

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-2-26-44

АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИИ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАДИУСА СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ВОДЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПРОЦЕССЕ ИХ ИСПАРЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ ТАКИХ КАПЕЛЬ

Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д.

Государственный университет просвещения

141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель: обобщить имеющиеся аналитические и численные результаты исследования нестационарного испарения капель воды с целью получения общей зависимости времени полного испарения капель от определяющих условий.

Процедура и методы. Применялось операционное исчисление, в частности интегральное преобразование Лапласа.

Результаты. Получено уравнение, позволяющее вычислять время полного испарения капель воды в широком диапазоне условий обтекания капель.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы существенны как при проведении фундаментальных исследований по нестационарному испарению капель в физико-химических лабораториях, так и при практическом использовании в ряде отраслей промышленности.

Ключевые слова: нестационарный процесс испарения, сферические капли воды, траектория скорости изменения радиуса, коэффициент поверхностного натяжения, коэффициенты скачков концентрации и температуры, время полного испарения

ANALYSIS OF THE TRAJECTORY OF THE RATE OF CHANGE OF THE RADIUS OF SPHERICAL WATER DROPLETS IN THE NON-STATIONARY PROCESS OF THEIR EVAPORATION AND CALCULATION OF THE LIFETIME OF SUCH DROPLETS

M. Kuznetsov, M. Kuzmin, Ju. Kuleshova

Federal State University of Education

ulitsa Very Voloshinoy 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract

Aim. The aim is to generalize the available analytical and numerical results of the study of non-stationary evaporation of water droplets in order to obtain a general dependence of the time of complete evaporation of droplets on the determining conditions.

Methodology. Operational calculus was used, in particular the Laplace integral transform.

Results. An equation has been obtained that allows one to calculate the time of complete evaporation of water droplets in a wide range of flow conditions around the droplets.

Research implications. The results of the work are significant both for conducting fundamental research on non-stationary evaporation of droplets in physical and chemical laboratories, and for practical use in a number of industries.

Keywords: non-stationary evaporation process, spherical water droplets, radius change rate trajectory, surface tension coefficient, concentration and temperature jump coefficients, complete evaporation time

Введение

Процессы испарения и конденсационного роста аэрозольных капель играют большую роль в жизни природы и в человеческой деятельности, и капельные аэрозоли находят широкое применение в науке и технике. Подтверждением сказанному служат, например, и публикации, появившиеся в недавнее время [1–7].

Характер протекания процессов испарения и конденсационного роста аэрозольных капель зависит от большого числа факторов. Поскольку, размер капель меняется в течение этих процессов, то эти процессы, строго говоря, не могут быть стационарными. К числу важнейших характеристик нестационарного процесса испарения аэрозольных капель относятся скорость изменения их размера и время полного испарения.

Существуют разные подходы к конструированию формул для описания скорости изменения радиуса испаряющихся аэрозольных капель сферической формы, начиная с подхода, предложенного Максвеллом [8]. Многие из них носят поправочный характер к уже существующим формулам. В предлагаемой статье при получении методом интегральных преобразований Лапласа [9] формул для скорости изменения радиуса аэрозольной капли в нестационарном процессе её испарения использованы довольно общие начальные и граничные условия, а также результаты работ [10; 11], в которых рассмотрены некоторые вопросы теории нестационарного испарения сферических капель с учётом коэффициентов скачков концентрации и температуры и коэффициента поверхностного натяжения вещества капли.

Как известно, интегральное преобразование Лапласа L устанавливает следующую связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$, где p – комплексный параметр:

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

С применением этого метода к построению теории нестационарного процесса испарения аэрозольных капель можно ознакомиться по работе [10].

1. Постановка задачи

Приведём основные уравнения, начальные и граничные условия задачи.

Рассмотрим нестационарный процесс испарения неподвижной сферической капли радиуса R , находящейся в двухкомпонентной парогазовой смеси. Первый

компонент в ней образован молекулами вещества капли, а второй компонент – молекулами так называемого несущего газа, причём, этот компонент не испытывает фазовый переход в рассматриваемом интервале температур. При этом концентрация пара у поверхности капли предполагается равной концентрации насыщенного пара при температуре её поверхности, и эта концентрация значительно меньше плотности вещества капли. Имеется в виду медленное испарение капли [12; 13].

Из выше сказанного следует, что рассматривается сферически симметричное испарение в диффузионном режиме [8; 12]. Можно выбрать сферическую систему координат с началом в центре капли. Независимыми переменными в уравнениях нашей задачи будут радиальная координата r и время t . Пусть распределение относительной концентрации пара $c_1(r, t)$ и температуры $T_e(r, t), T_i(r, t)$ соответственно парогазовой смеси и внутри капли удовлетворяют следующей системе уравнений с начальными и граничными условиями [10]:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c_1}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = a_e \left(\frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$c_1(r, t)|_{t=0} = c_{10}, \quad c_1(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = c_{1\infty} = c_{10}, \quad (4)$$

$$T_e(r, t)|_{t=0} = T_{0e}, \quad T_e(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = T_{\infty e} = T_{0e}, \quad (5)$$

$$Dnm_1q \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \left(-\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}. \quad (6)$$

В уравнения (1) – (3) соответственно входят: $D = nm_2D_{12}/\rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов парогазовой смеси; $n = n_1 + n_2$; n_1, m_1 и n_2, m_2 – концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно; ρ_e – плотность бинарной смеси; a_e, a_i – коэффициенты температуропроводности соответственно парогазовой смеси и вещества капли. Индексами «e» и «i» здесь и далее будем снабжать величины, характеризующие одно и то же свойство для областей, расположенных вне и внутри капли. В соотношении (6), выражающем условие непрерывности потока тепла через поверхность капли, через q обозначена удельная теплота испарения вещества капли, κ_e, κ_i – коэффициенты теплопроводности.

Введём ещё обозначения

$$c_{1s}(t) = c_1(T_s) = n_1(T_s)/n,$$

где $n_1(T_s)$ – концентрация насыщенных паров вещества капли при температуре её поверхности $T_s = T_s(t)$, далее положим

$$T_s(t)|_{t=0} = T_{s0}, c_{1s}(t)|_{t=0} = c_{1s0}. \quad (7)$$

Будем полагать, что температура капли $T_i(r, t)$ ($0 \leq r \leq R$) кроме уравнения (3) и граничного условия (6) удовлетворяет следующим начальному и граничному условиям:

$$T_i(r, t)|_{t=0} = T_{s0}, T_i(r, t)|_{r=R} = T_s(t). \quad (8)$$

Формулу, определяющую зависимость концентрации насыщенных паров над сферической поверхностью достаточно большой кривизны от коэффициента поверхностного натяжения, температуры поверхности капли и удельной теплоты испарения вещества капли, можно получить с использованием приближенного уравнения Томсона (Кельвина) и приближенного уравнения Клапейрона-Клаузиуса. Искомая формула получена в работе [11]:

$$c_{1s}(t) = \bar{c}_{1s0}(1 + k_\sigma/R)\{1 + k_q[T_s(t) - T_{s0}]\}. \quad (9)$$

В этой формуле и ниже черта над буквой c означает концентрацию насыщенных паров вещества капли на поверхности пренебрежимо малой кривизны при её температуре, то есть

$$\bar{c}_{1s0} = \bar{c}_{1s}(t)|_{t=0}, \bar{c}_{1s}(t) = c_1(T_s),$$

а через k_σ, k_q обозначены выражения:

$$k_\sigma = \frac{2m_1\sigma}{kT_{s0}\rho_i}, k_q = \frac{qm_1 - kT_{s0}}{kT_{s0}^2},$$

в которые входят величины: σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ_i – плотность вещества капли, k – постоянная Больцмана.

Отметим, что $c_{1s0} = \bar{c}_{1s0}(1 + k_\sigma/R)$. Из этой формулы и выражения для k_σ следует, что концентрация насыщенных паров над поверхностью сферической капли существенно зависит от отношения σ/R , поэтому важность учёта коэффициента поверхностного натяжения возрастает с увеличением кривизны её поверхности.

Учёт скачков концентрации и температуры на слое Кнудсена вблизи поверхности капли осуществим с помощью следующих граничных условий [12]:

$$[c_1(r, t) - c_{1s}(t)]|_{r=R} = \left(K_c^{(c)} \frac{\partial c_1}{\partial r} + K_c^{(T)} \frac{1}{T_{s0}} \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{|r=R}, \quad (10)$$

$$[T(r, t) - T_s(t)]|_{r=R} = \left(K_T^{(T)} \frac{\partial T}{\partial r} + K_T^{(c)} T_{s0} \frac{\partial c_1}{\partial r} \right)_{|r=R}, \quad (11)$$

Разности, расположенные в левых частях равенств (11), (12), называют соответственно скачками концентрации и температуры. Коэффициенты $K_c^{(c)}$, $K_c^{(T)}$, $K_T^{(T)}$, $K_T^{(c)}$ называют газокинетическими коэффициентами скачков концентрации и температуры.

При проведении анализа траектории скорости изменения радиуса испаряющихся капель воды в воздушную среду с использованием численных расчётов будем применять в настоящей статье выражения для коэффициентов скачков концентрации и температуры, приведённые в монографии [14], где они получены для случая бинарной газовой смеси обобщением подхода Лоялки, разработанного для однокомпонентного газа. При этом важно заметить, что коэффициенты $K_c^{(c)}, K_T^{(c)}$ зависят от коэффициента испарения α вещества капли, то есть с учётом скачков концентрации и температуры происходит учёт и коэффициента испарения. Отметим, что коэффициенты $K_c^{(T)}, K_T^{(T)}$ не зависят от α .

Соотношениями (1) – (11) определяются основные уравнения, начальные и граничные условия нашей задачи.

2. Приближенные формулы для скорости изменения радиуса аэрозольной капли при малых и больших значениях времени

Согласно работе [8] скорость нестационарного изменения радиуса аэрозольной капли сферической формы определяется формулой

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Dnm_1}{\rho_i} \frac{\partial c_1}{\partial r} |_{r=R}, \quad (12)$$

Поскольку мы применяем метод интегральных преобразований Лапласа, то

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} |_{r=R} = L^{-1} \left\{ \frac{\partial S}{\partial r} |_{r=R} \right\}, \quad S(r, p) = L\{c_1(r, t)\}. \quad (13)$$

Применяя преобразования Лапласа, мы учитываем, что рассматривается процесс медленного испарения капли, при этом масса капли значительно больше массы вещества, испарившегося с поверхности капли за время исследуемого процесса. В таком случае допустимо считать радиус капли постоянной величиной [15] при проведении некоторых выкладок. Выше зависимость R от t проявилась только в формуле (12). В реальном процессе испарения радиус капли изменяется со временем и $dR/dt < 0$.

Выражения $S(r, p)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) |_{r=R}$ в пространстве изображений имеют довольно громоздкую структуру. Способы их нахождения и получение приемлемых для отыскания оригиналов приближений производной $\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) |_{r=R}$ подробно рассмотрены в работе [10]. Из асимптотических приближений оригинала $\frac{\partial c_1}{\partial r} |_{r=R}$ при малых и больших значениях времени мы выберем следующие (зависящие явно от t):

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{01} \approx \frac{\varepsilon^{(T)} Dnm_1}{\rho_i \Delta_K} \left[1 - 2 \left(A_1 + \frac{\sqrt{a_i}}{\kappa_i} A_2 \right) \sqrt{\frac{t}{\pi}} \right] (t \rightarrow 0), \quad (14)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\infty 2} \approx \frac{\varepsilon_{CT} Dnm_1 \kappa_e}{\rho_i B_0} \left(1 + \frac{g_1}{B_1 \sqrt{\pi t}} \right) (t \rightarrow \infty), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(T)} &= \varepsilon_c K_T^{(T)} - \frac{\varepsilon_T K_c^{(T)}}{T_{s0}}, \quad \varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0} k_q \varepsilon_T, \\ \varepsilon_c &= c_{10} - \bar{c}_{1s0} (1 + k_\sigma / R), \quad \varepsilon_T = T_{0e} - T_{s0}, \\ \Delta_K &= K_c^{(c)} K_T^{(T)} + K_c^{(T)} K_T^{(c)}, \quad B_0 = g_0 R + g_\chi, \\ g_0 &= k_{q\sigma} + \kappa_e, \quad g_1 = k_{q\sigma} \sqrt{D} + \kappa_e \sqrt{a_e}, \quad g_\chi = k_{q\sigma} \chi_T + \kappa_e \chi_c, \\ A_1 &= \frac{K_c^{(c)} \sqrt{a_e} + K_T^{(T)} \sqrt{D}}{\Delta_K} - \frac{\varepsilon_c \sqrt{a_e}}{\varepsilon^{(T)}}, \quad A_2 = \frac{g_\chi}{\Delta_K} - \frac{\varepsilon_{cT} \kappa_e}{\varepsilon^{(T)}}, \quad B_1 = B_0 \sqrt{D a_e} / R^2, \\ k_{q\sigma} &= \gamma k_q \bar{c}_{1s0} (1 + k_\sigma / R), \quad \gamma = D n m_1 q.\end{aligned}$$

Отметим, что величинами χ_c , χ_T , по существу, определяются скачки концентрации и температуры соответственно. Они называются составными коэффициентами скачков концентрации и температуры [10]. Учёт начальной разницы температур у поверхности капли, представленной в виде $\varepsilon_T = T_{0e} - T_{s0}$, разностью температур внешней и внутренней сторон слоя Кнудсена в начале процесса испарения, заслуживает отдельного рассмотрения, в этой статье мы полагаем, что $\varepsilon_T = T_{0e} - T_{s0} = 0$. Таким образом, выражениями

$$f_1(R, t) = \frac{\varepsilon_c D n m_1 K_T^{(T)}}{\rho_i \Delta_K} \left[1 - 2 \left(A_1 + \frac{\sqrt{a_i}}{\kappa_i} A_2 \right) \sqrt{\frac{t}{\pi}} \right] (t \rightarrow 0), \quad (16)$$

$$f_2(R, t) = \frac{\varepsilon_c D n m_1 \kappa_e}{\rho_i B_0} \left(1 + \frac{g_1}{B_1 \sqrt{\pi t}} \right) (t \rightarrow \infty), \quad (17)$$

имеющими место соответственно для малых и больших значений времени можно достаточно полно описать процесс нестационарного испарения аэрозольных капель сферической формы, поскольку они включают в себя все физические величины, заложенные в начальных и граничных условиях задачи. Скажем ещё раз, что мы рассматриваем процесс медленного испарения капли, поэтому в этих выражениях можно считать, что только радиус капли зависит от времени t . Функциями (16) и (17) будет определяться траектория изменения радиуса нестационарно испаряющейся аэрозольной капли.

Для проведения численного анализа траекторий будем рассматривать нестационарный процесс испарения одиночных капель воды разных размеров в воздушную среду 50% влажности (наиболее реальный случай) при двух значениях температуры среды 293 К, 323 К, когда давление в ней $P = 0,1$ МПа. При этом следует обратить внимание на значения коэффициента испарения воды α при указанных выше температурах. Полагаем их равными соответственно 0,034 и 0,026. При этом мы основываемся на данных, приведённых в книге [16], которые согласуются с результатами более поздних исследований зависимости коэффициента испарения некоторых веществ от температуры, проведённых методом молекулярной динамики [17]. Для

большинства используемых в статье физических величин используем значения, приведённые в справочнике¹.

Введём в рассмотрение ещё выражения

$$f_0(R) = \frac{\varepsilon_c D n m_1 k_T^{(T)}}{\rho_i \Delta_K}, \quad (18)$$

$$f_3(R) = \frac{\varepsilon_c D n m_1 \kappa_e}{\rho_i B_0}, \quad (19)$$

которые переменную t в явном виде не содержат.

3. Анализ выражений, определяющих траекторию изменения радиуса сферических капель воды

Основу исследуемого нами нестационарного процесса составляет диффузионный режим испарения, следовательно, необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_c = c_{10} - \bar{c}_{1s0}(1 + k_\sigma/R) < 0. \quad (20)$$

Отрицательная величина (20), определяемая разностью концентраций и связанная с учётом коэффициента поверхностного натяжения вещества капли, входит в явном виде в выражения (18), (19), следовательно, и в выражения (16), (17). Уже по строению выражения (20) получаем подтверждение о зависимости всех выражений (16) – (19) от радиуса капли R . Очевидно, что отрицательная величина ε_c убывает с уменьшением радиуса капли. Поскольку в выражении (18) все другие величины кроме ε_c не зависят от R , то с уменьшением радиуса капли R отрицательная функция $f_0(R)$ будет убывать (хотя весьма медленно).

Учёт коэффициента поверхностного натяжения вещества капли проявляется в значениях выражений (16), (17), (19) и через величины $A_2, B_0, g_1/B_1$ в виде $k_{q\sigma} = \gamma k_q \bar{c}_{1s0}(1 + k_\sigma/R)$. Значит, эти величины зависят и от радиуса капли.

Во избежание превосходящего влияния коэффициента поверхностного натяжения на рассматриваемый процесс испарения в диффузионном режиме приходится ввести ограничение $\bar{c}_{1s0} k_\sigma / R < |c_{10} - \bar{c}_{1s0}|$. Отсюда при температуре среды, равной 293 К или 323 К, когда $c_{10} = \bar{c}_{1s0}/2$, получаем $R > 2k_\sigma$. Так как $k_\sigma \sim 10^{-9}$ (м), то мы будем рассматривать сферические капли воды, начальный радиус которых $R_0 \geq 10^{-8}$ м.

Рассмотрим подробнее выражение (16). В нём величина A_1 не зависит от R . Поскольку

$$A_1 \sim \frac{\sqrt{a_i}}{\kappa_i} A_2 \cdot 10^2, \quad (21)$$

то возрастание положительной величины

$$A_1 + \frac{\sqrt{a_i}}{\kappa_i} A_2 \quad (22)$$

¹ Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 721 с.

при уменьшении радиуса испаряющейся капли происходит весьма медленно. Это возрастание лишь в малой степени компенсирует уменьшение коэффициента ε_c . Попутно заметим, что в выражение (22) входит коэффициент теплопроводности k_i вещества капли, но его влияние на значение этого выражения не существенно в случае водяных капель в силу уже упомянутого соотношения (21).

В отличие от выражений (16), (18), имеющих место для малых значений времени, выражения (17), (19), записанные для больших значений времени, имеют более тесную связь с радиусом капли. В выражении (19) зависимой от R величиной является отношение ε_c/B_0 . Это отношение, принимающее только отрицательные значения, убывает с уменьшением радиуса испаряющейся капли, причём $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_c}{B_0} = -\frac{1}{\gamma k_q \chi T}$, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow 0} f_3(R) = -\frac{\kappa_e}{q k_q \rho_i \chi T}. \quad (23)$$

Последнее выражение достаточно отчётливо показывает важность учёта определённых факторов, влияющих на ход процесса испарения до самого его конца. Следует отметить при этом значительную роль коэффициента теплопроводности среды κ_e .

Наиболее существенную зависимость от R испытывает величина, определяемая отношением g_1/B_1 , имеющим довольно сложное строение:

$$\frac{g_1}{B_1} = \frac{R^2[(\gamma_{qc}/\sqrt{a_e} + \kappa_e/\sqrt{D})R + \gamma_{qc}k_\sigma/\sqrt{a_e}]}{(\gamma_{qc} + \kappa_e)R^2 + [\gamma_{qc}(k_\sigma + \chi T) + \kappa_e\chi c]R + \gamma_{qc}k_\sigma\chi T}, \quad (24)$$

где $\gamma_{qc} = \gamma k_q \bar{c}_{1s0}$. Очевидно, что $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{g_1}{B_1} = 0$.

В рассматриваемом нестационарном процессе испарения капель с учётом скачков концентрации и температуры влияние этого фактора на ход процесса на его разных этапах проявляется по-разному. Появление выражений (16) и (18), записанных для малых значений времени, немыслимо без учёта скачков концентрации и температуры вблизи поверхности капли. С течением времени влияние указанного фактора проявляется посредством величины $B_0 = g_0R + g_\chi$, в которой второе слагаемое представляет собой линейную комбинацию составных коэффициентов скачков концентрации и температуры. Величина B_0 является важным структурным элементом выражений (17), (19). Интересующий нас эффект от учёта коэффициентов скачков концентрации и температуры в рассматриваемом процессе будет определяться соотношением между двумя слагаемыми в выражении B_0 , зависящем от размера испаряющихся капель. Для начального радиуса $R_0 = 10^{-8}$ м в зависимости от температуры среды, равной 293 К и 323 К, значения второго слагаемого в процентах по отношению ко всей величине B_0 составляют 99,32% и 98,92% соответственно. Если брать капли больших размеров, то процентное соотношение между значениями слагаемых выражения B_0 меняется

естественно в пользу $g_0 R$. Для него при $R_0 = 10^{-5}$ м в зависимости от температуры среды 293 К и 323 К соответственно имеем 84,55% и 91,10%. Говоря о крупных каплях [14], следует особо выделить капли с начальным радиусом $R_0 = 10^{-4}$ м, поскольку для них процентное содержание величины g_χ в B_0 при тех же значениях температуры среды составляет всего 1,70% и 1,07%. Тем не менее капли с таким начальным радиусом не исключаем из рассмотрения (они будут пограничными) по той причине, что с уменьшением размера испаряющейся капли влияние учёта коэффициентов скачков концентрации и температуры на процесс увеличивается, становясь более стабильным в конце процесса испарения, о чём можно судить по предельному выражению (23).

Рассматривая зависимость выражений (16) и (17) от времени t в явном виде, отметим, что в выражении (16) значения t ограничены условием отрицательности этого выражения, а выражение (17) станет неопределённым при достаточно малых значениях t .

В итоге можно сказать, что выражения (16) – (19) заметно отличаются по их структуре. Функционально этими выражениями можно определять скорости уменьшения радиуса нестационарно испаряющихся капель соответственно при малых и больших значениях времени. Из-за невозможности определить точной границы между малыми и большими значениями времени для выяснения вопроса о том, каков вклад каждого из этих выражений в общее время жизни испаряющихся капель приходится прибегнуть к численному анализу результатов.

Рассматривая равенство

$$\frac{dR}{dt} = f_1(R, t) \quad (25)$$

как обыкновенное дифференциальное уравнение в некоторой окрестности точки $(0, R_0)$, где R_0 – начальный радиус испаряющейся капли, можно получить его решение $R = R(R_0, t)$. Продолжив это решение, можно найти значение $R_1 = R(R_0, t)|_{t=t_1}$. При $R_0 = 10^{-6}$ м и температуре среды 293 К, положив $t_1 = 14,0825 \cdot 10^{-8}$ с (выбор такого значения времени выяснится чуть позже), находим значение $R_1 = 0,9999955 \cdot 10^{-6}$ м, то есть $R_1 \approx R_0$. Заметим, что если вместо (25) использовать равенство $dR/dt = f_0(R)$, то при аналогичной процедуре получим значение $R_1 = 0,9999936 \cdot 10^{-6}$ м, которое несколько меньше вышеполученного, исходя из уравнения (25), значения R_1 .

Подтверждение того факта, что за некоторый промежуток времени от 0 до t_1 с не происходит заметного уменьшения начального радиуса $R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]$ нестационарно испаряющейся капли при температуре среды в пределах от 293 К до 323 К, можно получить, используя найденные в статье [18] результаты о времени полного испарения капли $\theta(R_0)$, ибо $5 \cdot 10^{-7} \ll \theta(R_0) \forall R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]$.

Траекторию скорости изменения радиуса капли на начальном этапе нестационарного процесса испарения можно описать функцией

$z = f_1[R(t), t]$, где t принимает «малые» значения. Если же за промежутков времени $[0, t_1]$ не происходит заметного уменьшения начального радиуса $R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]$ нестационарно испаряющейся капли, то представление о геометрической картине этой траектории можно получить по графику G_1 функции $z = f_1(R_0, t)$, где $t \in [0, t_1]$. Для этой функции имеем $df_1(R_0, t)/dt > 0$, $d^2f_1(R_0, t)/dt^2 < 0$, следовательно, она возрастает и выпукла на рассматриваемом промежутке. В декартовой системе координат (t, z) ось ординат служит касательной к графику G_1 этой функции в точке $M_0 [0, f_0(R_0)]$.

В силу неопределённости границы между малыми и большими значениями времени для установления связи между частями траектории скорости изменения радиуса капли, отвечающими малым и большим значениям времени, на промежутках незначительного уменьшения начального радиуса капли введём в рассмотрение ещё графики G_2, G_3 соответственно функций $z = f_2(R_0, t)$, $z = f_3(R_0)$. Кривые G_1 и G_2 имеют две точки пересечения, то есть $G_1 \cap G_2 = \{M_1, M_2\}$. При $R_0 = 10^{-6} \text{ м}$ и температуре среды $T_e = 293 \text{ К}$ имеем $M_1(0,4859 \cdot 10^{-8}; -0,4172 \cdot 10^{-4})$, $M_2(9,3378 \cdot 10^{-8}; -0,2874 \cdot 10^{-4})$. Кривая G_1 и прямая G_3 пересекаются в одной точке, которая при $R_0 = 10^{-6} \text{ м}$ и $T_e = 293 \text{ К}$ имеет координаты $M_3(14,0825 \cdot 10^{-8}; -0,2491 \cdot 10^{-4})$. Отметим, что первая координата точки M_3 была использована выше для определения промежутка $[0, t_1]$, на котором уменьшение начального радиуса $R_0 = 10^{-6} \text{ м}$ пренебрежимо мало. Интересующие нас фрагменты линий G_1, G_2 и G_3 представим на рис. 1, используя полученные координаты точек M_0, M_1, M_2, M_3 при $R_0 = 10^{-6} \text{ м}$ и $T_e = 293 \text{ К}$.

Траекторию скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся капли на заключительном этапе рассматриваемого процесса можно определить функцией

$$z = f_2[R(t), t], \quad (26)$$

где t принадлежит некоторому промежутку больших значений времени, заканчивающемуся временем полного испарения капли, обозначим его через $[t_2, \theta]$. Легко выяснить, что в промежутке малого изменения $R_2 = R(t)|_{t=t_2}$ функция $f_2(R_2, t)$ возрастает и выпукла вверх. Часть информации о геометрической форме траектории (26) можно получить по виду явной зависимости функции $f_2(R_2, t)$ от времени t , а часть по поведению этой функции и составляющих её выражений при изменении радиуса капли от R_2 до нуля в процессе испарения. При этом важно выяснить, каково соотношение между графиками функций (26) и $z = f_3[R(t)]$, когда $t \in [t_2, \theta]$. В случае незначительного расхождения между ними на промежутке $[t_3, \theta]$ существенного уменьшения радиуса испаряющейся капли для вычисления времени жизни капли было бы допустимым использовать только довольно простое для интегрирования дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{dt} = f_3(R). \quad (27)$$

Отличие между функциями $f_2[R(t), t]$ и $f_3(R)$ определяется величиной $g_1/B_1\sqrt{\pi t}$, где выражение g_1/B_1 имеет вид (24).

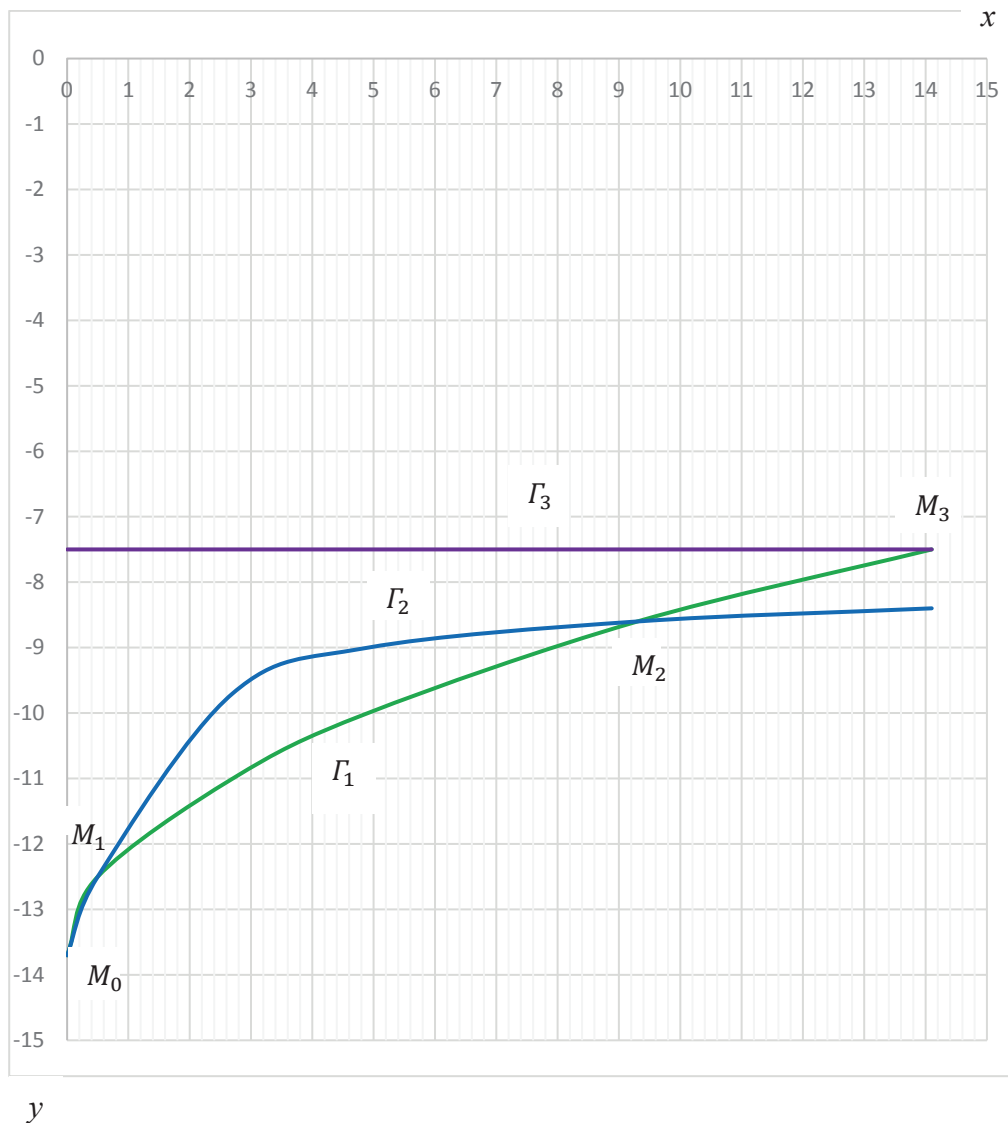


Рис. 1 / Fig. 1. Графики функций, являющихся приближениями траектории скорости изменения радиуса нестационарного испаряющейся капли на начальном этапе этого процесса / Graphs of functions that are approximations of the trajectory of the rate of change of the radius of a non-stationary evaporating droplet at the initial stage of this process

Источник: по данным авторов

Характер изменения величины g_1/B_1 с уменьшением радиуса испаряющейся капли можно выяснить, используя численные значения входящих в её выражение физических величин. При $T_e = 293$ К и $T_e = 323$ К имеем соответственно дроби:

$$\frac{g_1}{B_1|_{T_e=293\text{ K}}} = \frac{2,1292 \cdot 10^2 R + 1,6766 \cdot 10^{-7}}{1 + 1,5552 \cdot 10^{-6} R^{-1} + 1,6068 \cdot 10^{-16} R^{-2}}$$

$$\frac{g_1}{B_1|_{T_e=323\text{ K}}} = \frac{2,0640 \cdot 10^2 R + 1,7516 \cdot 10^{-7}}{1 + 0,9768 \cdot 10^{-6} R^{-1} + 1,9465 \cdot 10^{-16} R^{-2}}$$

Поскольку слагаемые и в числителе, и в знаменателе рассматриваемых дробей расположены в порядке убывания показателей степени R , то с уменьшением радиуса испаряющейся капли значимость этих слагаемых в определении величины g_1/B_1 перемещается от отношения первых слагаемых к отношению последних, то есть при $T_e = 293\text{ K}$ и $T_e = 323\text{ K}$ соответственно к отношениям

$$\frac{1,6766 \cdot 10^{-7}}{1,6068 \cdot 10^{-16} R^{-2}}, \quad \frac{1,7516 \cdot 10^{-7}}{1,9465 \cdot 10^{-16} R^{-2}}$$

из которых следует, что при достаточно малых размерах испаряющейся капли убывание её радиуса на порядок приводит к уменьшению величины g_1/B_1 на два порядка.

Найдём значение времени, при котором относительная погрешность замены траектории (26) на $z = f_3[R(t)]$ равна отношению этого значения времени ко времени полного испарения рассматриваемой капли, то есть

$$\frac{f_2[R(t), t] - f_3[R(t)]}{f_2[R(t), t]} = \frac{t}{\theta}. \quad (28)$$

Это равенство приводит к уравнению

$$B_1 \sqrt{\pi} x^3 + g_1 x^2 - g_1 \theta = 0, \quad (29)$$

где $x = \sqrt{t}$. Интересующий нас единственный положительный корень алгебраического уравнения (29) будем обозначать через $\sqrt{t_3}$. Положив $R = 10^{-4}\text{ м}$ при $T_e = 293\text{ K}$ и $T_e = 323\text{ K}$, находим соответственно значения $\sqrt{t_3}$: 0,9827; 0,7887. При этих значениях времени получаем соответствующие значения выражения $g_1/B_1 \sqrt{\pi t_3}$: 0,0120 и 0,0146, которые намного меньше единицы. Относительная погрешность (28) при этих значениях соответственно равна: 1,19% и 1,44%. С уменьшением радиуса испаряющейся капли относительная погрешность (28) уменьшается, при этом график функции (26) всё более тесно будет приближаться к графику заметно простой по строению функции $z = f_3[R(t)]$. Этому способствуют как указанные выше свойства величины g_1/B_1 , так и вид зависимости выражения $g_1/B_1 \sqrt{\pi t}$ от времени t . Отметим, что при $R = 10^{-5}\text{ м}$ и $T_e = 293\text{ K}$ относительная погрешность (18) равна 0,41% и значение выражения $g_1/B_1 \sqrt{\pi t_3}$ намного меньше единицы, оно приблизительно равно 0,0041.

Приведённые доводы убеждают нас в том, что в области существенного уменьшения радиуса испаряющейся капли замена выражения $f_2[R, t]$ на выражение $f_3(R)$ действительно не приведёт к большим ошибкам

при вычислении времени полного испарения капли. После получения решения дифференциального уравнения (27) в области больших значений времени, возникает вопрос о правомерности расширения этого решения на малые значения времени, так как $f_3(R)$ является конечным предельным выражением $f_2[R, t]$, то есть $f_3(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_2[R, t]$, и ещё имеет место отличие значений $f_3(R_0)$ и $f_0(R_0)$, а именно,

$$f_0(R_0) < f_3(R_0) \forall R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}], \quad (30)$$

причём отличие более заметно для крупных капель. Это видно из соотношений

$$\frac{f_0(R_0)}{f_3(R_0)} = \frac{K_T^{(T)}}{\Delta_K} \cdot \frac{\kappa_e}{B_0}$$

с участием выражения B_0 , зависящего от радиуса капли в виде его слагаемого $g_0 R$. Отличие достигает почти до двух порядков величин для капель с радиусом $R_0 = 10^{-4}$ м. Рассматриваемое отличие имеет место только в самом начале процесса испарения. Начиная с нулевого значения времени, как показано выше, траектория $z = f_1[R(t), t]$ круто идёт вверх (см. рис. 1) и при значении времени $t_1 \ll \theta$ графика функции $z = f_3[R(t)]$. Выражение $f_3(R)$ таково, что его значения убывают с уменьшением радиуса испаряющейся капли. В чём легко убедиться, рассматривая представление с использованием численных значений составляющих это выражение физических величин, не зависящих от R . При значениях температуры среды $T_e = 293$ К и $T_e = 323$ К соответственно имеем:

$$f_3(R)|_{T_e=293 \text{ К}} = - \frac{0,6350 \cdot 10^{-10}}{R + 15,5305 \cdot 10^{-7} - 31,9608 \cdot 10^{-16} / (R + 2,1614 \cdot 10^{-9})}, \quad (31)$$

$$f_3(R)|_{T_e=323 \text{ К}} = - \frac{1,1809 \cdot 10^{-10}}{R + 9,7569 \cdot 10^{-7} - 16,0279 \cdot 10^{-16} / (R + 1,8425 \cdot 10^{-9})}. \quad (32)$$

Очевидно, что с уменьшением радиуса капли знаменатели дробей (31) и (32) убывают, следовательно, абсолютные величины этих дробей возрастают. При этом важно отметить, что происходит рост скорости уменьшения размера капли. Легко найти скорости изменения радиуса капель воды в конце нестационарного процесса при указанных значениях температуры среды. Они определяются значениями:

$$\lim_{R \rightarrow 0} f_3(R)|_{T_e=293 \text{ К}} = -8,5418 \cdot 10^{-4} (\text{м/с}),$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} f_3(R)|_{T_e=323 \text{ К}} = -11,1775 \cdot 10^{-4} (\text{м/с}).$$

Так как эти предельные значения заметно меньше соответственно значений

$$\min\{f_0(R_0) \forall R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]\}_{|T_e=293 \text{ К}} = -0,5527 \cdot 10^{-4},$$

$$\min\{f_0(R_0) \forall R_0 \in [10^{-8} \text{ м}, 10^{-4} \text{ м}]\}_{|T_e=323 \text{ К}} = -1,8614 \cdot 10^{-4},$$

то можно сказать, что такое положение является определённой компенсацией положению (30). Заметим, что соотношение (30) есть частный случай более общего неравенства $f_1[R(t), t] < f_3[R(t)]$, где $t \in [0, t_1]$. Было установлено, что на отрезке $[0, t_1]$ уменьшение начального радиуса R_0 испаряющейся капли пренебрежимо мало. Этот факт и другие доводы, приведённые выше, говорят о том, что расширение решения дифференциального уравнения (27) на малые значения времени допустимо и использование такого решения приемлемо для вычисления времени полного испарения капли.

4. Формулы для вычисления времени полного испарения капель воды

Итак, для вычисления времени полного испарения сферических капель воды в исследуемом нестационарном процессе исходным будет соотношение

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon_c D n m_1 \kappa_e}{\rho_i B_0}, \quad (33)$$

в котором, полагаем, что только радиус капли R зависит от времени t . Отметим, что такое допустимо при медленном испарении сферических капель. Соотношение (33) будем рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с неизвестной функцией $R = R(t)$. Разделением переменных приведём его к виду

$$dt = \frac{q k_q \rho_i \bar{c}_{1s0}}{\kappa_e (c_{10} - \bar{c}_{1s0})} \cdot \frac{(1 + k_D) R^2 + (k_\sigma + \chi_T + k_D \chi_c) R + k_\sigma \chi_T}{R - c_{1\sigma}} dR, \quad (34)$$

$$\text{где } k_D = \frac{\kappa_e}{D n m_1 q k_q \bar{c}_{1s0}}, \quad c_{1\sigma} = \frac{\bar{c}_{1s0} k_\sigma}{c_{10} - \bar{c}_{1s0}}.$$

Проинтегрируем уравнение (34) при выполнении начального условия $R(t)_{t=0} = R_0$.

Используя численные значения физических величин, образующих выражение (34), получаем при $T_e = 293 \text{ K}$ и $T_e = 323 \text{ K}$ соответствующие формулы для вычисления времени жизни сферических капель воды

$$\theta_{|T_e=293 \text{ K}} = 7,8742 \cdot 10^9 [R_0^2 + 3,1061 \cdot 10^{-6} R_0 - 6,3922 \cdot 10^{-15} \ln(1 + 4,6266 \cdot 10^8 R_0)], \quad (35)$$

$$\theta_{|T_e=323 \text{ K}} = 4,2341 \cdot 10^9 [R_0^2 + 1,9514 \cdot 10^{-6} R_0 - 3,2056 \cdot 10^{-15} \ln(1 + 5,4283 \cdot 10^8 R_0)].$$

Вид выражений, расположенных в квадратных скобках формул (35), позволяет сделать определённые выводы о соотношении величин слагаемых в зависимости от начального радиуса капли. Здесь приемлема цитата из статьи [13, с. 770]: «В пределе больших капель наблюдается хорошо известная зависимость времени испарения капли от квадрата радиуса, а в пределе малых капель время испарения линейно зависит от начального радиуса». Выражения, находящиеся под знаком логарифмов, связаны с учётом коэффициента

поверхностного натяжения вещества капли, в нашем случае воды. По отношению численного значения последних выражений в квадратных скобках ко времени жизни капли можно оценить эффект учёта этого фактора. Для крупных и умеренно крупных [14] капель влияние указанного фактора на рассматриваемый процесс весьма незначительно, оно выражается сокращением времени полного высыхания капли меньше, чем на один процент. Для капель с начальным радиусом $R_0 = 10^{-7}$ м в пределах рассматриваемых нами температур среды сокращение времени жизни составляет порядка 5-6%, а при $R_0 = 10^{-8}$ м имеет место более существенное сокращение, примерно на треть.

Отметим, что значения времени полного испарения капель воды, вычисленные по формулам (35), хорошо согласуются как с результатами, полученными в статье [18] другим путём, отличным от предлагаемого в настоящей статье, так и результатами работы [13]. Приведём таблицу значений времени θ (в секундах) полного испарения сферических капель воды, вычисленных по формулам (35). Для сравнения в скобках укажем соответствующие результаты, полученные в статье [18].

Таблица 1/ Table 1

Значения времени полного испарения сферических капель воды / Values of the time of complete evaporation of spherical water droplets

$R_0, \text{ м}$	$T_e = 293 \text{ К}$	$T_e = 323 \text{ К}$
10^{-4}	81,187 (81,182)	43,167 (43,166)
10^{-5}	$10,316 \cdot 10^{-1}$ ($10,317 \cdot 10^{-1}$)	$5,059 \cdot 10^{-1}$ ($5,060 \cdot 10^{-1}$)
10^{-6}	$3,207 \cdot 10^{-2}$ ($3,204 \cdot 10^{-2}$)	$1,242 \cdot 10^{-2}$ ($1,242 \cdot 10^{-2}$)
10^{-7}	$2,374 \cdot 10^{-3}$ ($2,332 \cdot 10^{-3}$)	$0,826 \cdot 10^{-3}$ ($0,815 \cdot 10^{-3}$)
10^{-8}	$1,584 \cdot 10^{-4}$ ($1,586 \cdot 10^{-4}$)	$0,578 \cdot 10^{-4}$ ($0,578 \cdot 10^{-4}$)

Заключение

Проведённый анализ участков траектории скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся сферической капли воды при малых и больших значениях времени показал, что начальный этап траектории существенным образом определяется учётом коэффициентов скачков концентрации и температуры вблизи поверхности капли. Затем скорость изменения радиуса капли резко падает, и в пределах малых значений времени заметного уменьшения радиуса испаряющейся капли не происходит. На этапе перехода от малых значений времени к большим также не происходит существенного уменьшения радиуса капли, но с началом времени «больших» значений происходит сближение траекторий, описываемых нестационарным и квазистационарным выражениями. Продолжение этапа больших значений времени характеризуется существенным уменьшением радиуса испаряющейся капли вплоть до полного её высыхания. В конце процесса, то есть при $R \rightarrow 0$,

происходит совпадение предельных значений нестационарного и квазистационарного выражений.

Результаты проведённого анализа всевозможных этапов траектории скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся капли послужили достаточной аргументацией для того чтобы квазистационарное уравнение выбрать для получения формулы, позволяющей вычислить время жизни сферических капель воды в нестационарном процессе испарения с учётом коэффициента поверхностного натяжения вещества капли и коэффициентов скачков концентрации и температуры вблизи её поверхности.

Кроме того, в статье при исследовании характера скорости изменения радиуса капли на определённых этапах нестационарного процесса испарения выяснена степень важности учёта многих факторов. В результате анализа выражений, полученных для вычисления времени полного испарения капель дана оценка влияния фактора учёта поверхностного натяжения на время жизни капли в зависимости от её начального размера. Установлено, что учёт коэффициентов скачков концентрации и температуры имеет важное значение не только в начале, но и в продолжении, и до самого конца процесса (хотя в несколько ином виде).

Статья поступила в редакцию 17.04.2024

ЛИТЕРАТУРА

1. Прогностическая модель исследования процессов испарения капель воды / Антонов Д. В., Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Пискунов М. В. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 4. С. 936–944.
2. Антонов Д. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Математическое моделирование тепломассопереноса при движении капель жидкости в газовой среде в условиях их интенсивных фазовых превращений // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 5. С. 1093–1114.
3. Особенности методики экспериментального исследования процесса испарения подвешенных капель жидкости / Бочкарева Е. М., Лей М. К., Терехов В. В., Терехов В. И. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 5. С. 2208–2217.
4. Губайдуллин Д. А., Панин К. А., Федоров Ю. В. Акустика жидкости с покрытыми оболочкой каплями при наличии фазовых переходов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2022. № 4. С. 41–51. DOI: 10.31857/S056852812204003X.
5. Голубкина И. В., Осипцов А. Н. Волны уплотнения с частичной и полной дисперсией в газокapельной среде с фазовыми переходами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2022. № 3. С. 44–55. DOI: 10.31857/S0568528122030069.
6. Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды при движении через высокотемпературные газы // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 1. С. 104–111.

7. Экспериментальное и численное исследования нестационарного испарения капель жидкости / Терехов В. И., Терехов В. В., Шишкин Н. Е., Би К. Ч. // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 5. С. 829–836.
8. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Издательство АН СССР, 1958. 91 с.
9. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / пер. с нем. Г. А. Вольперта. М.: Наука, 1971. 288 с.
10. Кузьмин М. К., Яламов Ю. И. Теория нестационарных фазовых переходов и движения аэрозольных частиц в тепловых полях: монография. М.: МГОУ, 2007. 232 с.
11. Кузьмин М. К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны ее поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика – математика. 2012. № 3. С. 39–49.
12. Щукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. М.: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
13. Козырев А. В., Ситников А. Г. Испарение сферической капли в газе среднего давления // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 7. С. 765–774. DOI: 10.3367/UFGN.0171.200107c.0765.
14. Галоян В. С., Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
15. Nix N., Fukuta N. Nonsteady-state theory of droplet growth // The Journal of Chemical Physics. 1973. Vol. 58. Iss. 4. P. 1735–1740. DOI: 10.1063/1.1679418.
16. Амелин А. Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. М.: Химия, 1972. 293 с.
17. Zunjing W., Min C., Zengyuan G. Xi'an jiaotong daxue xuebao // Journal of Xi'an Jiaotong University. 2001. Vol. 35. No. 11. P. 1126–1130.
18. Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. О формуле, приемлемой для вычисления времени полного испарения как мелких, так и крупных сферических капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика – Математика. 2022. № 2. С. 56–69. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.

REFERENCES

1. Antonov D. V., Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Piskunov M. V. [Prognosis model for investigating the evaporation of water droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 4, pp. 936–944.
2. Antonov D. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Mathematical simulation of the heat and mass transfer in the movement of liquid droplets in a gas medium under the conditions of their intense phase transformations]. In: *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2020, vol. 93, no. 5, pp. 1093–1114.
3. Bochkareva Ye. M., Ley M. K., Terekhov V. V., Terekhov V. I. [Methodological characteristics of an experimental investigation of the process of evaporation of suspended liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 5, pp. 2208–2217.
4. Gubaydullin D. A., Panin K. A., Fedorov Yu. V. [Acoustics of a liquid with droplets covered by a shell in the presence of phase transitions]. In: *Izvestiya Rossiyskoy akademii*

- nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2022, no. 4, pp. 41–51. DOI: 10.31857/S056852812204003X.
5. Golubkina I. V., Osipov A. N. [Partly and fully dispersed compression waves in a gas-droplet mixture with phase transitions]. In: *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2022, no. 3, pp. 44–55. DOI: 10.31857/S0568528122030069.
 6. Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets moving through high-temperature gases]. In: *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2018, vol. 91, no. 1, pp. 104–111.
 7. Terekhov V. I., Terekhov V. V., Shishkin N. Ye., Bi K. Ch. [Heat and mass transfer in disperse and porous media experimental and numerical investigations of nonstationary evaporation of liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2010, vol. 83, no. 5, pp. 829–836.
 8. Fuks N. A. *Ispareniye i rost kapel v gazoobraznoy srede* [Evaporation and growth of droplets in a gaseous medium]. Moscow, USSR Academy of Sciences Publ., 1958. 91 p.
 9. Doetsch G. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation* (Russ. ed.: Volpert G. A., transl. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasya i Z-preobrazovaniya*. Moscow, Nauka publ., 1971. 288 p.).
 10. Kuzmin M. K., Yalamov Yu. I. *Teoriya nestatsionarnykh fazovykh perekhodov i dvizheniya aerol'nykh chastits v teplovykh pol'yakh* [Theory of non-stationary phase transitions and motion of aerosol particles in thermal fields]. Moscow, Moscow State Region University Publ., 2007. 232 p.
 11. Kuzmin M. K. [The theory of nonstationary evaporation of spherical aerosol drop in view of dependence of saturated steam pressure from curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika – matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.
 12. Shchukin Ye. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannyye voprosy fiziki aerolei* [Selected Topics in Aerosol Physics]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
 13. Kozyrev A. V., Sitnikov A. G. [Evaporation of a spherical droplet in a moderate-pressure gas]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2001, vol. 171, no. 7, pp. 765–774. DOI: 10.3367/UFNr.0171.200107c.0765.
 14. Galoyan V. S., Yalamov Yu. I. *Dinamika kapel v neodnorodnykh вязких средах* [Dynamics of drops in inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luys Publ., 1985. 208 p.
 15. Nix N., Fukuta N. Nonsteady-state theory of droplet growth. In: *The Journal of Chemical Physics*, 1973, vol. 58, iss. 4, pp. 1735–1740. DOI: 10.1063/1.1679418.
 16. Amelin A. G. *Teoreticheskiye osnovy obrazovaniya тумана при конденсации пара* [Theoretical Foundations of Fog Formation during Steam Condensation]. Moscow, Khimiya Publ., 1972. 293 p.
 17. Zunjing W., Min C., Zengyuan G. Xi'an jiaotong daxue xuebao. In: *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2001, vol. 35, no. 11, pp. 1126–1130.
 18. Kuznetsov M. M., Kuzmin M. K., Kuleshova Yu. D. [On the formula acceptable for calculating the time of complete evaporation of both small and large spherical water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika – matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2022, no. 2, pp. 56–69. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: m.kuzmin48@yandex.ru

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии, декан физико-математического факультета Государственного университета просвещения;

e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Mikhail K. Kuzmin – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Educational and Research Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Federal State University of Education;

e-mail: m.kuzmin48@yandex.ru

Juliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Federal State University of Education;

e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. Анализ траектории скорости изменения радиуса сферических капель воды в нестационарном процессе их испарения и вычисление времени жизни таких капель // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2024. № 2. С. 26–44.

DOI: 10.18384/2310-7251-2024-2-26-44

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuzmin M. K., Kuleshova Ju. D. Analysis of the trajectory of changes in the radius of spherical water droplets in the non-stationary process of their evaporation and calculation of the lifetime of such droplets. In: *Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2024, no. 2, pp. 26–44.

DOI: 10.18384/2310-7251-2024-2-26-44