/\$K\6 и скопируем эту формулу для всех ячеек C7:J7. Если формулу в ячейке K6 скопировать в ячейку K7, то получим сумму предельных вероятностей состояний, т. е. единицу. В ячейке A8 находится обозначение длины очереди q_i в состоянии i . В ячейках B8:J8 вычисляются сами значения длины очереди для всех состояний системы. Для этого введём в ячейку B8 формулу $=B5*(B4-\$C\$3)$ (см. формулу (49)) и скопируем эту формулу для всех ячеек C8:J8. В табл. 3 результаты всех вычислений округлены до трёх знаков после запятой.

Таблица 3 / Table 3

Предельные вероятности состояний для СМО с очередью / Limiting probabilities of states for queuing systems with a queue

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Таблица 1										
2	λ	μ	n	m	ρ	γ					
3	1,624	0,468	5	3	3,470	0,694					
4	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
5	r_i	0	0	0	0	0	0	1	1	1	S
6	s_i	1	3,47	6,021	6,964	6,042	4,193	2,910	2,020	1,402	34,021
7	P_i	0,029	0,102	0,177	0,205	0,178	0,123	0,086	0,059	0,041	1
8	q_i	0	0	0	0	0	0	1	2	3	

Источник: составлено автором.

В Excel заполним новую таблицу (см. табл. 4). В ячейке A10 приведено название таблицы. В ячейках A11:K11 приведены обозначения характеристик. В ячейках A12:K12 вычисляются их значения. Для вычисления вероятности $P_{оч}$ в ячейку A12 введём формулу $=СУММПРОИЗВ(B5:J5;B7:J7)$ (см. формулу (45)). Вероятность занятости всех приборов π находим по формуле (46) $\pi = P_n + P_{оч}$. Так как $n = 5$, а значение P_5 находится в ячейке G7, то в ячейку B12 введём формулу $=G7+A12$. На основании формулы (47) $P_{отк} = P_{n+m}$. Так как $n = 5$ и

$m=3$, а значение P_8 находится в ячейке J7, то в ячейку C12 введём формулу $=J7$. Среднюю длину очереди найдём по формуле (50). Для этого в ячейку D12 введём формулу $=\text{СУММПРОИЗВ}(B8:J8;B7:J7)$. Вычисление остальных характеристик аналогично их вычислению для СМО типа $M|M|n|0$ на основании формул (21)–(29). В ячейки E12:K12 введём следующие формулы: в ячейку E12 – формулу $=1-C12$ (см. формулу (21)), в ячейку F12 – формулу $=A3*E12$ (см. формулу (22)), в ячейку G12 – формулу $=F12/B3$ (см. формулу (25)), в ячейку H12 – формулу $=G12/C3$ (см. формулу (26)), в ячейку I12 – формулу $=D12/F12$ (см. формулу (27)), в ячейку J12 – формулу $=I12+1/B3$ (см. формулу (28)), в ячейку K12 – формулу $=D12+G12$ (см. формулу (29)). Результаты округлены до двух знаков после запятой.

Таблица 4 / Table 4

Стационарные характеристики для СМО с очередью / Stationary characteristics for queuing systems with a queue

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
10	Таблица 2										
11	$P_{\text{оч}}$	π	$P_{\text{отк}}$	N	Q	A	$\bar{k}$	$Q_{\text{зан}}$	W	V	L
12	0,19	0,31	0,04	0,33	0,96	1,56	3,33	0,67	0,21	2,35	3,65

Источник: составлено автором.

5. СМО с неограниченной очередью

Множеством состояний системы $M|M|n|\infty$ будет $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, а граф состояний имеет вид (7). Для существования предельных вероятностей ставим условие (15): $\gamma < 1$. Так как $\lambda_{i,i-1} = i\mu$ при $1 \leq i \leq n$ и $\lambda_{i,i-1} = n\mu$ при $i \geq n+1$, то в этом типе СМО система (20) имеет вид:

$$\begin{cases} P_i = \frac{\rho}{i} P_{i-1} \text{ при } 1 \leq i \leq n, \\ P_i = \gamma P_{i-1} \text{ при } i \geq n+1, \\ \sum_i P_i = 1. \end{cases} \quad (51)$$

Из этой системы следует, что

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n. \quad (52)$$

$$P_i = \frac{\rho^n}{n!} \gamma^{i-n} P_0, \text{ где } i = n+1, n+2, \dots \quad (53)$$

Подставляя эти выражения в третью формулу системы (51), получим:

$$P_0 \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{\infty} \gamma^{i-n} = 1. \quad (54)$$

В данном соотношении второе слагаемое $P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{\infty} \gamma^{i-n}$ равно сумме вероятностей состояний, в которых есть очередь, и, следовательно, равно вероятности наличия в системе очереди $P_{\text{оч}}$. Так как по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \gamma^{i-n} = \frac{\gamma}{1-\gamma}, \quad (55)$$

а $P_0 \frac{\rho^n}{n!} = P_n$, то

$$P_{оч} = P_n \frac{\gamma}{1-\gamma}. \quad (56)$$

Все приборы заняты в состоянии n и во всех состояниях, в которых есть очередь. Следовательно, $\pi = P_n + P_{оч}$, а с учётом формулы (56),

$$\pi = \frac{P_n}{1-\gamma}. \quad (57)$$

Из формулы (54), с учётом формулы (55), следует, что

$$P_0 = S^{-1}, \text{ где } S = \sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n \gamma}{n!(1-\gamma)}. \quad (58)$$

Теперь мы можем записать формулы (52)–(53) в следующем виде:

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} S^{-1}, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n, \quad (59)$$

$$P_i = \frac{\rho^n \gamma^{i-n}}{n!} S^{-1}, \text{ где } i = n+1, \dots \quad (60)$$

В системах типа $M|M|n|\infty$

$$P_{отк} = 0, \quad (61)$$

так как число мест ожидания не ограничено и в случае занятости всех каналов требование становится в очередь. В системах типа $M|M|n|\infty$ в состоянии $i \in [0, n]$ очередь пуста, а в состоянии $i \in [n+1, +\infty)$ длина очереди равна $i - n$. Таким образом, средняя длины очереди N находится по формуле $N = \sum_{i=n+1}^{\infty} (i - n) P_i$. С учётом формул (52)–(53) эту формулу можно переписать в виде

$$N = P_n \gamma \sum_{i=n+1}^{\infty} (i - n) \gamma^{i-n-1}.$$

Но сумма последнего ряда является производной суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} (i - n) \gamma^{i-n-1} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \gamma^{i-n} \right)' = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)' = \frac{1}{(1-\gamma)^2}.$$

Таким образом, с учётом формулы (52),

$$N = \frac{P_n \gamma}{(1-\gamma)^2}. \quad (62)$$

Пусть $n=5$, $\lambda=2,9412$ и $\mu=0,7513$. В Excel добавим новый лист для этого типа СМО (Лист3). Заполним следующую таблицу (см. табл. 5). В ячейке A1 приведено название таблицы. В ячейках A2:E2 приведены обозначения λ , μ , n , ρ и γ . В ячейки A3:C3 введём исходные данные λ , μ и n . Для вычисления значений ρ и γ в ячейки D3 и E3 введём формулы $=A3/B3$ и $=D3/C3$. В ячейке

А4 находится обозначение i для состояний системы. В ячейках В4:G4 расположены состояния системы (их можно ввести, используя автозаполнение), в которых нет очереди. В ячейке Н4 находится обозначение $6 - \infty$ для всех состояний, в которых есть очередь, в ячейке I4 – обозначение суммы S в формуле (58), в ячейке А5 приведено обозначение s_i для её слагаемых. В ячейках В5:Н5 вычисляются сами значения этих слагаемых суммы S , причём в ячейке Н5 будет вычислено последнее слагаемое $\frac{\rho^n \gamma}{n!(1-\gamma)}$. Для этого в ячейку В5 введём значение, равное единице. В ячейку С5 введём формулу $=B5*\$D\$3/C4$ и скопируем эту формулу для ячеек D5:G5. В ячейку Н5, в которой вычисляется последнее слагаемое $\frac{\rho^n \gamma}{n!(1-\gamma)}$, введём формулу $=G5*E3/(1-E3)$, так как в ячейке G5 находится значение $\frac{\rho^n}{n!}$. В ячейке I5 с помощью кнопки Σ найдём сумму значений ячеек В5:Н5. В ячейке А6 приведено обозначение вероятности состояния P_i . В ячейках В6:G6 получим предельные вероятности состояний, в которых нет очереди, а в ячейке Н6 – сумму вероятностей состояний, в которых есть очередь, т. е. величину P_{oc} . Для этого в ячейку В6 введём формулу $=B5/I\$5$ и скопируем эту формулу для всех ячеек С6:Н6. Если формулу в ячейке I5 скопировать в ячейку I6, то получим сумму предельных вероятностей состояний, т. е. единицу. В табл. 5 результаты округлены до трёх знаков после запятой.

Таблица 5 / Table 5

Предельные вероятности состояний для СМО с неограниченной очередью / Limiting probabilities of states for queueing systems with an unlimited queue

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Таблица 1								
2	λ	μ	n	ρ	γ				
3	2,9412	0,7513	5	3,9148	0,7830				
4	i	0	1	2	3	4	5	$6 - \infty$	S
5	s_i	1	3,915	7,663	10,000	9,787	7,663	27,643	67,669
6	P_i	0,015	0,058	0,113	0,148	0,145	0,113	0,408	1

Источник: составлено автором.

В Excel заполним новую таблицу (см. табл. 6). В ячейке А8 приведено её название. В ячейках А9:K9 приведены обозначения. В ячейках А10:K10 вычисляются их значения. Так как $n = 5$, то $P_n = P_5$, а P_5 находится в ячейке G6. В ячейку А10 введём формулу $=G6*E3/(1-E3)$ (см. формулу (56)). Для вычисления вероятности π по формуле (57) в ячейку В10 введём формулу $=G6/(1-E3)$. В ячейку С10 введём нулевое значение (см. формулу (61)). Величину N вычислим по формуле (62). Для этого в ячейку D10 введём формулу $=G6*E3/(1-E3)^2$. Так как $P_{отк} = 0$, то $Q = 1$ (см. формулу (21)). В ячейку E10 введём значение, равное единице. Так как $Q = 1$, то $A = \lambda$ (см. формулу (22)), следовательно, в ячейку F10 введём формулу $=A3$. Вычисление остальных

характеристик аналогично их вычислению для СМО типа $M|M|n|0$. В ячейки G10:K10 введём следующие формулы: в ячейку G10 – формулу $=F10/B3$ (см. формулу (25)), в ячейку H10 – формулу $=G10/C3$ (см. формулу (26)), в ячейку I10 – формулу $=D10/F10$ (см. формулу (27)), в ячейку J10 – формулу $=I10+1/B3$ (см. формулу (28)), в ячейку K10 – формулу $=D10+G10$ (см. формулу (29)). Результаты округлены до двух знаков после запятой.

Таблица 6 / Table 6

Стационарные характеристики для СМО с неограниченной очередью / Stationary characteristics for queueing systems with an unlimited queue

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Таблица 2										
9	$P_{оч}$	π	$P_{отк}$	N	Q	A	$\bar{k}$	$Q_{зан}$	W	V	L
10	0,41	0,52	0	1,88	1	2,94	3,91	0,78	0,64	1,97	5,80

Источник: составлено автором.

Заключение

Вычислительные схемы для расчёта характеристик СМО, основанные на возможностях программы Excel, выглядят достаточно просто. При изучении теории массового обслуживания в условиях жёстко ограниченных временных рамок занятия могут быть организованы в компьютерных классах с использованием табличного процессора Excel.

Статья поступила в редакцию 11.03.2024

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.

2. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Советское радио, 1997. 520 с.

3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Юнити, 2002. 543 с.

4. Исследование операций в экономике / Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.; под ред. Н. Ш. Кремера. М.: Юрайт, 2021. 414 с.

5. Плескунов М. А. Теория массового обслуживания. Екатеринбург: Издательство Урал. ун-та, 2022. 264 с.

6. Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В. Теория массового обслуживания. Пенза: Издательство ПГУ, 2021. 224 с.

7. Олейникова С. А. Математическое моделирование и системы массового обслуживания. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. 90 с.

8. Хасанов А. С. Индивидуальные задания по линейной алгебре и линейному программированию. М.: ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2023. 48 с.

9. Напеденина Е. Ю., Никитина Н. И. К вопросу о культуре самообразовательной деятельности студентов системы дистанционного обучения // Ученые записки

Российского государственного социального университета. 2011. № 9-1 (97). С. 220–224.

10. Алгоритмический подход к преподаванию теории графов / Мушруб В. А., Макисенко М. Н., Выборнова И. И., Фадеева Л. Л. // *Инновации и инвестиции*. 2016. № 6. С. 202–208.
11. Макжанова Я. В., Зверева А. И., Хачко О. И. Сборник заданий по теме «Функция двух переменных». М.: Белый ветер, 2018. 38 с.

REFERENCES

1. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. *Vvedeniye v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to Queueing Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 336 p.
2. Saaty T. L. *Elementy teorii massovogo obsluzhivaniya i yeye prilozheniya* [Elements of Queueing Theory with Applications]. Moscow, Sovetskoye radio Publ., 1997. 520 p.
3. Kremer N. Sh. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Moscow, Yuniti Publ., 2002. 543 p.
4. Kremer N. Sh., Putko B. A., Trishin I. M., Fridman M. N. *Issledovaniye operatsiy v ekonomike* [Operations Research in Economics]. Moscow, Yurayt Publ., 2021. 414 p.
5. Pleskunov M. A. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Yekaterinburg, Ural University Publ., 2022. 264 p.
6. Cherusheva T. V., Zverovshchikova N. V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Penza, Penza State University Publ., 2021. 224 p.
7. Oleynikova S. A. *Matematicheskoye modelirovaniye i sistemy massovogo obsluzhivaniya* [Mathematical modeling and queueing systems]. Voronezh, Voronezh State Technical University Publ., 2021. 90 p.
8. Khasanov A. S. *Individual'nyye zadaniya po lineynoy algebre i lineynomu programmirovaniyu* [Individual assignments in linear algebra and linear programming]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2023. 48 p.
9. Napedenina Ye. Yu., Nikitina N. I. [On the issue of the culture of self-educational activities of students of the distance learning system]. In: *Uchenyye zapiski Rossiyskogo gosudarstvennogo sotsial'nogo universiteta* [Scientific Notes of the Russian State Social University], 2011, no. 9-1 (97), pp. 220–224.
10. Mushrub V. A., Makismenko M. N., Vybornova I. I., Fadeeva L. L. [Algorithmic approach to teaching graph theory]. In: *Innovatsii i investitsii* [Innovations and Investments], 2016, no. 6, pp. 202–208.
11. Makzhanova Ya. V., Zvereva A. I., Khachko O. I. *Sbornik zadaniy po teme «Funktsiya dvukh peremennykh»* [Collection of tasks on the topic “Function of two variables”]. Moscow, Belyy veter Publ., 2018. 38 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Расчёт характеристик систем массового обслуживания в компьютерных классах // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 2. С. 60–78.

DOI: 10.18384/2310-7251-2024-2-60-78

FOR CITATION

Khasanov A. S. Calculation of the queuing systems characteristics in computer classes. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2024, no. 2, pp. 60–78.

DOI: 10.18384/2310-7251-2024-2-60-78