

УДК 533.27; 519.6

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-56-67

МОДЕЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СМЕСИ ОДНО- И МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

Никитченко Ю. А., Сергеева Н. И.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация*

Аннотация

Целью данной работы являлось построение физико-математической модели течений смесей многоатомных газов в виде модельного кинетического уравнения.

Процедура и методы. В работе использованы методы молекулярно-кинетической теории газов, ориентированные на нахождение поступательных и вращательных энергий компонентов смеси газа. Для реализации разработанной модели применялись методики численного решения интегрально-дифференциальных уравнений.

Результаты. Проведено тестирование модели на примере ударной волны для смеси азота и кислорода. Показано удовлетворительное соответствие с результатами других авторов, полученных методами прямого статистического моделирования.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанная модель позволяет описывать высоконеравновесные процессы в смесях газов. К таким процессам, в частности, относится взаимодействие газа с активными поверхностями.

Ключевые слова: молекулярно-кинетическая теория газов, модельное кинетическое уравнение, многоатомные газы, динамическая неравновесность, смеси газов, ударная волна

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства Образования и Науки Российской Федерации, номер темы FSFF-2023-0008.

MODEL KINETIC EQUATION OF MONO- AND POLYATOMIC GAS MIXTURE

Yu. Nikitchenko, N. Sergeeva

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
ulitsa Volokolamskoye shosse 4, Moscow 125993, Russian Federation*

Abstract

The aim of this work was to build a physical and mathematical model of the flows of mixtures of polyatomic gases in the form of a model kinetic equation.

Methodology. The paper uses methods of the molecular kinetic theory of gases, focused on finding the translational and rotational energies of the components of a gas mixture. To

implement the developed model, methods of numerical solution of integral differential equations were used.

Results. The model was tested on the example of a shock wave problem for a mixture of nitrogen and oxygen. A satisfactory agreement with the results of other authors obtained by direct statistical modeling methods is shown.

Research implications. The developed model makes it possible to describe highly nonequilibrium processes in gas mixtures. Such processes include, in particular, the interaction of gas with active surfaces.

Keywords: molecular kinetic theory of gases, model kinetic equation, polyatomic gas, gas mixtures, dynamic disequilibrium, shock wave

Acknowledgments. This study was carried out as part of a state assignment of the Russian Ministry of Education and Science, topic no. FSFF-2023-0008.

Введение

В настоящее время актуальной проблемой механики жидкости и газа является разработка моделей неравновесных течений смесей газов. Одним из приложений таких моделей является, например, задача разделения компонентов смеси при их взаимодействии с активными поверхностями. Активность поверхности подразумевает процессы конденсации, хемосорбции и т. п.

Существует множество методов расчёта неравновесных течений смесей газов, как аналитических [1; 2; 3; 4; 5; 6], так и численных. Один из наиболее широко используемых численных методов – метод прямого статистического моделирования [7; 8; 9]. Однако применение данных методов для практических задач требует значительных вычислительных ресурсов и используется только для расчёта течений разреженных газов.

Также имеется множество работ, связанных с построением модельных кинетических уравнений, использующих интеграл обратных столкновений в упрощённом виде [10; 11; 12; 13; 14].

Имеющиеся экспериментальные работы по исследованию параметров компонентов смесей в основном относятся к течениям одноатомных газов. В частности, имеется множество статей по экспериментальным исследованиям структуры ударных волн в смесях аргона и гелия [15; 16; 17].

Моделирование течений многоатомных газов представляет определённые сложности, связанные с физически адекватным описанием энергообмена между поступательными и вращательными степенями свободы молекулы в условиях межкомпонентного взаимодействия. С большей или меньшей степенью физической адекватности такие процессы рассмотрены в работах [14; 19; 20; 21].

Целью данной работы являлось построение модельного кинетического уравнения (МКУ), описывающего течения смесей многоатомных газов. МКУ строилось на основе работы [21]. Модель для смеси одноатомных газов представлена в работе [22].

Энергообмен в межмолекулярных и межкомпонентных взаимодействиях

Рассматриваются только парные соударения молекул, химические реакции не учитываются.

Ниже параметры рассматриваемого компонента (плотность, скорость, температура, коэффициент вязкости т. п.) будем обозначать верхним индексом K , а фонового компонента – верхним N . Это же правило будет использоваться и для параметров межмолекулярных взаимодействий (относительная скорость, частота столкновений и т. п.), содержащих два индекса.

При рассмотрении многоатомных молекул возникает необходимость разделения поступательной и вращательной температур газа.

В случае столкновения молекул одного компонента (KK -столкновение) термодинамическая температура определяется выражением

$$T^K = \frac{3}{2}(\gamma^K - 1)T_t^K + \frac{5-3\gamma^K}{2}T_r^K,$$

где γ^K – показатель адиабаты данного компонента, T_t^K и T_r^K – поступательная и вращательная температуры.

По аналогии с работой [21] температура молекул, испытавших одно столкновение, может быть представлена следующим образом:

$$T_t^{+K} = T^K + \frac{5-3\gamma^K}{2} \frac{Z^K-1}{Z^K} (T_t^K - T_r^K) \quad (1)$$

$$T_r^{+K} = T^K - \frac{3}{2}(\gamma^K - 1) \frac{Z^K-1}{Z^K} (T_t^K - T_r^K) \quad (2)$$

В данных выражениях Z – параметр столкновений. Данный параметр показывает, сколько столкновений в среднем приходится на одно неупругое столкновение.

Рассмотрим столкновения молекул разных компонентов – межкомпонентные столкновения или KN -столкновения. В работе [22] показано, что в рамках приближения МКУ групповая скорость молекул, испытавших одно межкомпонентное столкновение \mathbf{U}^{KN} , может быть определена на основе закона сохранения импульса без учёта неполной релаксации групповых скоростей компонентов \mathbf{U}^{KN} и \mathbf{U}^{KN} , имевших место до столкновения:

$$\mathbf{U}^{KN} = \frac{m^K}{m^K+m^N} \mathbf{U}^K + \frac{m^N}{m^K+m^N} \mathbf{U}^N \quad (3)$$

С учётом этого допущения закон сохранения энергии взаимодействующих компонентов принимает вид:

$$c_v^{KN} 2n^{KN} m^{KN} T^{KN} + 2n^{KN} m^{KN} \frac{(\mathbf{U}^{KN})^2}{2} = c_v^K n^{KN} m^K T^K + \quad (4)$$

$$n^{KN} m^K \frac{(\mathbf{U}^K)^2}{2} + c_v^N n^{KN} m^N T^N + n^{KN} m^N \frac{(\mathbf{U}^N)^2}{2}$$

Здесь T^{KN} – термодинамическая температура обоих компонентов после KN -столкновения, c_v^{KN} , c_v^K и c_v^N – изохорные теплоёмкости, n^{KN} – концентрация молекул каждого компонента, участвующего в KN -столкновениях, m^K и m^N – молекулярные массы рассматриваемого и фонового компонентов соответственно.

Из (3) и (4) следует

$$T^{KN} = \frac{1}{1+\frac{\gamma^{K-1}}{\gamma^{N-1}}} T^K + \frac{1}{1+\frac{\gamma^{N-1}}{\gamma^{K-1}}} T^N + \frac{1}{2k} \frac{\gamma^{K-1}}{1+\frac{\gamma^{K-1}}{\gamma^{N-1}}} \frac{m^K m^N}{m^K + m^N} (\mathbf{U}^K - \mathbf{U}^N)^2, \quad (5)$$

где k – постоянная Больцмана.

Для определения поступательной и вращательной температур молекул, участвующих в KN -столкновениях, примем следующее допущение: после межкомпонентных столкновений поступательные температуры обоих компонентов равны T_t^+ , вращательные температуры компонентов различны и определены как

$$(T_r^+)^K = T_r^K + \frac{1}{Z^K} (T^{KN} - T_r^K) = \frac{1}{Z^K} T^{KN} + \frac{Z^K - 1}{Z^K} T_r^K \quad (6)$$

$$(T_r^+)^N = T_r^N + \frac{1}{Z^N} (T^{KN} - T_r^N) = \frac{1}{Z^N} T^{KN} + \frac{Z^N - 1}{Z^N} T_r^N \quad (7)$$

Эти температуры имеют тот же физический смысл, что и температуры, определённые зависимостями (1) и (2). Баланс энергии теплового движения молекул, заключённых в единице объёма, может быть записан следующим образом:

$$kn^{KN} T^{KN} = 3kn^{KN} T_t^+ + kn^{KN} \frac{5-3\gamma^K}{2(\gamma^K-1)} (T_r^+)^K + kn^{KN} \frac{5-3\gamma^N}{2(\gamma^N-1)} (T_r^+)^N.$$

Общая для компонентов температура T_t^+ определена выражением

$$T_t^+ = \frac{1}{3} \left\{ \left[\left(1 - \frac{5-3\gamma^K}{2} \frac{1}{Z^K} \right) \frac{1}{\gamma^K-1} + \left(1 - \frac{5-3\gamma^N}{2} \frac{1}{Z^N} \right) \frac{1}{\gamma^N-1} \right] T^{KN} - \frac{5-3\gamma^K}{2(\gamma^K-1)} \frac{Z^K-1}{Z^K} T_r^K - \frac{5-3\gamma^N}{2(\gamma^N-1)} \frac{Z^N-1}{Z^N} T_r^N \right\}$$

Тестирование модели

МКУ для смеси газов имеет вид [22]:

$$\frac{\partial f^K}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f^K}{\partial x_\alpha} = \nu^{KK} (f_K^{+K} - f^K) + \sum_{N \neq K} \nu_N^K (f_N^{+K} - f^K)$$

Здесь $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ – функция распределения молекул по скоростям, $\boldsymbol{\xi}$ – молекулярная скорость, ε – энергия вращения молекулы, ν^{KK} и ν_N^K – частоты столкновений.

Чтобы оценить физическую адекватность разрабатываемого МКУ, была решена задача о профиле ударной волны. Задача решалась для двухкомпонентного газа.

Если газ движется вдоль одной из координатных осей, обозначаемой далее как x , то можно сократить количество измерений функции распределения, введя в рассмотрение три функции f_n, f_p и f_ω для каждого из компонентов:

$$f_n(t, x, \xi_x) = \int f d\xi_y d\xi_z d\varepsilon$$

$$f_p(t, x, \xi_x) = \int (c_y^2 + c_z^2) f dc_y dc_z d\varepsilon$$

$$f_\omega(t, x, \xi_x) = \int \varepsilon f d\xi_y d\xi_z d\varepsilon$$

Здесь и далее $c_i = \xi_i - U_i$ – проекция вектора тепловой скорости молекул. В одномерной задаче очевидно: $c_y = \xi_y$, $c_z = \xi_z$.

Кинетические уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} f_n^K \\ f_p^K \\ f_\omega^K \end{bmatrix} + \xi_x \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \begin{bmatrix} f_n^K \\ f_p^K \\ f_\omega^K \end{bmatrix} = \nu^{KK} \begin{bmatrix} f_n^K - f_n^K \\ f_p^K - f_p^K \\ f_\omega^K - f_\omega^K \end{bmatrix} + \nu_N^K \begin{bmatrix} f_{nN}^{+K} - f_n^K \\ f_{pN}^{+K} - f_p^K \\ f_{\omega N}^{+K} - f_\omega^K \end{bmatrix}$$

Здесь

$$f_{nK}^{+K} = \frac{n^K}{\sqrt{2\pi R^K T_t^{+K}}} \exp\left(-\frac{(c^K)_x^2}{2R^K T_t^{+K}}\right) \left(1 + \frac{(q^K)_x (c^K)_x}{15\rho^K (R^K T_t^{+K})^2} \left(\frac{(c^K)_x^2}{R^K T_t^{+K}} - 3\right)\right)$$

$$f_{pK}^{+K} = \frac{2R^K T_t^{+K} n^K}{\sqrt{2\pi R^K T_t^{+K}}} \exp\left(-\frac{(c^K)_x^2}{2R^K T_t^{+K}}\right) \left(1 + \frac{(q^K)_x (c^K)_x}{15\rho^K (R^K T_t^{+K})^2} \left(\frac{(c^K)_x^2}{R^K T_t^{+K}} - 1\right)\right)$$

$$f_{nN}^{+K} = \frac{n^K}{\sqrt{2\pi R^K T_t^{+K}}} \exp\left(-\frac{(c_N^{+K})_x^2}{2R^K T_t^{+K}}\right) \left(1 + \frac{(q^K)_x (c_N^{+K})_x}{15\rho^K (R^K T_t^{+K})^2} \left(\frac{(c_N^{+K})_x^2}{R^K T_t^{+K}} - 3\right)\right)$$

$$f_{pN}^{+K} = \frac{2R^K T_t^{+K} n^K}{\sqrt{2\pi R^K T_t^{+K}}} \exp\left(-\frac{(c_N^{+K})_x^2}{2R^K T_t^{+K}}\right) \left(1 + \frac{(q^K)_x (c_N^{+K})_x}{15\rho^K (R^K T_t^{+K})^2} \left(\frac{(c_N^{+K})_x^2}{R^K T_t^{+K}} - 1\right)\right)$$

$$f_{\omega K}^{+K} = \frac{5-3\gamma^K}{2(\gamma^K-1)} k T_r^{+K} f_{nK}^{+K}, \quad f_{\omega N}^{+K} = \frac{5-3\gamma^N}{2(\gamma^N-1)} k (T_r^+)^K f_{nN}^{+K}$$

$$(c_N^{+K})_x = \xi_x - (U^{KN})_x, \quad R^K = k/m^K$$

Моменты функции распределения:

$$n^K = \int f_n^K d\xi_x$$

$$(U^K)_x = \frac{1}{n^K} \int \xi_x f_n^K d\xi_x$$

$$T_t^K = \frac{1}{3R^K n^K} \int ((c^K)_x^2 f_n^K + f_p^K) dc_x$$

$$T_r^K = \frac{2(\gamma^K - 1)}{(5 - 3\gamma^N) n^K} \int f_\omega^K dc_x$$

$$(q^K)_x = \frac{n^K}{2} \int ((c^K)_x^3 f_n^K + (c^K)_x f_p^K) dc_x$$

Решение кинетического уравнения строилось как первая начально-краевая задача. На границах вычислительной области задавались условия невозмущённого потока и условия Ренкина-Гюгонио. Учитывалось, что групповые скорости и температуры на границах, находящихся в условиях равновесия, одинаковы для обоих компонентов. Скорость звука и, следовательно, число Маха в невозмущённом потоке, определялись по кажущейся массе молекул.

Для численного решения задачи использовался метод установления с шагом по времени Δt . Геометрическая сетка имела постоянный шаг Δx . Сетка в скоростном пространстве имела постоянный шаг $\Delta \xi$. Конечно-разностный

шаблон, по аналогии с [21; 22], формировался на четырёх узлах расчётной сетки со смещением против потока (молекулярного потока). В результате для $\xi_x \geq 0$ и $\xi_x \leq 0$ были получены четырёхдиагональные матрицы.

Полученные результаты

Ниже на рис. 1 и рис. 2 приведены профили поступательной и вращательной температур, построенные для смеси азота и кислорода при $M_\infty = 3$ и $M_\infty = 5$. Свободный параметр модели, определяющий зависимость коэффициента вязкости от температуры, принимался $s = 0.5$. Параметр столкновений принимался как $Z^K = Z^N = 5$. Для сравнения использованы расчётные данные работы [14], где данные были получены методом прямого статистического моделирования.

Расчитанные профили приведены к единичному отрезку:

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

Значение координаты $\frac{x}{\lambda_\infty} = 0$ соответствует середине профиля суммарной плотности.

Полученные зависимости показывают, что наблюдается удовлетворительная сходимость.

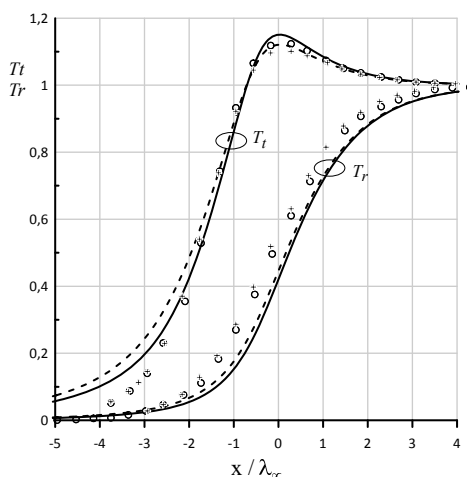


Рис. 1 / Fig. 1. Профили поступательной и вращательной температур смеси азота и кислорода в плоской ударной волне двухкомпонентного газа, содержание азота 80%, $M_\infty = 3$, $s = 0.5$. Точки – данные работы [14], крестики – азот, кружки – кислород.

Пунктир – азот, сплошная линия – кислород / Profiles of translational and rotational temperatures of a mixture of nitrogen and oxygen in a plane shock wave of a two-component gas, nitrogen content 80%, $M_\infty = 3$, $s = 0.5$. Dots – data from [14], crosses – nitrogen, circles – oxygen. Dashed line – nitrogen, solid line – oxygen.

Источник: составлено авторами.

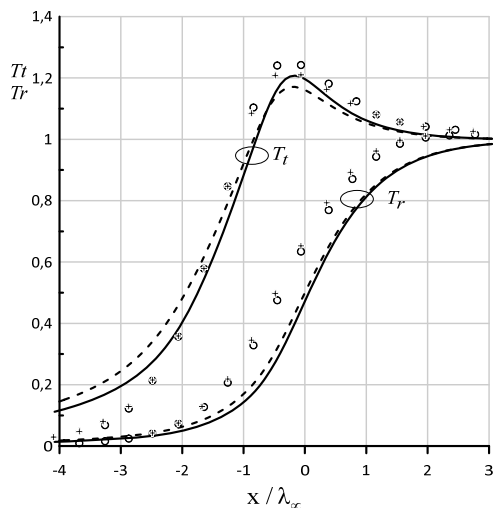


Рис. 2 / Fig. 2. Профили поступательной и вращательной температур смеси азота и кислорода в плоской ударной волне двухкомпонентного газа, содержание азота 80%, $M_\infty = 5$, $s = 0.5$. Точки – данные работы [14], крестики – азот, кружки – кислород. Пунктир – азот, сплошная линия – кислород / Profiles of translational and rotational temperatures of a mixture of nitrogen and oxygen in a plane shock wave of a two-component gas, nitrogen content 80%, $M_\infty = 5$, $s = 0.5$. Dots – data from [14], crosses – nitrogen, circles – oxygen. Dashed line – nitrogen, solid line – oxygen

Источник: составлено авторами.

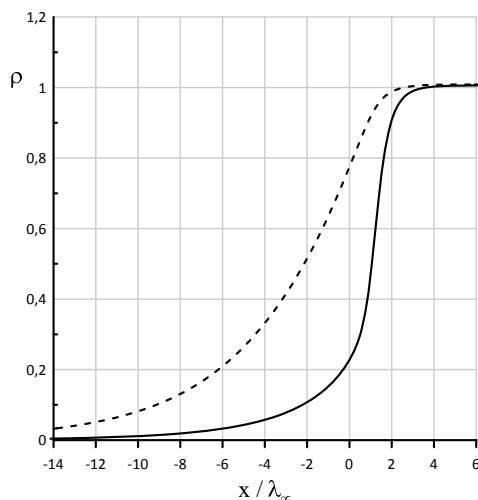


Рис. 3 / Fig. 3. Профили плотности смеси водорода и углекислого в плоской ударной волне двухкомпонентного газа, содержание водорода 50%, $M_\infty = 3$, $s = 0.5$. Пунктир – водород, сплошная линия – углекислый газ / Density profiles of a mixture of hydrogen and carbon dioxide in a plane shock wave of a two-component gas, hydrogen content 50%, $M_\infty = 3$, $s = 0.5$. Dashed line – hydrogen, solid line – carbon dioxide

Источник: составлено авторами.

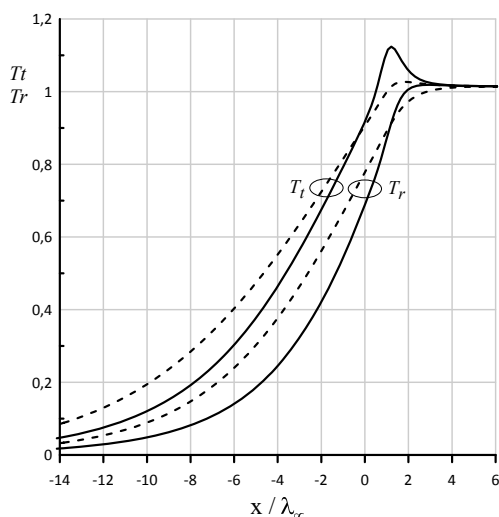


Рис. 4 / Fig. 4. Профили поступательной и вращательной температур смеси водорода и углекислого в плоской ударной волне двухкомпонентного газа, содержание водорода 50%, $M_\infty = 3$, $s = 0.5$. Пунктир – водород, сплошная линия – углекислый газ / Profiles of translational and rotational temperatures of a mixture of hydrogen and carbon dioxide in a plane shock wave of a two-component gas, hydrogen content 50%, $M_\infty = 3$, $s = 0.5$. Dashed line – hydrogen, solid line – carbon dioxide

Источник: составлено авторами.

Так как массы молекул азота и кислорода различаются незначительно, то на рис. 1 и 2 наблюдается незначительное расхождение профилей поступательных и вращательных температур компонент.

На рис. 3 и рис. 4 показаны результаты расчёта с применением полученной модели для смеси водорода и углекислого газа для числа Маха $M_\infty = 3$ с содержанием компонент в смеси в равных пропорциях.

Заключение

В настоящей работе приведено модельное кинетическое уравнение для смеси многоатомных газов. Проведённые численные тесты показывают, что разработанная модель даёт удовлетворительную сходимость с результатами расчётов с применением метода Монте-Карло.

Разработанная модель позволяет получить индивидуальные для каждого компонента системы моментных уравнений.

Статья поступила в редакцию 18.12.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Analytical theory of high-speed nonequilibrium in a binary mixture of gases with a predominant light component / Demidov I. V., Kuznetsov M. M., Kuleshova Y. D.,

- Tikhonovets A. V. // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2056, International Conference “Advanced Element Base of Micro- and Nano-Electronics with Using of ToDate Achievements of Theoretical Physics” (MRSU, 20-23 April 2021, Moscow, Russia). Article number 012008. DOI: 10.1088/1742-6596/2056/1/012008.
2. Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов / Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Решетникова Ю. Г., Смотров Л. В. // *Труды МАИ (сетевое научное издание)*. 2017. № 95. URL: https://mai.ru/upload/iblock/96c/Kuznetsov_Kuleshova_Reshetnikova_Smotrova_rus.pdf (дата обращения: 10.10.2023).
 3. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях / Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. // *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*. 1990. № 2. С. 144–150.
 4. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // *Химическая физика*. 1993. Т. 12. № 3. С. 340–342.
 5. Высокоскоростная поступательная неравновесность смеси газов в аналитической модели ударной волны / Кузнецов М. М., Матвеев С. В., Молостин Е. В., Решетникова Ю. Г., Смотров Л. В. // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике (электронное издание)*. 2016. Т. 17. № 1. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/> (дата обращения: 10.10.2023).
 6. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне / Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотров Л. В., Решетникова Ю. Г. // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2016. № 3. С. 84–95. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.
 7. Куликов С. В. Поступательная неравновесность трехкомпонентного газа во фронте ударной волны // *Известия Российской Академии наук. Механика жидкости и газа*. 1997. № 4. С. 171–178.
 8. Raines A. A. Study of a shock wave structure in gas mixtures on the basis of the Boltzmann equation // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2002. Vol. 21. Iss. 5. P. 599–610. DOI: 10.1016/S0997-7546(02)01197-4.
 9. Sabouri M., Darbandi M. Numerical study of species separation in rarefied gas mixture flow through micronozzles using DSMC // *Physics of Fluids*. 2019. Vol. 31. Iss. 4. P. 042004. DOI: 10.1063/1.5083807.
 10. Oguchi H. A kinetic model for a binary mixture and its application to a shock structure // *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1 / ed. C. L. Brundin. New York – London: Academic Press, 1967. P. 745–758.
 11. Abe K., Oguchi H. Shock wave structure in binary gas mixture // *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 6 / eds. L. Trilling and H. Y. Wachman. New York – London: Academic Press, 1969. P. 425–429.
 12. Todorova B. N., Steijl R. Derivation and numerical comparison of Shakhov and ellipsoidal statistical kinetic models for a monoatomic gas mixture // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2019. Vol. 76. P. 390–402 DOI: 10.1016/j.euromechflu.2019.04.001.
 13. Lorenzani S. A microchannel flow application of a linearized kinetic Bhatnagar-Gross-Krook-type model for inert gas mixtures with general intermolecular forces // *Physics of Fluids*. 2019. Vol. 31. Iss. 7. P. 072001. DOI: 10.1063/1.5098013.

14. Todorova B. N., White C., Stejil R. Modeling of nitrogen and oxygen gas mixture with a novel diatomic kinetic model // *AIP Advances*. 2020. Vol. 10. Iss. 9. P. 095218. DOI: 10.1063/5.0021672.
15. Harnett L. M., Muntz E. P. Experimental investigation of normal shock wave velocity distribution functions in mixtures of Argon and Helium // *Physics of Fluids*. 1972. Vol. 15. Iss. 4. P. 565–572. DOI: 10.1063/1.1693949.
16. Center R. E. Measurements of shock-wave structure in helium-argon mixtures // *Physics of Fluids*. 1967. Vol. 10. Iss. 8. P. 1777–1784. DOI: 10.1063/1.1762357.
17. Бочкарев А. А., Ребров А. К., Тимошенко Н. И. Структура ударной волны в смеси Ar-He // *Известия Сибирского отделения Академии наук СССР. Серия технических наук*. 1976. № 3. Вып. 1. С. 76–80.
18. Kosuge S., Kuo H.-W., Aoki K. A kinetic model for a polyatomic gas with temperature-dependent specific heats and its application to shock-wave structure // *Journal of Statistical Physics*. 2019. Vol. 177. P. 209–251. DOI: 10.1007/s10955-019-02366-5.
19. Kinetic models for thermodynamic non-equilibrium effects of polyatomic gases and preliminary application in gas-kinetic unified algorithm / Wu J., Peng A., Li Z., Jiang X. // *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2132. Iss. 1. P. 060006. DOI: 10.1063/1.5119546.
20. Рыков В. А. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы // *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*. 1975. № 6. С. 107–115.
21. Никитченко Ю. А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57. № 11. С. 1882–1894. DOI: 10.7868/S0044466917110114.
22. Никитченко Ю. А., Попов С. А., Сергеева Н. И. Система модельных кинетических уравнений для многокомпонентного газа // *Теплофизика высоких температур*. 2023. Т. 61. № 5. С. 736–743. DOI: 10.31857/S0040364423050113.

REFERENCES

1. Demidov I. V., Kuznetsov M. M., Kuleshova Y. D., Tikhonovets A. V. Analytical theory of high-speed nonequilibrium in a binary mixture of gases with a predominant light component. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 2056, International Conference “Advanced Element Base of Micro- and Nano-Electronics with Using of ToDate Achievements of Theoretical Physics” (MRSU, 20-23 April 2021, Moscow, Russia), article number 012008. DOI: 10.1088/1742-6596/2056/1/012008.
2. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. [Occurrence conditions and high-speed overlap effect value in shocked gases" mixture]. In: *Trudy MAI (setevoye nauchnoye izdaniye)* [Electronic journal «Trudy MAI»], 2017, no. 95. Available at: https://mai.ru/upload/iblock/96c/Kuznetsov_Kuleshova_Reshetnikova_Smotrova_rus.pdf (accessed: 10.10.2023).
3. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshev S. L. [Distribution of molecular velocities in the front of a shock wave in gas mixtures]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1990, no. 2, pp. 144–150.
4. Kulikov S. V., Ternovaya O. N., Chereshev S. L. [Specificity of Translational Nonequilibrium in the Shock Wave Front Propagating through a Single-Component Gas]. In: *Khimicheskaya fizika* [Soviet Journal of Chemical Physics], 1993, vol. 12, no. 3, pp. 340–342.
5. Kuznetsov M. M., Matveev S. V., Molostvin E. V., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. [The Hight Velocity Translation Nonequilibrium in Analitical Shock Wave Model in a Gas

- Mixture]. In: *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike* [Physical and Chemical Kinetics in Gas Dynamics], 2016, vol. 17, no 1. Available at: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/> (accessed: 10.10.2023).
6. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V., Reshetnikova Yu. G. [On the maximum effect of high translational nonequilibrium in the shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 84–95. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.
 7. Kulikov S. V. [Translational nonequilibrium of a three-component gas in the front of a shock wave]. In: *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1997, no. 4, pp. 171–178.
 8. Raines A. A. Study of a shock wave structure in gas mixtures on the basis of the Boltzmann equation. In: *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2002, vol. 21, iss. 5, pp. 599–610. DOI: 10.1016/S0997-7546(00)00133-3.
 9. Sabouri M., Darbandi M. Numerical study of species separation in rarefied gas mixture flow through micronozzles using DSMC. In: *Physics of Fluids*, 2019, vol. 31, iss. 4, pp. 042004. DOI: 10.1063/1.5083807.
 10. Oguchi H. A kinetic model for a binary mixture and its application to a shock structure. In: Brundin C. L., ed. *Rarefied Gas Dynamics. Vol. 1*. New York, London, Academic Press, 1967, pp. 745–758.
 11. Abe K., Oguchi H. Shock wave structure in binary gas mixture. In: Trilling L., Wachman H. Y., eds. *Rarefied Gas Dynamics. Vol. 6*. New York, London, Academic Press, 1969, pp. 425–429.
 12. Todorova B. N., Steijl R. Derivation and numerical comparison of Shakhov and ellipsoidal statistical kinetic models for a monoatomic gas mixture. In: *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2019, vol. 76, pp. 390–402 DOI: 10.1016/j.euromechflu.2019.04.001.
 13. Lorenzani S. A microchannel flow application of a linearized kinetic Bhatnagar-Gross-Krook-type model for inert gas mixtures with general intermolecular forces. In: *Physics of Fluids*, 2019, vol. 31, iss. 7, pp. 072001. DOI: 10.1063/1.5098013.
 14. Todorova B. N., White C., Steijl R. Modeling of nitrogen and oxygen gas mixture with a novel diatomic kinetic model. In: *AIP Advances*, 2020, vol. 10, iss. 9, pp. 095218. DOI: 10.1063/5.0021672.
 15. Harnett L. M., Muntz E. P. Experimental investigation of normal shock wave velocity distribution functions in mixtures of Argon and Helium. In: *Physics of Fluids*, 1972, vol. 15, iss. 4, pp. 565–572. DOI: 10.1063/1.1693949.
 16. Center R. E. Measurements of shock-wave structure in helium-argon mixtures. In: *Physics of Fluids*, 1967, vol. 10, iss. 8, pp. 1777–1784. DOI: 10.1063/1.1762357.
 17. Bochkarev A. A., Rebrov A. K., Timoshenko N. I. [Structure of a shock wave in an Ar-He mixture]. In: *Izvestiya Sibirskogo otdeleniya Akademii nauk SSSR. Seriya tekhnicheskikh nauk* [Proceedings of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. Engineering Science Series], 1976, no. 3, iss. 1, pp. 76–80.
 18. Kosuge S., Kuo H.-W., Aoki K. A kinetic model for a polyatomic gas with temperature-dependent specific heats and its application to shock-wave structure. In: *Journal of Statistical Physics*, 2019, vol. 177, pp. 209–251. DOI: 10.1007/s10955-019-02366-5.
 19. Wu J., Peng A., Li Z., Jiang X. Kinetic models for thermodynamic non-equilibrium effects of polyatomic gases and preliminary application in gas-kinetic unified algorithm. In: *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2132, iss. 1, pp. 060006. DOI: 10.1063/1.5119546.

20. Rykov V. A. [Model kinetic equation for gas with rotational degrees of freedom]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1975, no. 6, pp. 107–115.
21. Nikitchenko Yu. A. [Model kinetic equation of polyatomic gases]. In: *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2017, vol. 57, no. 11, pp. 1882–1894. DOI: 10.7868/S0044466917110114.
22. Nikitchenko Yu. A., Popov S. A., Sergeeva N. I. [System of model kinetic equations for a multicomponent gas]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2023, vol. 61, no. 5, pp. 736–743. DOI: 10.31857/S0040364423050113.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Никитченко Юрий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Аэродинамика, динамика и управление летательных аппаратов» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: nikitchenko7@yandex.ru

Сергеева Наталья Ивановна – аспирант кафедры «Аэродинамика, динамика и управление летательных аппаратов» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: natasg777@yandex.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Yrii A. Nikitchenko – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Aerodynamics, dynamics and control of aircraft, Moscow Aviation Institute (National Research University);
email: nikitchenko7@yandex.ru

Natalya I. Sergeeva – Postgraduate Student, Department of Aerodynamics, dynamics and control of aircraft, Moscow Aviation Institute (National Research University);
email: natasg777@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Никитченко Ю. А., Сергеева Н. И. Модельное кинетическое уравнение для смеси одно- и многоатомных газов // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2024. № 1. С. 56–67.
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-56-67.

FOR CITATION

Nikitchenko Yu. A., Sergeeva N. I. Model kinetic equation of mono- and polyatomic gas mixture. In: *Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2024, no. 1, pp. 56–67.
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-56-67.