ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 514.8+537.8
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-57-69

ГРУППА ЛОРЕНЦА И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Тришин В. Н.[1], Тришина Н. Е.[1, 2]

*[1] Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

*[2] Российский химико-технологический университет имени Д. И Менделеева
125047, г. Москва, Миусская площадь, д. 9, Российская Федерация*

Аннотация
Цель. Демострация взаимосвязи дробно-линейной функции, разбираемой студентами технических университетов в курсе «Теория функции комплексного переменного (ТФКП)», и группы Лоренца, которую студенты изучают в курсе теоретической физики.
Процедура и методы. Приведён анализ соответствия между группой Лоренца и её двукратно накрывающей – группой спиновых преобразований, что позволяет описывать преобразования Лоренца с помощью комплексной дробно-линейной функции.
Результаты. В явной форме описано взаимно-однозначное соответствие между классами дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости и соответствующими преобразованиями Лоренца инерциальных систем отсчёта. Описаны физически значимые примеры аберрации света и вигнеровского вращения.
Теоретическая и/или практическая значимость. Продемонстрирована необходимость учёта межпредметных связей теоретической физики и ТФКП при изучении основ специальной теории относительности.

Ключевые слова: группа Лоренца, дробно-линейное преобразование, спиноры, спиновые преобразования

THE LORENTZ GROUP AND LINEAR FRACTIONAL TRANSFORMATIONS OF THE COMPLEX PLANE

V. Trishin1, N. Trishina [1, 2]

[1] Bauman Moscow State Technical University
ulitsa 2-ya Baumanskaya 5 build. 1, Moscow 105005, Russian Federation
[2] Mendeleev University of Chemical Technology of Russia
Miusskaya ploshad 9, Moscow 125047, Russian Federation

Abstract
Aim. Demonstration of the relationship between the linear-fractional function, analyzed by students of technical universities in the course of complex function theory, and the Lorentz group, which students study in the course of theoretical physics.
Methodology. Demonstration of the relationship between the fractional linear function, which is analyzed by students of technical universities in the course "Theory of Function of Complex Variable (TFCV)", and the Lorentz group, which students study in the course of theoretical physics.
Results. The one-to-one correspondence between the classes of fractional-linear transformations of the extended complex plane and the corresponding Lorentz transformations of inertial frames of reference is described in an explicit form. Physically significant examples of light aberration and Wigner rotation are described.
Research implications. The necessity of taking into account the interdisciplinary connections of theoretical physics and "Theory of Function of Complex Variable (TFCV)" in the study of the foundations of the special theory of relativity is demonstrated.
Keywords: Lorentz group, linear-fractional transformation, spinors, spin transformations

Введение

В университетском курсе «Теория функции комплексного переменного (ТФКП)» в качестве стандартного примера аналитической функции детально разбирают (см., например, [1]) дробно-линейную функцию, которая осуществляет наиболее общее, взаимно-однозначное конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя. Со студентами рассматривают различные классы отображений и их геометрический смысл, но при этом, как правило, не обсуждается возможный физический смысл получаемых результатов. Тем не менее, специалистам хорошо известно, что дробно-линейные преобразования ТФКП эквивалентны собственным преобразованиям группы Лоренца, лежащим в основе специальной теории относительности. Это соответствие позволяет дать наглядную физическую интерпретацию отображениям, которые осуществляет дробно-линейная функция.

В данной методической заметке мы детально, в явной форме рассматриваем классы дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости и соответствующие им преобразования Лоренца, связывающие две инерциальные системы отсчёта. Подобное рассмотрение, с одной стороны, демонстрирует наглядный физический смысл параметров дробно-линейной функции, а с другой стороны – существенно упрощает понимание особенностей преобразований Лоренца, и делает доказательства многих свойств существенно компактнее. Параллельно мы излагаем понятие спиновых преобразований, естественно возникающих при таком описании.

В специальной теории относительности каждому событию сопоставляется точка четырёхмерного, действительного, линейного пространства M, которое называется пространство-время Минковского. Это пространство можно рассматривать как множество векторов положений точек относительно некоторого произвольно выбранного начала отсчёта. Пусть векторы $V = v^{\mu} e_{\mu}$ и $W = w^{\mu} e_{\mu}$ – элементы этого пространства со скалярным произведением $(V, W) = (v^{\mu} e_{\mu}, w^{\nu} e_{\nu}) = g_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu}$, где метрический тензор $g_{\mu\nu} = (e_{\mu}, e_{\nu})$.

В псевдоортонормированном базисе e_{μ} метрический тензор имеет компоненты

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

и скалярное произведение (квадрат интервала между событиями) принимает вид $(V, W) = v^0 w^0 - v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3$. В декартовых координатах $V = (ct, x, y, z)$, где c – скорость света, получим для квадрата нормы Минковского выражение

$$|V|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{2}$$

Преобразования Лоренца – это линейные преобразования $\tilde{v}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu}$ пространства M, сохраняющие скалярное произведение и норму (2). В координатах они заданы матрицами Λ^{μ}_{ν} так, что

$$\begin{pmatrix} c\tilde{t} \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где матрицы преобразования должны удовлетворять условию $g = \Lambda^T g \Lambda$, при котором сохраняется интервал:

$$(c\tilde{t})^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Эти преобразования образуют группу, так называемую группу Лоренца, с групповой операцией – матричным умножением [2; 3]. В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные преобразования Лоренца, которые являются собственными ($\det\Lambda > 0$) и ортохронными ($\Lambda^0_0 > 0$).

Преобразования Лоренца и спиновые преобразования

Любое ограниченное преобразование Лоренца Λ можно разложить в произведение пространственного вращения R и буста B – преобразования, изменяющего только скорость и не содержащего пространственного поворота.

Элементарные вращения относительно пространственных координатных осей OX, OY и OZ задаются соответственно матрицами

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ 0 & \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Бусты вдоль осей OX, OY и OZ имеют вид

$$B_x = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta_x & -\mathrm{sh}\vartheta_x & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\vartheta_x & \mathrm{ch}\vartheta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$B_y = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta_y & 0 & -\mathrm{sh}\vartheta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\vartheta_y & 0 & \mathrm{ch}\vartheta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$B_z = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta_z & 0 & 0 & -\mathrm{sh}\vartheta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sh}\vartheta_z & 0 & 0 & \mathrm{ch}\vartheta_z \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где введён параметр быстроты ϑ:

$$\vartheta = \mathrm{Arth}\frac{v}{c} = \ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Легко проверить, что $\mathrm{ch}\vartheta = \gamma$ и $\mathrm{sh}\vartheta = \gamma\frac{v}{c}$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ – релятивистский множитель, v– скорость наблюдателя. Откуда видно, например, что матрица B_x осуществляет простейшее преобразование Лоренца $\tilde{t} = \gamma(t - vx/c^2)$, $\tilde{x} = \gamma(x - vt)$.

Помимо стандартного четырёхмерного представления, описанного выше, преобразования Лоренца допускают альтернативную версию [5; 6]. Действительно, четыре координаты точки пространства Минковского можно записать не в виде 4-вектора, а в виде эрмитовой 2×2 матрицы:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{pmatrix}, \tag{11}$$

причем $\sqrt{2}\det V = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Множитель $1/\sqrt{2}$ введён для удобства в дальнейшем изложении. Ограниченное преобразование Лоренца соответствует [3] следующему действию комплексной *спин-матрицы* A: $\tilde{V} = AVA^{\dagger}$, или в компонентах

$$\begin{pmatrix} c\tilde{t}+\tilde{z} & \tilde{x}+i\tilde{y} \\ \tilde{x}-i\tilde{y} & c\tilde{t}-\tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Поскольку преобразования Лоренца сохраняют норму Минковского, то $\det\tilde{V} = \det V$, поэтому $|\det A|^2 = 1$. Для ограниченных преобразования Лоренца получим условие на компоненты спин-матрицы:

$$ad - bc = 1. \tag{13}$$

Таким образом, 6 действительных параметров группы Лоренца кодируются 4 комплексными числами, связанными (комплексным) условием (13). Эти числа можно рассматривать [4] как параметры дробно-линейной функции

$$F(\zeta) = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}, \tag{14}$$

действующей на комплексной плоскости с координатой ζ, и мы ставим в соответствие каждой спин-матрице A некоторую дробно-линейную функцию $F(\zeta)$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto F = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}. \tag{15}$$

Групповой операции умножения матриц $A = A_1A_2$ будет соответствовать операция композиции функций $F = F_1(F_2(\zeta))$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto F_1(F_2(\zeta)) = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)\zeta + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)\zeta + c_1b_2 + d_1d_2}.$$

Дополнив комплексную плоскость бесконечно удалённой точкой $\zeta = \infty$, после компактификации получим известную сферу Римана S, которую физически можно рассматривать как «небесную сферу» наблюдателя. Точки P этой сферы параметризуют лучи света, приходящие к наблюдателю, а преобразования Лоренца через соответствие (15) индуцируют конформные преобразования сферы Римана в себя. Рассмотрим эту конструкцию более детально.

Координаты изотропных векторов, задающих лучи света, приходящие к наблюдателю, расположенному в начале координат, удовлетворяют условию $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Положив, например, $ct = -1$, получим уравнение сферы $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Стереографическая проекция на комплексную плоскость выражает координаты $(-1, X, Y, Z)$ точки P сферы S следующим образом:

$$\zeta = \frac{X+iY}{1-Z}, \tag{16}$$

откуда несложно получить обратное соотношение

$$X = \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta}+1}, \quad Y = \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta}+1)}, \quad Z = \frac{\zeta\bar{\zeta}-1}{\zeta\bar{\zeta}+1}. \tag{17}$$

На сфере Римана S вместо координаты ζ удобно ввести проективные координаты ξ и η так, что $\zeta = \xi/\eta$, т. е. мы будем рассматривать S как комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$. При произвольном комплексном числе λ пары (ξ, η) и $(\lambda\xi, \lambda\eta)$ параметризуют одну и ту же точку P сферы, а бесконечно удалённая точка $\zeta = \infty$ задаётся конечной парой, например (1,0). Тогда в проективных координатах выражения (17) принимают вид

$$X = \frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}, \quad Y = \frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})}, \quad Z = \frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}. \tag{18}$$

Поскольку точка $P(-1, X, Y, Z)$ на сфере S нужна только для параметризации лучей, приходящих в начало координат O, то можно выбрать любую другую точку V на прямой OP. Обозначив координаты этой точки как (ct, x, y, z), получим

$$ct = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}\right), \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}\right),$$

$$y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}). \tag{19}$$

Подставляя эти выражения в (11) и учитывая, что точка V лежит на луче OP, т. е. $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, получим для координат V следующее представление

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} (\bar{\xi} \quad \bar{\eta}) = \chi\chi^\dagger. \tag{20}$$

Здесь столбец

$$\chi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+iy)/\sqrt{ct-z} \\ \sqrt{ct-z} \end{pmatrix} \tag{21}$$

определяет координаты *спин-вектора* (спинора) χ, поэтому, имея в виду правую часть выражения (20), спинор иногда условно называют «корнем квадратным» из вектора.

Комплексная координата $\zeta = \xi/\eta$ характеризует направление на «небесной сфере» наблюдателя, задаваемое спинором χ, и для неё мы имеем выражение

$$\zeta = \frac{x+iy}{ct-z}, \tag{22}$$

или в обычных угловых сферических координатах φ, θ (угол φ отсчитывается от положительного направления оси x в плоскости xy, а угол θ – от положительного направления оси z):

$$\zeta = e^{i\varphi}\mathrm{ctg}(\theta/2). \tag{23}$$

Использование комплексной координаты ζ вместо угловых переменных (φ,θ) существенно упрощает многие вычисления, а угловые координаты несложно выразить через ζ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(\zeta+\bar{\zeta})}, \quad \theta = \arccos\frac{\zeta\bar{\zeta}-1}{\zeta\bar{\zeta}+1}. \tag{24}$$

При преобразованиях Лоренца, как следует из (12), мы получим

$$\tilde{V} = AVA^{\dagger} = A\chi\chi^{\dagger}A^{\dagger} = (A\chi)(A\chi)^{\dagger}, \tag{25}$$

откуда следует, что спинор χ преобразуется под действием спин-матрицы A, осуществляющей соответствующее *спиновое преобразование*:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \tag{26}$$

а координата ζ испытывает эквивалентное дробно-линейное преобразование $\tilde{\zeta} = (a\zeta + b)/(c\zeta + d)$.

Вращения

Несложно показать (см. например [3]), что спиновые преобразования, соответствующие элементарным вращениииям (4), (5), (6), могут быть представлены следующими (унитарными, т. е. $A^{\dagger} = A^{-1}$) матрицами и ассоциированными с ними дробно-линейными функциями:

$$A_{Rx} = \pm\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi_x}{2} & i\sin\frac{\varphi_x}{2}\\ i\sin\frac{\varphi_x}{2} & \cos\frac{\varphi_x}{2}\end{pmatrix} \quad \mapsto \quad F_{Rx}(\zeta) = \frac{\cos\frac{\varphi_x}{2}\zeta + i\sin\frac{\varphi_x}{2}}{i\sin\frac{\varphi_x}{2}\zeta + \cos\frac{\varphi_x}{2}} \tag{27}$$

$$A_{Ry} = \pm\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi_y}{2} & -\sin\frac{\varphi_y}{2}\\ \sin\frac{\varphi_y}{2} & \cos\frac{\varphi_y}{2}\end{pmatrix} \quad \mapsto \quad F_{Ry}(\zeta) = \frac{\cos\frac{\varphi_y}{2}\zeta - \sin\frac{\varphi_y}{2}}{\sin\frac{\varphi_y}{2}\zeta + \cos\frac{\varphi_y}{2}} \tag{28}$$

$$A_{Rz} = \pm\begin{pmatrix}e^{i\varphi_z/2} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi_z/2}\end{pmatrix} \quad \mapsto \quad F_{Rz}(\zeta) = e^{i\varphi_z}\zeta. \tag{29}$$

Здесь знаки $\pm$ означают, что каждому ограниченному преобразованию Лоренца соответствует два и только два спиновых преобразования, отличающихся знаками. Это является конкретной реализацией хорошо известного факта, что группа $SL(2,\mathbb{C})$ (группа спиновых преобразований) является двукратно накрывающей группы Лоренца [7; 8].

Заметим, что для нетривиальных поворотов $\varphi_x \neq 2\pi n$, $\varphi_y \neq 2\pi m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ функции $F_{Rx}(\zeta)$ и $F_{Ry}(\zeta)$ можно переписать в виде

$$F_{Rx}(\zeta)=\frac{\sin^{-2}\frac{\varphi_x}{2}}{\zeta-i\mathrm{ctg}\frac{\varphi_x}{2}}-i\mathrm{ctg}\frac{\varphi_x}{2},\quad F_{Ry}(\zeta)=\mathrm{ctg}\frac{\varphi_y}{2}-\frac{\sin^{-2}\frac{\varphi_y}{2}}{\zeta+\mathrm{ctg}\frac{\varphi_y}{2}}. \tag{30}$$

В частности, при $\varphi_x=\pi$ получим функцию $F_{Rx}(\zeta)=1/\zeta$, а при $\varphi_y=\pi$ получим $F_{Ry}(\zeta)=-1/\zeta$.

Матрицу произвольного поворота можно представить в виде произведения матриц элементарных вращений. Поскольку произведение унитарных матриц так же является унитарной матрицей, то любое вращение соответствует унитарному преобразованию. Обратное тоже верно – любая унитарная матрица в $SL(2,\mathbb{C})$ описывает пространственный поворот. Действительно, поскольку унитарное преобразование сохраняет след матрицы, то след $\mathrm{Tr}V=\sqrt{2}ct$ матрицы координат (11) не изменяется при унитарных преобразованиях (12), а значит сохраняется величина $x^2+y^2+z^2$.

Таким образом, произвольный поворот определяется двумя унитарными матрицами второго порядка с единичным определителем, отличающимися знаками, так что общая спин-матрица вращений и ассоциированная функция имеют вид

$$A_R=\pm\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_R(\zeta)=\frac{a\zeta+b}{\bar{a}-\bar{b}\zeta},\quad |a|^2+|b|^2=1. \tag{31}$$

Бусты

Спиновые преобразования и ассоциированные функции, соответствующие бустам (7), (8) и (9), имеют вид

$$A_{Bx}=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2} & \mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2}\\ \mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2} & \mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_{Bx}(\zeta)=\frac{\mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2}\zeta+\mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2}\zeta+\mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2}} \tag{32}$$

$$A_{By}=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2} & i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2}\\ -i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2} & \mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_{By}(\zeta)=\frac{\mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2}\zeta+i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2}-i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2}\zeta} \tag{33}$$

$$A_{Bz}=\pm\begin{pmatrix}e^{\vartheta_z/2} & 0\\ 0 & e^{-\vartheta_z/2}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_{Bz}(\zeta)=e^{\vartheta_z}\zeta. \tag{34}$$

Учитывая, что $\mathrm{ch}\vartheta=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta=\frac{v}{c}$ и $e^{\vartheta}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=\gamma(1+\beta)$, получим

$$\mathrm{ch}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\vartheta+1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}, \tag{35}$$

$$\mathrm{sh}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\vartheta-1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{36}$$

откуда

$$F_{Bx}(\zeta) = \frac{\gamma\beta\zeta+\gamma-1}{(\gamma-1)\zeta+\gamma\beta}, \quad F_{By}(\zeta) = \frac{\gamma\beta\zeta+i(\gamma-1)}{i(1-\gamma)\zeta+\gamma\beta}, \quad F_{Bz}(\zeta) = \gamma(1+\beta)\zeta. \tag{37}$$

Последняя формула описывает *аберрацию* света для движущегося наблюдателя. Действительно, если наблюдатель движется в z-направлении со скоростью v, то $\tilde{\zeta} = \gamma(1+\beta)\zeta$, или, используя формулу (23), получим:

$$e^{i\tilde{\varphi}}\mathrm{ctg}(\tilde{\theta}/2) = \gamma(1+\beta)e^{i\varphi}\mathrm{ctg}(\theta/2), \tag{38}$$

откуда следует, что если в неподвижной системе отсчёта луч света приходил из точки с угловыми координатами (φ, θ), то в движущейся системе направление на источник света будет иметь координаты $(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})$, причём $\tilde{\varphi} = \varphi$, а $\mathrm{ctg}(\tilde{\theta}/2) = \gamma(1+\beta)\mathrm{ctg}(\theta/2)$. После несложных тригонометрических преобразований отсюда можно получить хорошо известную формулу аберрации

$$\cos\tilde{\theta} = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}. \tag{39}$$

Буст B_ψ вдоль произвольного направления ψ относительно выбранной координатной оси можно записать как композицию буста B вдоль этой оси и поворотов R на угол $\pm\psi$: $B_\psi = R(\psi)BR(-\psi)$. Например, легко видеть, что $A_{Bx} = A_{Ry}(\frac{\pi}{2})A_{Bz}A_{Ry}(-\frac{\pi}{2})$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\vartheta}{2} & \mathrm{sh}\frac{\vartheta}{2} \\ \mathrm{sh}\frac{\vartheta}{2} & \mathrm{ch}\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\vartheta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\vartheta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Вигнеровское вращение

Хорошо известно [6], что бусты не образуют подгруппы группы Лоренца, т. е. совокупность двух бустов в неколлинеарных направлениях уже не является бустом, а образует композицию буста и поворота, так называемого вигнеровского вращения. Продемонстрируем это явление.

Пусть первый буст B_x осуществляется с быстротой ϑ_1 вдоль оси x, а второй – с быстротой ϑ_2 в направлении α, а именно вдоль прямой, лежащей в плоскости

xy и повернутой относительно оси x на угол α. Соответствующая спин-матрица B_α будет иметь вид

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} & e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} \\ e^{-i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} \end{pmatrix}$$

Последовательное применение этих двух бустов даст матрицу

$$B = B_\alpha B_x = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} & e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} \\ e^{-i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2} & \operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу можно записать как буст B_ψ с быстротой ϑ_3 в направлении ψ и последующий поворот $R(\omega)$ в плоскости xy на угол вигнеровского вращения ω:

$$B = R(\omega)B_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_3}{2} & e^{i\psi}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_3}{2} \\ e^{-i\psi}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_3}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_3}{2} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая верхние левые ячейки в этих матричных произведениях, получим уравнение

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} + e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta_3}{2}e^{i\omega/2},$$

откуда можно найти быстроту ϑ_3 и угол ω вигнеровского вращения. Для последнего получим

$$\begin{aligned} \omega &= 2\arg\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} + e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2}\right) = \\ &= 2\arg\left(1 + e^{i\alpha}\operatorname{th}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{th}\frac{\vartheta_2}{2}\right) = \\ &= 2\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\operatorname{cth}(\vartheta_1/2)\operatorname{cth}(\vartheta_2/2) + \cos\alpha}, \end{aligned}$$

где в силу соотношений (35), (36) $\operatorname{cth}(\vartheta_1/2)\operatorname{cth}(\vartheta_2/2) = \sqrt{\frac{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}{(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)}}$.

Таким образом, мы видим, что комплексное (спиновое) представление преобразований Лоренца позволяет очень быстро получить элегантное выражение для угла вигнеровского поворота, которое обычно выводится в векторной форме в результате весьма громоздких вычислений.

Заключение

В заключение напомним несколько хорошо известных свойств дробно-линейной функции (см., например, [1]) и дадим их интерпретацию с точки зрения преобразований Лоренца. Во-первых, дробно-линейная функция полностью определяется заданием своего действия на трёх произвольных несовпадающих точках. Это означает, что наблюдатель с помощью выбора своей скорости (модуля и направления) может добиться, чтобы любые три источника света оказались в трёх заранее заданных точках его небесной сферы.

Во-вторых, нетривиальная дробно-линейная функция имеет две, и только две неподвижные точки (возможно совпадающие). Следовательно, любое нетривиальное преобразование Лоренца сохраняет два, и только два (возможно совпадающих) направления на небесной сфере наблюдателя.

Во-третьих, поскольку действие дробно-линейной функции является конформным на сфере Римана, в частности, она отображает окружности в окружности, то форма изображения объекта, наблюдаемого под малым углом, будет одинаковой для всех наблюдателей – отличаться будут только видимый угловой размер и направление. В частности, изображения сфер (любых размеров) будут представлять собой окружности для всех подвижных инерциальных наблюдателей, несмотря на лоренцево сокращение длины.

В предсталенной работе в явной форме описано действие дробно-линейной функции на расширенной комплексной плоскости (сфере Римана) как эквивалентное действие преобразований Лоренца на небесной сфере наблюдателя в специальной теории относительности. Данный подход может быть использован в университетах как при проведении занятий со студентами по курсу ТФКП, так и на занятиях по теоретической физике, способствуя лучшему усвоению учебного материала за счёт установления взаимосвязей между разными предметными курсами.

Статья поступила в редакцию 10.07.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. Румер Ю. Б., Фет А. И. Теория групп и квантованные поля. М.: Наука, 1977. 248 с.
3. Carmeli M. Group theory and general relativity. London: Imperial College Press, 1977. 391 p.
4. Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford: Oxford University Press, 2000. 592 p.
5. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время: в 2 т. Т. 1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля / пер. с англ. М.: Мир, 1987. 528 с.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация: в 3 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 3. 510 с.
7. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958. 368 с.
8. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 376 с.

REFERENCES

1. Lavrent'yev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p.
2. Rumer Yu. B., Fet A. I. *Teoriya grupp i kvantovannyye polya* [Group theory and quantized fields]. Mosocw, Nauka Publ., 1977. 248 p.
3. Carmeli M. Group theory and general relativity. London, Imperial College Press, 1977. 391 p.
4. Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford, Oxford University Press, 2000. 592 p.
5. Penrose R., Rindler V. *Spinory i prostranstvo-vremya: v 2 t. T. 1. Dva-spinornoye ischisleniye i relyativistskiye polya* [Spinors and Space-Time: in 2 vols. Vol. 1. Two-Spinor calculus and relativistic fields]. Moscow, Mir Publ., 1987. 528 p.
6. Misner Ch., Thorne K., Wheeler J. *Gravitatsiya: v 3 t.* [Gravitation: in 3 vols.]. Moscow, Mir Publ., 1977. Vol. 3. 510 p.
7. Gelfand I. M., Minlos R. A., Shapiro Z. Ya. *Predstavleniya gruppy vrashcheniy i gruppy Lorentsa, ikh primeneniya* [Representations of the rotation group and the Lorentz group, their applications]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 368 p.
8. Naimark M. A. *Lineynyye predstavleniya gruppy Lorentsa* [Linear representations of the Lorentz group]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 376 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Тришин Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: trishinvn@bmstu.ru;

Тришина Наталия Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета); доцент Высшего химического колледжа Российского химико-технологического университета имени Д. И. Менделеева;
e-mail: ntrishina@bmstu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir N. Trishin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: trishinvn@bmstu.ru;

Natalia E. Trishina – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University; Assoc. Prof., High Chemical College of Mendeleev University of Chemical Technology of Russia;
e-mail: ntrishina@bmstu.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Тришин В. Н., Тришина Н. Е. Группа Лоренца и дробно-линейные преобразования комплексной плоскости // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 57–69.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-57-69

FOR CITATION

Trishin V. N., Trishina N. E. The Lorentz group and linear fractional transformations of the complex plane. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 57–69.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-57-69