

УДК 537.632

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-15-32

ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ТУННЕЛИРОВАНИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ЧЕТЫРЁХЪЯМНОЙ ЛОВУШКЕ ПРИ УСЛОВИИ НАЧАЛЬНОГО РАВНОЗАСЕЛЕНИЯ ЯМ ЛОВУШКИ

Васильева О. Ф., Зинган А. П.

*Приднестровский государственный университет имени Т. Г. Шевченко
МД 3300, г. Тирасполь, ул. 25 лет Октября, д. 128, Молдова*

Аннотация

Целью работы является теоретическое исследование временной эволюции бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке.

Процедура и методы. Проведены теоретические исследования гамильтониана взаимодействия, описывающего временную эволюцию бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке в условиях линейного туннелирования.

Результаты. Получены аналитические решения системы дифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке.

Теоретическая значимость. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке определяется начальной разностью фаз, что даёт возможность фазового управления процессом туннелирования бозе-атомов в ловушках.

Ключевые слова: бозе-атомы, туннелирование, четырёхъямная оптическая ловушка

TEMPORAL EVOLUTION OF TUNNELING OF BOSE-CONDENSED ATOMS IN A QUADRUPOLE TRAP UNDER THE CONDITION OF INITIAL EQUIPOPULATION OF TRAP PITS

O. Vasilieva, A. Zingan

*Pridnestrovian State University 12
8 ulitsa 25 Oktyabrya, Tiraspol MD3300, Moldova*

Abstract

Aim of this work is to theoretically investigate the temporal evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap

Methodology. Theoretical studies of the interaction Hamiltonian describing the time evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap under linear tunneling conditions have been carried out

Results. Analytical solutions are obtained for a system of differential equations describing the time evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap.

Research implications. The time evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap is determined by the initial phase difference, which makes it possible to phase-control the process of Bose-atom tunneling in traps

Key words: Bose atoms, tunneling, four-well optical trap.

Введение

С момента первой экспериментальной реализации бозе-эйнштейновского конденсата прошло достаточно много времени, однако изучение данного явления до сих пор является актуальной задачей. За последнее десятилетие был достигнут значительный экспериментальный и теоретический прогресс в изучении свойств этого нового состояния вещества. Было изучено туннелирование атомов в двойной яме [1–4]. В [5] был численно изучен процесс туннелирования солитонов в двухъямном бозе-конденсате. Были получены не привычные джозефсоновские колебания, а прямоугольные колебания, что доказывает топологическую устойчивость и локализованность солитонов, распространяющихся в нелинейной среде. В [6] показано, что, изменяя конфигурацию ловушки, можно вызвать переход от джозефсоновских колебаний к явлению квантового самозахвата системы бозе-атомов. В [7] исследовалась вероятность транзитной передачи частиц из одной ямы в другую при наличии и отсутствии диполь-дипольного и когерентного взаимодействий.

Постепенно началось исследование бозе-конденсата в тройной ловушке [8–13]. Добавление ещё одной ямы приводит к гамильтониану с двумя степенями свободы, который в общем случае является неинтегрируемым и, следовательно, способен демонстрировать смешанную регулярно-хаотическую динамику. Возникновение хаоса в неинтегрируемой системе оказывает своё уникальное влияние на временную эволюцию бозе-конденсата. Так, динамика бозе-конденсированных атомов в тройных ловушках приводит к нескольким интересным возможностям, таким как: поведение конденсата, подобное транзистору [14], бозе-конденсат рассматривается в качестве атомотронного переключающегося устройства [15] и в качестве переноса одиночных атомов исток-сток [16].

В [17] рассмотрена система бозе-конденсированных атомов в ловушке с четырьмя ямами. Такая система была подробно проанализирована в [18]. В [17] система бозе-конденсированных атомов представлена как линейный тример, слабо связанный с четвёртой лункой (ямой-мономером). Бозе-конденсированная система рассматривалась как двухчастичная (тример и мономер) модель Бозе-Хаббарда. Предсказаны исходные конфигурации тримера, которые устойчивы к возмущениям мономера. Показано, что, изменяя начальные параметры заселения мономера, можно прийти к инверсному состоянию заселённости ямы-тримера.

Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим когерентную динамику туннелирования бозе-конденсированных атомов в ловушке, состоящей из четырёх ям, в условиях линейного процесса туннелирования. При этом будем считать, что константы линейного процесса туннелирования между ямами одинаковые: $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23} = \chi_{14} = \chi$ (рис. 1). Потенциальный барьер между ямами ловушки допускает туннелирование бозе-

атомов между всеми четырьмя ямами. Гамильтониан взаимодействия в этом случае имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = -\hbar\chi(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^+) - \hbar\chi(\hat{a}_2^+\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3^+) - \hbar\chi(\hat{a}_3^+\hat{a}_4 + \hat{a}_3\hat{a}_4^+) - \hbar\chi(\hat{a}_1^+\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_4^+), \quad (1)$$

где χ – константа линейного процесса туннелирования бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке, $\hat{a}_j$ – оператор уничтожения атома в j -ой яме ($j = 1, 2, 3, 4$).

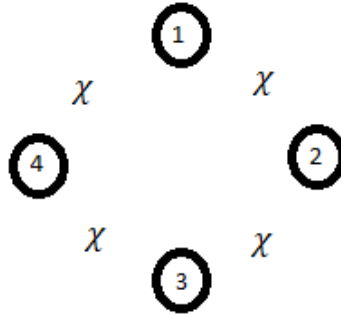


Рис. 1 / Fig. 1. Схема четырёхъямной ловушки / Scheme of a quadrupole trap

Источник: данные авторов

Из гамильтониана взаимодействия (1) получаем систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд a_1, a_2, a_3 и a_4 :

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= -\chi(a_2 + a_4), \\ i\dot{a}_2 &= -\chi(a_1 + a_3), \\ i\dot{a}_3 &= -\chi(a_2 + a_4), \\ i\dot{a}_4 &= -\chi(a_1 + a_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (2) записана при учёте выполнения условия точного резонанса. Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2) запишутся в виде: $a_j|_{t=0} = a_{j0}e^{-i\varphi_{j0}}$, где $j = 1, 2, 3, 4$.

Введём в рассмотрение населённости атомов в четырёхъямной ловушке: $n_j = |a_j|^2$, где $j = 1, 2, 3, 4$.

Если в начальный момент времени присутствуют бозе-конденсированные атомы в каждой яме четырёхъямной ловушки, то динамика населённостей в ямах будет определяться начальными плотностями частиц в ямах и начальными разностями фаз. В этом случае удастся получить аналитические выражения для плотностей атомов в четырёхъямной ловушке:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_{30} + (n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}\cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\cos^4(\chi t) - 2(n_{30} + \\ &\sqrt{n_{10}n_{30}}\cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\cos^2(\chi t) + 2(\sqrt{n_{10}n_{20}}\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \\ &\sqrt{n_{10}n_{40}}\sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20}n_{30}}\sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}\sin(\varphi_{30} - \\ &\varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos^3(\chi t) + (n_{20} + n_{40} + 2\sqrt{n_{20}n_{40}}\cos(\varphi_{20} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_{40}) \left. \begin{aligned} & \sin^2(\chi t) \cos^2(\chi t) - 2 \left(\sqrt{n_{20} n_{30}} \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sqrt{n_{30} n_{40}} \sin(\varphi_{30} - \right. \\ & \left. \varphi_{40}) \right) \sin(\chi t) \cos(\chi t), \\ & n_2 = n_{40} + \left(n_{20} + n_{40} + 2 \sqrt{n_{20} n_{40}} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}) \right) \cos^4(\chi t) - 2 \left(n_{40} + \right. \\ & \left. \sqrt{n_{20} n_{40}} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}) \right) \cos^2(\chi t) - 2 \left(\sqrt{n_{10} n_{20}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \right. \\ & \left. \sqrt{n_{10} n_{40}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{30} n_{40}} \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20} n_{30}} \sin(\varphi_{20} - \right. \\ & \left. \varphi_{30}) \right) \sin(\chi t) \cos^3(\chi t) + \left(n_{10} + n_{30} + 2 \sqrt{n_{10} n_{30}} \cos(\varphi_{10} - \right. \\ & \left. \varphi_{30}) \right) \sin^2(\chi t) \cos^2(\chi t) + 2 \left(\sqrt{n_{10} n_{40}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{30} n_{40}} \sin(\varphi_{30} - \right. \\ & \left. \varphi_{40}) \right) \sin(\chi t) \cos(\chi t), \\ & n_3 = n_{10} + \left(n_{10} + n_{30} + 2 \sqrt{n_{10} n_{30}} \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}) \right) \cos^4(\chi t) - 2 \left(n_{10} + \right. \\ & \left. \sqrt{n_{10} n_{30}} \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}) \right) \cos^2(\chi t) - 2 \left(\sqrt{n_{10} n_{20}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \right. \\ & \left. \sqrt{n_{10} n_{40}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20} n_{30}} \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sqrt{n_{30} n_{40}} \sin(\varphi_{30} - \right. \\ & \left. \varphi_{40}) \right) \sin(\chi t) \cos^3(\chi t) + \left(n_{20} + n_{40} + 2 \sqrt{n_{20} n_{40}} \cos(\varphi_{20} - \right. \\ & \left. \varphi_{40}) \right) \sin^2(\chi t) \cos^2(\chi t) + 2 \left(\sqrt{n_{10} n_{20}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sqrt{n_{10} n_{40}} \sin(\varphi_{10} - \right. \\ & \left. \varphi_{40}) \right) \sin(\chi t) \cos(\chi t), \\ & n_4 = n_{20} + \left(n_{20} + n_{40} + 2 \sqrt{n_{20} n_{40}} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}) \right) \cos^4(\chi t) - 2 \left(n_{40} + \right. \\ & \left. \sqrt{n_{20} n_{40}} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}) \right) \cos^2(\chi t) + 2 \left(\sqrt{n_{10} n_{20}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \right. \\ & \left. \sqrt{n_{10} n_{40}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{30} n_{40}} \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20} n_{30}} \sin(\varphi_{20} - \right. \\ & \left. \varphi_{30}) \right) \sin(\chi t) \cos^3(\chi t) + \left(n_{10} + n_{30} + 2 \sqrt{n_{10} n_{30}} \cos(\varphi_{10} - \right. \\ & \left. \varphi_{30}) \right) \sin^2(\chi t) \cos^2(\chi t) - 2 \left(\sqrt{n_{10} n_{20}} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sqrt{n_{30} n_{20}} \sin(\varphi_{20} - \right. \\ & \left. \varphi_{30}) \right) \sin(\chi t) \cos(\chi t). \end{aligned} \quad (3)
\end{aligned}$$

Из (3) следует закон сохранения числа бозе-атомов в системе: $n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + n_4(t) = n_{10} + n_{20} + n_{30} + n_{40}$.

Согласно полученной системе уравнений (3) временная эволюция бозе-конденсированных атомов существенно зависит от начального заполнения ям и от начальной разности фаз.

Если в начальный момент времени населённость первой ямы отлична от нуля, а населённости остальных ям равны нулю, то из (2) нетрудно получить выражения, определяющие динамику плотностей бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке:

$$\begin{aligned}
n_1 &= n_{10} \cos^4(\chi t), \\
n_2 &= n_4 = n_{10} \sin^2(\chi t) \cos^2(\chi t), \\
n_3 &= n_{10} \sin^4(\chi t), \end{aligned} \quad (4)$$

где n_{10} – начальная населённость атомов в первой яме четырёхъямной ловушки.

Из (4) и рис. 2 видно, что бозе-конденсированные атомы начинают периодически туннелировать из одной ямы в другую. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(2m \pm 1)}{2\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) первая яма оказывается пустой, а третья максимально заполненной, таким образом создаётся инверсная заселённость первой и третьей ям. А в моменты времени $t_m = \frac{\pi(2m \pm 1)}{4\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) населённости в ямах оказываются одинаковыми.

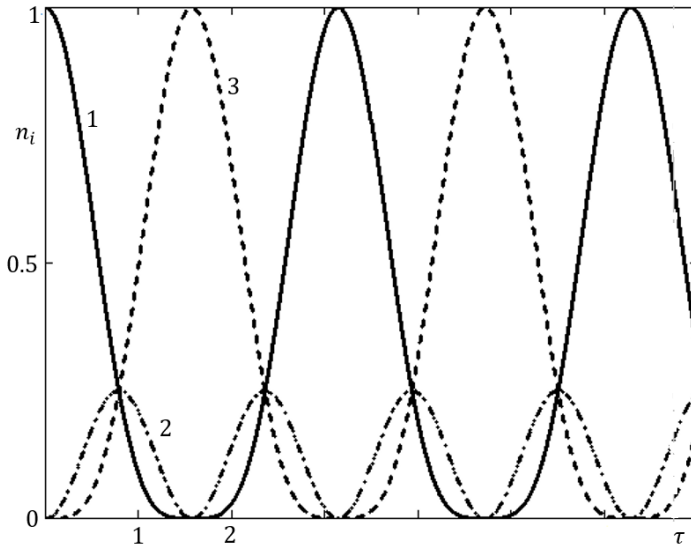


Рис. 2 / Fig. 2. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях начального заселения первой ямы ловушки. Здесь: **1- $n_1(t)$, 2- $n_2(t) = n_4(t)$, 3- $n_3(t)$, $\tau = \chi t$.** / Time evolution of the densities of Bose-condensed atoms in wells under conditions of initial population of the first well of the trap. Here: **1- $n_1(t)$, 2- $n_2(t) = n_4(t)$, 3- $n_3(t)$, $\tau = \chi t$.**

Источник: данные авторов

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени плотности атомов в четырёхъямной ловушке одинаковы $n_{10} = n_{20} = n_{30} = n_{40} = n_0$, тогда систему уравнений (3) можно записать в виде:

$$n_1 = 2n_0 \left((1 + \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\cos^4(\chi t) + (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos^3(\chi t) + (1 + \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}))\sin^2(\chi t)\cos^2(\chi t) - (1 + \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\cos^2(\chi t) - (\sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos(\chi t) + 1 \right),$$

$$n_2 = 2n_0 \left((1 + \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}))\cos^4(\chi t) - (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos^3(\chi t) + (1 + \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\sin^2(\chi t)\cos^2(\chi t) - (1 + \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}))\cos^2(\chi t) + (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos(\chi t) + 1 \right),$$

$$n_3 = 2n_0 \left((1 + \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\cos^4(\chi t) - (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos^3(\chi t) + (1 + \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}))\sin^2(\chi t)\cos^2(\chi t) - (1 + \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\cos^2(\chi t) + (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos(\chi t) + 1 \right),$$

$$n_4 = 2n_0 \left((1 + \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}))\cos^4(\chi t) + (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}))\sin(\chi t)\cos^3(\chi t) + (1 + \cos(\varphi_{10} - \varphi_{30}))\sin^2(\chi t)\cos^2(\chi t) - (1 + \cos(\varphi_{20} - \varphi_{40}))\cos^2(\chi t) - (\sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}))\sin(\chi t)\cos(\chi t) + 1 \right) \quad (5)$$

Проанализируем динамику системы при различных значениях начальных фаз в условиях начального равновзаселения бозе-атомами ям ловушки. Пусть $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$. Система уравнений (5) в этом случае упрощается, и записывается в виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_4 = n_0(1 + \sin(4\chi t)), \\ n_2 &= n_3 = n_0(1 - \sin(4\chi t)), \end{aligned} \quad (6)$$

Временная эволюция туннелирования бозе-атомов в ямах для этого случая представлена на рис. 3. Из рис. 3 видно, что динамика изменения со временем населённости ям четырёхъямной ловушки является периодической. Период колебаний в этом случае равен $\frac{\pi}{2}$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi m}{4\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) населённости в ямах становятся равными начальному значению плотности бозе-атомов: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. При этом в начальный момент времени плотности атомов в первой и четвёртой ямах ловушки увеличиваются за счёт уменьшения атомов в результате линейного туннелирования из второй и третьей ям. В момент времени $t_m = \frac{\pi m}{8\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) плотности атомов в первой и четвёртой ямах становятся максимальными и равными $n_1 = n_4 = n_{\max} = 2n_0$, а плотности атомов в третьей и во второй ямах соответственно равными $n_2 = n_3 = n_{\min} = 0$.

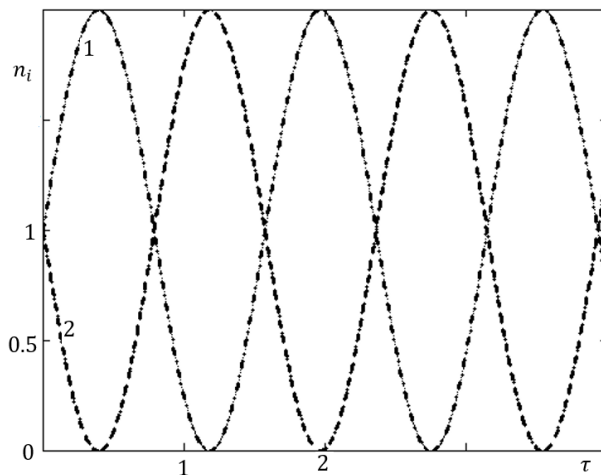


Рис. 3 / Fig. 3. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$. Здесь 1- $n_1(t) = n_4(t)$, 2- $n_2(t) = n_3(t)$, $\tau = \chi t$.

/ Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$. Here 1- $n_1(t) = n_4(t)$, 2- $n_2(t) = n_3(t)$, $\tau = \chi t$.

Источник: данные авторов

Если $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$ либо π , то система бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке будет находиться в покое: $n_1(t) = n_2(t) = n_3(t) = n_4(t) = n_0 = \text{const.}$

Однако, если $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \pi$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$, в этом случае система будет эволюционировать согласно (7):

$$\begin{aligned} n_1 &= n_3 = n_0(1 + \sin^2(2\chi t)), \\ n_2 &= n_4 = n_0 \cos^2(2\chi t). \end{aligned} \quad (7)$$

Плотность атомов в первой (третьей) яме за всё время туннелирования атомов будет больше начальной плотности атомов в ямах n_0 , в то время как плотность атомов во второй (четвёртой) яме будет находиться в пределах от нуля до n_0 . К моменту времени $t_m = \frac{\pi(2m+1)}{4\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) $n_1 = n_3 = n_{\max} = 2n_0$, а $n_2 = n_4 = n_{\min} = 0$, таким образом вторая и четвёртая ямы оказываются полностью пустыми, а первая и третья максимально заполненными. Колебания плотности бозе-атомов являются периодическими с периодом равным $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4).

Временная эволюция изменится, если $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$, решение системы уравнений (2), запишется в виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_3 = \frac{n_0(2 + \sin(4\chi t) - \sin(2\chi t))}{2}, \\ n_2 &= \frac{n_0(\sin^2(2\chi t) + 2\sin(2\chi t) - \sin(4\chi t) + 2)}{2}, \\ n_4 &= \frac{n_0(\sin^2(2\chi t) - \sin(2\chi t) - \sin(4\chi t) + 2)}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

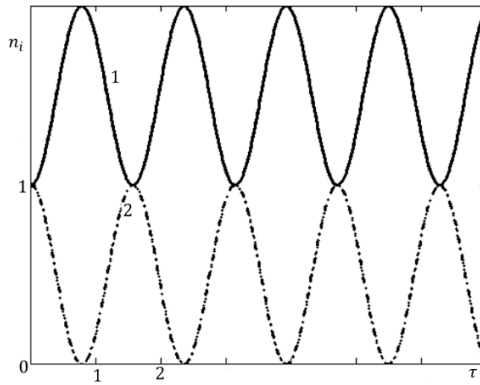


Рис. 4 / Fig. 4. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \pi$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$. Здесь 1- $n_1(t) = n_3(t)$, 2- $n_2(t) = n_4(t)$, $\tau = \chi t$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \pi$, end $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$. Here 1- $n_1(t) = n_3(t)$, 2- $n_2(t) = n_4(t)$, $\tau = \chi t$.

Источник: данные авторов

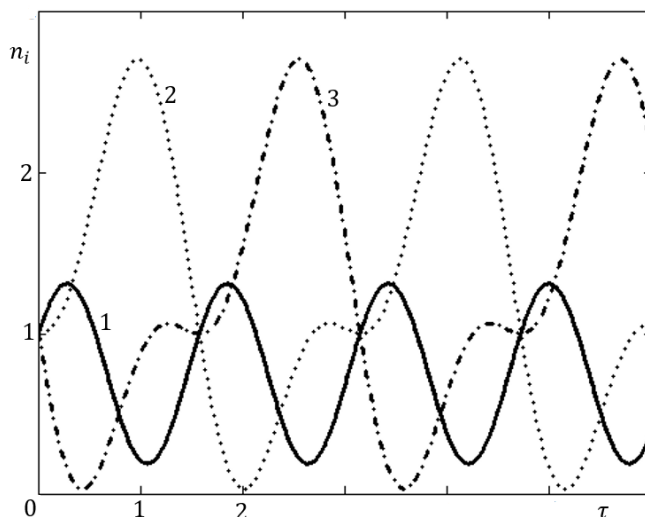


Рис. 5 / Fig. 5. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$. Здесь **1**- $n_1(t) = n_3(t)$, **2**- $n_2(t)$, **3**- $n_4(t)$, $\tau = \chi t$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$, end $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$. Here **1**- $n_1(t) = n_3(t)$, **2**- $n_2(t)$, **3**- $n_4(t)$, $\tau = \chi t$.

Источник: данные авторов

В этом случае, как видно из (8) и рис. 5, плотность атомов в первой и в третьей ямах четырёхъямной ловушки оказываются равными. Временная эволюция бозе-атомов в этих ямах является периодической с периодом равным $\frac{\pi}{2}$, причём полного истощения плотности атомов не возникает. В моменты времени $t_m = \frac{\arccos \sqrt{\frac{5}{6} + \frac{\pi}{2}(m+1)}}{\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) плотности атомов в первой и в третьей ямах становятся максимально возможными, причём $n_0 < n_1 = n_{1max} < \frac{3n_0}{2}$. В моменты времени $t_m = \frac{\arccos \sqrt{\frac{5}{6} + \frac{\pi}{4}(m+1)}}{\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) плотность атомов в первой и в третьей ямах является минимальной, причём $0 < n_1 = n_{1min} < \frac{n_0}{2}$. Что касается поведения атомов во второй и четвёртой ямах четырёхъямной ловушки, то временная эволюция бозе-атомов в этих ямах является периодической и модулированной в пределах одного периода. Плотность атомов во второй яме вначале увеличивается за счёт туннелирования атомов из

четвёртой в первую яму, а затем при $t > t_m = \frac{\arccos \sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m}{\chi}$ ($m = 0, 1, \dots$) обогащается за счёт туннелирования атомов из третьей во вторую яму. В моменты времени $t_m = \frac{3\pi m}{10\chi}$ ($m = 1, 2, \dots$) плотность бозе-атомов во второй яме достигает максимального значения, лежащего в пределах $2n_0 < n_2 = n_{2max} < 3n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{13\pi m}{20\chi}$ ($m = 1, 2, \dots$) плотность бозе-атомов во второй яме достигает минимального значения, лежащего в пределах $0 < n_2 = n_{2min} < 0,1n_0$, причём полного истощения атомов во второй яме не наступает. Что касается плотности атомов в четвёртой яме, динамика изменения является периодической и модулированной в пределах периода. В начальный момент времени плотность атомов в четвёртой яме уменьшается к моменту времени $t_m = \frac{3\pi m}{20\chi}$ ($m = 1, 2, \dots$) и становится минимально возможной $0 < n_4 = n_{4min} < 0,1n_0$. К моменту времени $t_m = \frac{4\pi m}{5\chi}$ ($m = 1, 2, \dots$) плотность бозе-атомов достигает своего максимального значения $2n_0 < n_4 = n_{4max} < 3n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(2m+1)}{2\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) популяции бозе-атомов в ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(10m+1)}{10\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) популяция бозе-атомов во второй яме становится равной $n_1 = n_3$ и больше n_0 . В моменты времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) популяции бозе-атомов в первой, третьей и четвёртой ямах равны $n_1 = n_3 = n_4 = \frac{n_0}{2}$, а плотность атомов во второй яме равна $n_2 = \frac{5n_0}{2}$. Создаётся инверсная населённость второй и четвёртой ям в моменты времени $t_m = \frac{\pi(4m+3)}{4\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), таким образом популяции бозе-атомов в первой, третьей и во второй ямах $n_1 = n_3 = n_2 = \frac{n_0}{2}$, а плотность атомов в четвёртой яме равна $n_4 = \frac{5n_0}{2}$. К моменту времени $t_m = \frac{\pi(5m+3)}{5\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) плотность атомов в четвёртой яме равна плотности атомов в первой (третьей) яме: $n_4 = n_1 = n_3 > n_0$.

Если начальные разности фаз $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$, то эволюция системы бозе-атомов в четырёхъямной ловушке будет описываться системой уравнений (9):

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{n_0(\sin^2(2\chi t) + 2\sin(2\chi t) + 2)}{2}, \\ n_2 &= n_4 = \frac{n_0(\cos(4\chi t) + 3)}{4}, \\ n_4 &= \frac{n_0(\sin^2(2\chi t) - 2\sin(2\chi t) + 2)}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

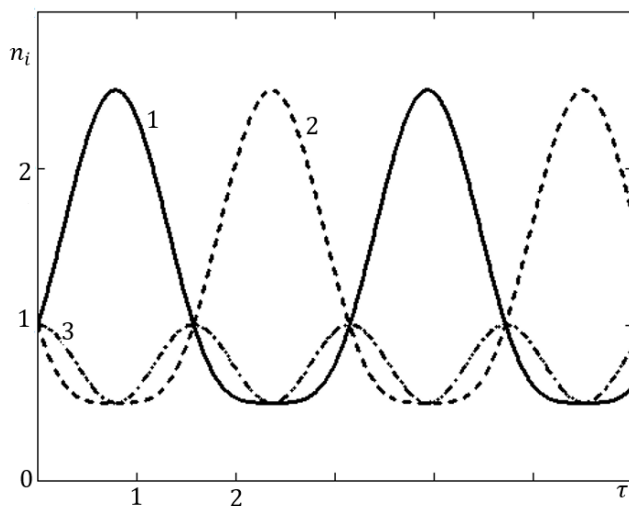


Рис. 6 / Fig. 6. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$. Здесь 1- $n_1(t)$, 2- $n_3(t)$, 3- $n_2(t) = n_4(t)$, $\tau = \chi t$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$, end $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$. Here 1- $n_1(t)$, 2- $n_3(t)$, 3- $n_2(t)$, $\tau = \chi t$.

Источник: данные авторов

В этом случае, как видно из (9) и рис. 6, динамика системы является периодической. Причём населённости второй и четвёртой ямы в любой момент времени принимают одинаковые значения, период колебаний населённостей этих ям равен $\frac{\pi}{2}$. В начальный момент времени населённости второй, третьей и четвёртой ям уменьшаются, а населённость первой ямы увеличивается, и к моменту времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ ($m = 0, 1, 2 \dots$) становятся равными $n_2 = n_3 = n_4 = n_{\min} = \frac{n_0}{2}$, а населённость первой ямы становится максимальной $n_1 = n_{1\max} = \frac{5n_0}{2}$. Следует отметить, что полного истощения бозе-атомов в ямах не наступает, часть атомов захватываются одной из ям ловушки. Осцилляции населённостей становятся неполными, и проявляется явление квантового самохвата бозе-атомов в ямах четырёхямной ловушки. Что касается плотностей атомов во второй и четвёртой ямах, то она не превышает начального значения плотности бозе-атомов n_0 . В моменты времени $t_m = \frac{3\pi(4m+1)}{4\chi}$ ($m = 0, 1, 2 \dots$) создаётся инверсная населённость первой и третьей ям: $n_2 = n_4 = n_1 = n_{\min} = \frac{n_0}{2}$ и $n_3 = n_{3\max} = \frac{5n_0}{2}$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi m}{2\chi}$ ($m = 0, 1, 2 \dots$) популяции

бозе-атомов в ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$.

Рассмотрим ещё один случай, когда $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{4}$, тогда система (5), описывающая временную эволюцию бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке, переписывается в виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{n_0(2\sqrt{2}\sin(2\chi t) + \sqrt{2}\sin(4\chi t) + 4)}{4}, \\ n_2 &= \frac{n_0(2\sqrt{2}\sin(2\chi t) - \sqrt{2}\sin(4\chi t) + 4)}{4}, \\ n_3 &= \frac{n_0(\sqrt{2}\sin(4\chi t) - 2\sqrt{2}\sin(2\chi t) + 4)}{4}, \\ n_4 &= -\frac{n_0(2\sqrt{2}\sin(2\chi t) + \sqrt{2}\sin(2\chi t) - 4)}{4}. \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае в моменты времени $t_m = \frac{\pi m}{2\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) популяции бозе-атомов в ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. В начальный момент времени плотность атомов в третьей и четвёртой ямах уменьшаются, а плотности атомов в первой и второй ямах увеличиваются. Колебания популяций бозе-частиц являются модулированными в пределах одного периода. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(6m+1)}{6\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) плотность атомов в первой яме достигает своего максимального значения $n_{1max} = \frac{n_0(3\sqrt{6}+8)}{8} > n_0$, а плотность атомов в четвёртой яме своего минимального значения $n_{4min} = \frac{n_0(8-3\sqrt{6})}{8} < n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(3m+1)}{3\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) плотность атомов во второй яме достигает своего максимального значения $n_{2max} = \frac{n_0(3\sqrt{6}+8)}{8} > n_0$, а плотность атомов в третьей яме своего минимального значения $n_{3min} = \frac{n_0(8-3\sqrt{6})}{8} < n_0$. Таким образом, в моменты времени $t_m = \frac{\pi(6m+1)}{6\chi}$ и $t_m = \frac{\pi(3m+1)}{3\chi}$ создаётся в системе инверсная населённость в первой и во второй ямах, а также в четвёртой и третьей ямах четырёхъямной ловушки. К моменту времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ плотность атомов в первой и второй ямах оказываются равными $n_1 = n_2 = \frac{n_0(\sqrt{2}+2)}{2} > n_0$, а плотность атомов в третьей и в четвёртой $n_3 = n_4 = \frac{n_0(2-\sqrt{2})}{2} < n_0$ (см. рис. 7).

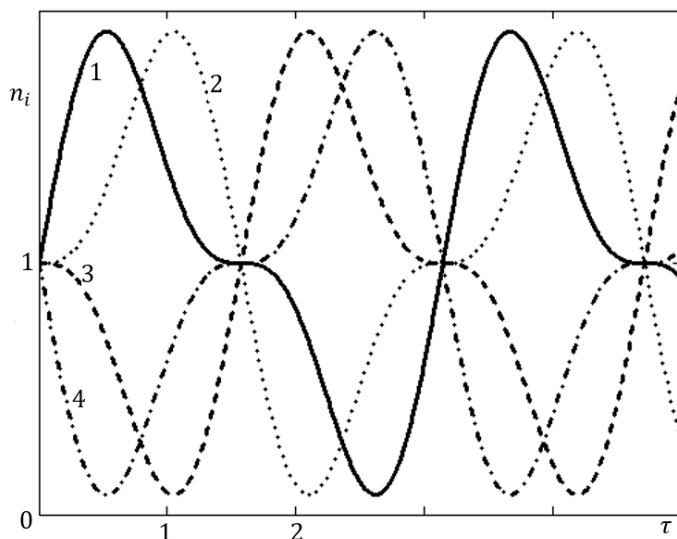


Рис. 7 / Fig. 7. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{4}$. Здесь 1- $n_1(t)$, 2- $n_2(t)$, 3- $n_3(t)$, 4- $n_4(t)$, $\tau = \chi t$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{4}$. Here 1- $n_1(t) = n_3(t)$, 2- $n_2(t)$, 3- $n_4(t)$, $\tau = \chi t$.

Источник: данные авторов

Если задать начальные разности фаз такие, когда $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{4}$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$, тогда система (5), описывающая временную эволюцию туннелирования бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке, запишется в виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{n_0(2\sqrt{2}\sin(2\chi t) + \sin^2(2\chi t)(2 - \sqrt{2}) + 4)}{4}, \\ n_2 &= n_4 = \frac{n_0(\cos(4\chi t)(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} + 6)}{4}, \\ n_3 &= \frac{n_0(-2\sqrt{2}\sin(2\chi t) + \sin^2(2\chi t)(2 - \sqrt{2}) + 4)}{4}. \end{aligned} \quad (11)$$

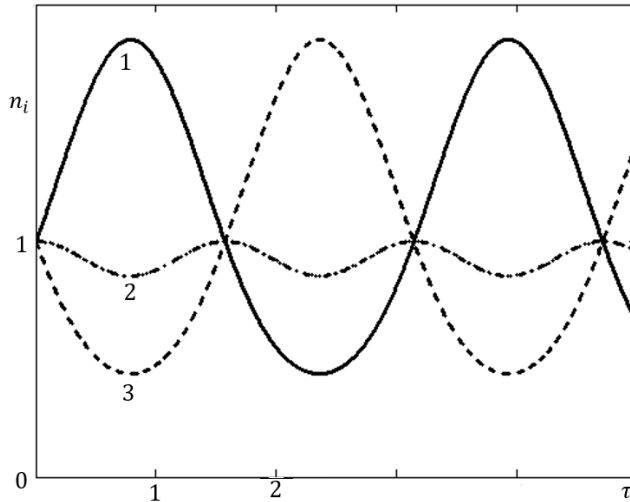


Рис. 8 / Fig. 8. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{4}$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$. Здесь 1- $n_1(t)$, 2- $n_2(t) = n_4(t)$, 3- $n_3(t)$, $\tau = \chi t$. / Time evolution of the densities of Bose-condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{4}$, and $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$. Here 1- $n_1(t)$, 2- $n_2(t) = n_4(t)$, 3- $n_3(t)$, $\tau = \chi t$.

Источник: данные авторов

В этом случае плотность атомов изменяется со временем периодически (рис. 8). Период колебаний n_2 и n_4 равен $\frac{\pi}{2}$, а n_1 и n_3 равен π . В начальный момент времени плотность бозе-атомов в первой ловушке увеличивается, в то время как плотности атомов в остальных ямах уменьшаются. К моменту времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ плотность атомов в первой яме становится равной максимально возможной $n_1 = n_{1max} = \frac{n_0(\sqrt{2}+6)}{4}$, а плотности атомов в остальных ямах минимально возможными $n_2 = n_4 = n_{min} = \frac{n_0(\sqrt{2}+2)}{4} < n_0$, а $n_3 = n_{3min} = \frac{3n_0(2-\sqrt{2})}{4} < n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(4m+3)}{4\chi}$ создаётся инверсная населённость первой и третьей ям: $n_3 = n_{3max} = \frac{n_0(\sqrt{2}+6)}{4}$ и $n_1 = n_{1min} = \frac{3n_0(2-\sqrt{2})}{4} < n_0$. Если $t_m = \frac{\pi m}{2\chi}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то плотности бозе-атомов во всех четырёх ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. Полного истощения бозе-атомов в ямах

ловушки в процессе временной эволюции не наблюдается, т. е. атомы захватываются ловушкой и проявляется явление квантового самозахвата.

Заключение

Таким образом, изменяя начальную разность фаз четырёх атомных конденсатов, можно получить различные режимы эволюции системы. В найденные моменты временной эволюции можно получить различные соотношения между населённостями атомов в ямах: максимальное и минимальное заполнение ям бозе-атомами, создание инверсной населённости бозе-атомов в ямах. Получены периодические режимы эволюции атомов, модулированные колебания плотности атомов, явление квантового самозахвата. Задавая необходимую начальную разность фаз, можно получить заданную наперёд динамику плотности атомов в ямах, т. е. осуществить фазовый контроль динамики системы бозе-конденсированных атомов в четырёхямной ловушке.

Впервые разность фаз двух конденсатов была измерена интерферометрическим методом. В [19] предложена оптическая схема детектирования относительной фазы двух бозе-эйнштейновских конденсатов, которые находятся в одной и той же ловушке в двух различных зеemanовских состояниях. Для возбуждения рамановских переходов между конденсатами предлагалось использовать два фазово-когерентных луча. Усиление одного из лучей и ослабление другого может быть признаком существования фазовой когерентности атомов. Используя «метод впечатывания фазы» [20], можно задавать необходимую начальную разность фаз и осуществлять фазовый контроль динамики бозе-конденсированных атомов, получая наперёд заданные значения плотностей атомов в ямах.

Статья поступила в редакцию 01.06.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khadzhi P. I., Vasilieva O. V. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap // Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics. 2011. Vol. 6. No. 4. P. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
2. Jezek D. M., Capuzzi P., Cataldo H. M. Two-mode effective interaction in a double-well condensate // Physical Review A. 2013. Vol. 87. Iss. 5. P. 053625. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.053625.
3. Adriaola J., Goodman R. H., Kevrekidis P. G. Efficient manipulation of Bose-Einstein condensates in a double-well potential (2022). arXiv:2206.01858v2 // arXiv.org: e-Print archive. URL: <https://arxiv.org/abs/2206.01858> (дата обращения: 12.04.2023).
4. Holthaus M. Towards coherent control of a Bose-Einstein in a double well // Physical Review A. 2001. Vol. 64. Iss. 1. P. 011601(R).
5. Ma D., Jia C. Square wave oscillation of soliton in double-well potential trapped BEC (2019). arXiv:1903.00141 // arXiv.org: e-Print archive. URL: <https://arxiv.org/abs/1903.00141> (дата обращения: 12.04.2023).

6. The effects of trap-confinement and interatomic interaction on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose-Einstein condensate / Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K.R., Deb B. // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2019. Vol. 52. No. 15. P. 155301. DOI: 10.1088/1361-6455/ab2b58.
7. Dastidar K. R., Gupta M. Dynamics of dipolar atom-molecular BEC in a double well potential: effect of atom-molecular coherent coupling (2021). arXiv:2106.12274v1 // arXiv.org: e-Print archive. URL: <https://arxiv.org/abs/2106.12274> (дата обращения: 12.04.2023).
8. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трёхъямной симметричной цепочной ловушке // *Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика-Математика*. 2021. № 1. С. 27–38. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38.
9. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке, при условии отличной от нуля начальной заселенности первой ямы // *Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика-Математика*. 2022. № 2. С. 28–41. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41.
10. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system / Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. // *The European Physical Journal D*. 2017. Vol. 71. P. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
11. Dey A., Cohen D., Vardi A. Adiabatic Passage through Chaos // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 121. Iss. 25. P. 250405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.250405.
12. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential / Tonel A. P., Ymai L. H., Wittmann K., Foerster A., Links J. // *SciPost Physics Core*. 2020. Vol. 2. P. 003. DOI: 10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003.
13. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate / Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompert J. // *Physical Review A*. 2016. Vol. 94. Iss. 5. P. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
14. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistor like behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential // *Physical Review A*. 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.
15. Control of tunneling in an atomtronic switching device / Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Links J., Foerster A. // *Communications Physics*. 2018. Vol. 1. P. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
16. Transport and interaction blockade of cold bosonic atoms in a triple-well potential / Schlagheck P., Malet F., Cremon J. C., Reimann S. M. // *New Journal of Physics*. 2010. Vol. 12. P. 065020. DOI: 10.1088/1367-2630/12/6/065020.
17. Karmakar S., Keshavamurthy S. Arnold web and dynamical tunneling in a four-site Bose-Hubbard model // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2021. Vol. 427. P. 133006. DOI: 10.1016/j.physd.2021.133006.
18. Khripkov C., Vardi A., Coher D. Semiclassical theory of strong localization for quantum thermalization // *Physical Review E*. 2018. Vol. 97. Iss. 2. P. 022127. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022127.
19. Javanainen J. Optical detection of the relative phase between two Bose-Einstein condensates // *Physical Review A*. 1996. Vol. 54. Iss. 6. P. R4629. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.R4629.
20. Producing superfluid circulation states using phase imprinting / Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., De Goer M., Longchambon L., Perrin H. // *Physical Review A*. 2018. Vol. 97. Iss. 4. P. 043615. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.043615.

REFERENCES

1. Khadzhi P. I., Vasilieva O. V. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2011, vol. 6, no. 4, pp. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
2. Jezek D. M., Capuzzi P., Cataldo H. M. Two-mode effective interaction in a double-well condensate. In: *Physical Review A*, 2013, vol. 87, iss. 5, pp. 053625. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.053625.
3. Adriazola J., Goodman R. H., Kevrekidis P. G. Efficient manipulation of Bose-Einstein condensates in a double-well potential (2022). arXiv:2206.01858v2. In: *arXiv.org: e-Print archive*. Available at: <https://arxiv.org/abs/2206.01858> (accessed: 12.04.2023).
4. Holthaus M. Towards coherent control of a Bose-Einstein in a double well. In: *Physical Review A*, 2001, vol. 64, iss. 1, pp. 011601(R).
5. Ma D., Jia C. Square wave oscillation of soliton in double-well potential trapped BEC (2019). arXiv:1903.00141. In: *arXiv.org: e-Print archive*. Available at: <https://arxiv.org/abs/1903.00141> (accessed: 12.04.2023).
6. Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K.R., Deb B. The effects of trap-confinement and interatomic interaction on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose-Einstein condensate. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2019, vol. 52, no. 15, pp. 155301. DOI: 10.1088/1361-6455/ab2b58.
7. Dastidar K. R., Gupta M. Dynamics of dipolar atom-molecular BEC in a double well potential: effect of atom-molecular coherent coupling (2021). arXiv:2106.12274v1. In: *arXiv.org: e-Print archive*. Available at: <https://arxiv.org/abs/2106.12274> (accessed: 12.04.2023).
8. Vasil'yeva O. F., Zingan A. P. [Temporary evolution of bose-condensed atoms in a three-well symmetric chain trap]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2021, no. 1, pp. 27–38. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38.
9. Vasil'yeva O. F., Zingan A. P. [Time evolution of Bose-condensed atoms in a three-well trap under the condition of a non-zero initial population of the first well]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2022, no. 2, pp. 28–41. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41.
10. Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system. In: *The European Physical Journal D*, 2017, vol. 71, pp. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
11. Dey A., Cohen D., Vardi A. Adiabatic Passage through Chaos. In: *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, iss. 25, pp. 250405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.250405.
12. Tonel A. P., Ymai L. H., Wittmann K., Foerster A., Links J. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential. In: *SciPost Physics Core*, 2020, vol. 2, pp. 003. DOI: 10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003.
13. Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompert J. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review A*, 2016, vol. 94, iss. 5, pp. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
14. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistor like behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential. In: *Physical Review A*, 2007, vol. 75, iss. 1, pp. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.

15. Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Links J., Foerster A. Control of tunneling in an atomtronic switching device. In: *Communications Physics*, 2018, vol. 1, pp. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
16. Schlagheck P., Malet F., Cremon J. C., Reimann S. M. Transport and interaction blockade of cold bosonic atoms in a triple-well potential. In: *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, pp. 065020. DOI: 10.1088/1367-2630/12/6/065020.
17. Karmakar S., Keshavamurthy S. Arnold web and dynamical tunneling in a four-site Bose-Hubbard model. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021, vol. 427, pp. 133006. DOI: 10.1016/j.physd.2021.133006.
18. Khripkov C., Vardi A., Coher D. Semiclassical theory of strong localization for quantum thermalization. In: *Physical Review E*, 2018, vol. 97, iss. 2, pp. 022127. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022127.
19. Javanainen J. Optical detection of the relative phase between two Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 1996, vol. 54, iss. 6, pp. R4629. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.R4629.
20. Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., De Goer M., Longchambon L., Perrin H. Producing superfluid circulation states using phase imprinting. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 97, iss. 4, pp. 043615. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.043615.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga F. Vasilieva – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Anna P. Zingan – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция туннелирования бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке при условии начального равнозаселения ям ловушки // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 15–32.

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-15-32

FOR CITATION

Vasilieva O. F., Zingan A. P. Temporal evolution of tunneling of bose-condensed atoms in a quadrupole trap under the condition of initial equipopulation of trap pits. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 15–32.

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-15-32