# ФИЗИКА

УДК 517.95
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-6-14

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НАВЬЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

***Алгазин О. Д., Копаев А. В.***

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана*
*(национальный исследовательский университет)*
*105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

***Аннотация***
**Цель:** найти точные решения краевой задачи для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое с граничными условиями Навье.
**Процедура и методы.** В статье рассмотрена краевая задача для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое $x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$ с граничными условиями Навье. Эта задача сводится к последовательному решению двух задач Дирихле для уравнения Пуассона, явные решения которых получены авторами ранее с помощью преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста.
**Результаты.** Получены точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения, правая часть которого является полигармонической функцией по $x$, в частности полиномом. В этом случае решение также является полигармонической функцией по $x$, в частности полиномом.
**Теоретическая и/или практическая значимость** заключается в получении точных решений краевой задачи Навье для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое.
***Ключевые слова:*** бигармоническое уравнение, уравнение Пуассона, задача Дирихле, функция Грина

# EXACT SOLUTIONS OF THE NAVIER BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A BIHARMONIC EQUATION WITH A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE IN AN INFINITE LAYER

***O. Algazin, A. Kopaev***

*Bauman Moscow State Technical University*

*ulitsa Vtoraya Baumanskay 5 build. 1, Moscow 105005, Russian Federation*

***Abstract***
**Aim.** Purpose is to find exact solutions of the boundary value problem for the biharmonic equation in an infinite $n$-dimensional layer with Navier boundary conditions
**Methodology.** The paper considers a boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer. The paper considers a boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer $x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$ with Navier boundary conditions. This problem reduces to the sequential solution of two Dirichlet problems for the Poisson equation, the explicit solutions of which were obtained earlier by the authors using the Fourier transform of generalized functions of slow growth.
**Results.** Exact solutions of the Navier boundary value problem are obtained for a biharmonic equation whose right-hand side is a polyharmonic function in $x$, in particular a polynomial. In this case, the solution is also a polyharmonic function in $x$, in particular a polynomial.
**Research implications.** They consist in obtaining exact solutions of the Navier boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite $n$-dimensional layer.
***Keywords:*** biharmonic equation, Poisson equation, Dirichlet problem, Green's function

## Введение

Бигармоническое уравнение $\Delta^2 u = f$ используется для описания стационарных процессов различной физической природы. Например, в плоских задачах теории упругости решение $u$ даёт прогиб пластины или балки под действием нагрузки $f$. В зависимости от способа закрепления краёв пластины или балки задаются различные граничные условия. Если, например, края пластины шарнирно закреплены, то получаем на границе Г условия:

$$u|_\Gamma = 0, \qquad \Delta u|_\Gamma = 0.$$

Краевая задача для бигармонического уравнения с такими граничными условиями называется задачей Навье. Обзор граничных условий для бигармонического уравнения см. в [1].

Бигармоническое уравнение также используется в гидродинамике для описания медленных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Решению различных краевых задач для бигармонического уравнения посвящено много работ, см. например [2–6].

Точные решения краевых задач для бигармонического уравнения можно получить только для некоторых областей, например для слоя в пространстве произвольной размерности. В случае плоскости это будет полоса.

Мы рассматриваем краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в слое

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad n \geq 1, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0, \tag{2}$$

которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} y = 0, \qquad u = 0, \qquad \Delta u = 0, \\ y = a, \qquad u = 0, \qquad \Delta u = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае $n = 1$ решение задачи $u(x,y)$ даёт прогиб упругой полосы под действием нагрузки $f(x,y)$ при условии, что края полосы шарнирно закреплены.

Задача (1), (3) сводится к последовательному решению двух задач Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = v(x,y), \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(x,a) = 0, \tag{4}$$

и

$$\Delta v = f(x,y), \qquad v(x,0) = 0, \qquad v(x,a) = 0. \tag{5}$$

Задача Дирихле для уравнения Пуассона (с неоднородными граничными условиями) рассмотрена нами в [7]. В случае полиномиальных данных решение является полиномом [8].

Далее мы приводим решение задачи (1), (2) в классе функций медленного роста по $x$ для правой части $f(x,y)$ являющейся функцией медленного роста по $x$. Это решение в данном классе функций является единственным. Для правой части, являющейся полигармонической функцией по $x$ (в частности – полиномом), мы даём алгоритм получения точного решения задачи. Это решение также является полигармонической функцией по $x$ (в частности – полиномом).

## 1. Постановка и решение задачи

Пусть правая часть уравнения (1) является функцией медленного роста по $x$, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\,(1+|x|)^{-m} dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,, \tag{6}$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Решение задачи (1), (2) также будем искать в этом классе функций. Тогда задачи (4) и (5) имеют единственные решения [7] и решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} v(t,\tau)\, G_n(x,y,t,\tau)\, dt d\tau, \tag{7}$$

где

$$v(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} f(t,\tau)\, G_n(x,y,t,\tau)\, dt d\tau\,. \tag{8}$$

Здесь $G_n(x,y,t,\tau)$ – функция Грина задачи Дирихле.

Для $n = 1$, то есть для случая полосы на плоскости, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$G_1(x,y,t,\tau)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}. \tag{9}$$

Для $n=2$, то есть для случая слоя в трёхмерном пространстве, $(x,y)\in\mathbb{R}^3$,

$$G_2(x,y,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp(-\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right.$$
$$\left.-\frac{\exp(-\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}\right\}d\xi.$$

Для слоя в пространстве чётной размерности $(x,y)\in\mathbb{R}^{2k}$,

$$G_{2k-1}(x,y,t,\tau)=G^*_{2k-1}(|x-t|,y,\tau)=G^*_{2k-1}(r,y,\tau)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/a)-\cos\big(\pi(y-\tau)\big)}{\operatorname{ch}(\pi r/a)-\cos\big(\pi(y+\tau)\big)}\right].$$

Для слоя в пространстве нечётной размерности $(x,y)\in\mathbb{R}^{2k+1}$,

$$G_{2k}(x,y,t,\tau)=G^*_{2k}(|x-t|,y,\tau)=G^*_{2k}(r,y,\tau)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp(-\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\exp(-\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}\right\}d\xi\right].$$

Рассмотрим правую часть $f(x,y)$ специального вида, удовлетворяющую условию

$$\Delta_x^k f(x,y)=0,$$

для некоторого $k$, то есть являющуюся по переменным $x$ полигармонической функцией, в частности полиномом. Обозначим

$$\Delta=\Delta_x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=B+A,$$
$$A^{-1}f(x,y)=\int_0^y(y-\xi)\,f(x,\xi)d\xi-\frac{y}{a}\int_0^a(a-\xi)\,f(x,\xi)d\xi.$$

Легко проверить, что решением задачи Дирихле (5)

$$\Delta v=f(x,y),\qquad v(x,0)=0,\qquad v(x,a)=0,$$

будет функция

$$v(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,A^{-1-j}B^jf(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,A^{-1-j}\Delta_x^jf(x,y),$$

которая также является полигармонической по $x$, $\Delta_x^k v(x,y)=0$.

Тогда решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,A^{-1-j}\Delta_x^j v(x,y).$$

Если $f(x,y)$ является полиномом по $x$, то решение задачи $u(x,y)$ также является полиномом по $x$ и это решение единственно в классе функций медленного роста по $x$.

## 2. Примеры

**Пример 1.**

$$\Delta^2 u(x,y) = 1, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a,$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0.$$

Поскольку $f(x,y) = 1, \quad \Delta_x f = 0$, то

$$v(x,y) = A^{-1} f(x,y) = \int_0^y (y-\xi)\,d\xi - \frac{y}{a}\int_0^a (a-\xi)\,d\xi = \frac{y^2}{2} - \frac{ya}{2}.$$

В силу единственности решения в классе функций медленного роста по $x$ это решение даётся интегралом по формуле (8). То есть, например, при $n = 1$

$$v(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^1} f(t,\tau)\, G_1(x,y,t,\tau)\, dt d\tau =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi(y-\tau)/a)}{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi(y+\tau)/a)}\, dt d\tau = \frac{y^2}{2} - \frac{ya}{2}.$$

Теперь найдём $u(x,y)$. Поскольку $\Delta_x v = 0$, то единственное в классе функций медленного роста по $x$ решение задачи даётся формулой

$$u(x,y) = A^{-1} v(x,y) = \frac{y^4}{24} - \frac{y^3 a}{12} + \frac{ya^3}{24}.$$

Если не ограничивать рост искомого решения по $x$, то к найденному решению можно добавить любое решение однородной задачи

$$\Delta^2 u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a,$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0.$$

Например, при $n = 1$ можно добавить

$$\sum_{k=1}^{N}\left(c_1 \mathrm{ch}\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + c_2 x \mathrm{ch}\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + c_3 \mathrm{sh}\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + c_4 x \mathrm{sh}\left(\frac{\pi k x}{a}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi k y}{a}\right).$$

**Пример 2.**

$$\Delta^2 u(x,y) = x^2 e^y, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x,0) = u(x,1) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,1) = 0.$$

Поскольку

$$f(x,y) = x^2 e^y, \qquad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Delta_x^2 f = 0,$$

то $v(x,y) = A^{-1} f(x,y) - A^{-2}\Delta_x f(x,y)$ и
$u(x,y) = A^{-1} v(x,y) - A^{-2}\Delta_x v(x,y)$.

Эти вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*.

Единственное в классе функций медленного роста по $x$ решение задачи

$$u(x,y) = 4 + \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{30}y^5 + \frac{1}{6}x^2y^3 + \frac{1}{30}ey^5 + \frac{307}{90}ey + \frac{5}{9}ey^3 - \frac{8}{9}y^3 -$$
$$-\frac{5}{6}ex^2y - \frac{1}{6}ex^2y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}x^2y - 4e^y - x^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x^2e^y - \frac{236}{45}y.$$

**Пример 3.**

$$\Delta^2 u(x,y) = x_1\cos(x_1)e^{x_2}y^3, \qquad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x,0) = u(x,1) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,1) = 0.$$

Поскольку

$$f(x,y) = x_1\cos(x_1)e^{x_2}y^3, \qquad \Delta_x^2 f(x,y) = 0,$$

то

$$v(x,y) = A^{-1}f(x,y) - A^{-2}\Delta_x f(x,y),$$
$$u(x,y) = A^{-1}v(x,y) - A^{-2}\Delta_x v(x,y) =$$
$$= -\frac{239}{75600}y\sin(x_1)\,e^{x_2} + \frac{1}{210}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^3 - \frac{1}{600}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^5 +$$
$$+\frac{1}{15120}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^9 + \frac{1}{140}yx_1\cos(x_1)\,e^{x_2} - \frac{1}{120}x_1\cos(x_1)\,e^{x_2}y^3 +$$
$$+\frac{1}{840}x_1\cos(x_1)\,e^{x_2}y^7.$$

Здесь правая часть уравнения $f(x,y)$ и найденное решение $u(x,y)$ не являются функциями медленного роста по $x$. Если не накладывать никаких ограничений на рост искомого решения по $x$, то к найденному решению можно добавить любое решение однородной задачи

$$\Delta^2 u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x,0) = u(x,1) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,1) = 0.$$

**Замечание.** Аналогично изложенному в статье получается решение задачи для бигармонического уравнения (1) со смешанными граничными условиями

$$u(x,0) = 0, \qquad u_{yy}(x,0) = 0,$$
$$u_y(x,a) = 0, \qquad u_{yyy}(x,a) = 0,$$

которое сводится к последовательному решению двух смешанных краевых задач Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона [9].

Отметим, что к смешанной задаче Дирихле – Неймана для уравнения Лапласа сводится смешанная краевая задача для системы Моисила – Теодореску [10].

## Заключение

В работе получены точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения в многомерном бесконечном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < y < a,\ n \ge 1,$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0,$$

при условии, что правая часть является полигармонической функцией по $x$, $\Delta_x^k f(x,y) = 0$. Это решение единственно в классе функций медленного роста по $x$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,,$$

для некоторого $m \ge 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Согласно приведённому алгоритму получения решения соответствующие вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*. Эти точные решения могут быть использованы для проверки точности численных методов решения краевых задач для бигармонического уравнения, возникающих в прикладных задачах теории упругости и гидромеханики.

*Статья поступила в редакцию 22.08.2023 г.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations. 2009. Vol. 54. Iss. 2. P. 79–93. DOI: 10.1080/17476930802657640.
2. Gazzola F., Grunau H., Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains. Berlin: Springer, 2010. 423 p. (Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1991).
3. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Applied Mechanics Reviews. 2003. Vol. 56. Iss. 1. P. 33–85. DOI: 10.1115/1.1521166.
4. Матевосян О. А. О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Математические заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 944–947. DOI: 10.4213/mzm10980.
5. Карачик В. В., Торебек Б. Т. О задаче Дирихле – Рикье для бигармонического уравнения // Математические заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51. DOI: 10.4213/mzm11035.
6. Примеры точных решений задач изгиба пластины со свободными лицевыми плоскостями / Е. М. Зверяев, М. Д. Коваленко, Д. А. Абруков, И. В. Меньшова, А. П. Кержаев // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. № 46. 17 с. URL: https://keldysh.ru/papers/2019/prep2019_46.pdf (дата обращения: 12.05.2023). DOI: 10.20948/prepr-2019-46.
7. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и Математическое моделирование (сетевое издание МГТУ им. Н. Э. Баумана). 2015. № 4. С. 41–53. URL: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/24 (дата обращения: 12.05.2023). DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
8. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и Математическое моделирование (сетевое издание МГТУ им. Н. Э. Баумана). 2017. № 6. С. 1–18. URL: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/82 (дата обращения: 12.05.2023). DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
9. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи Дирихле – Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2016. № 3. С. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56.
10. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для системы Моисила – Теодореску в бесконечном слое // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 6–16. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

## REFERENCES

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic. In: *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2009, vol. 54, iss. 2, pp. 79–93. DOI: 10.1080/17476930802657640.
2. Gazzola F., Grunau H., Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains. Berlin, Springer, 2010. 423 p. (Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1991).
3. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. In: *Applied Mechanics Reviews*, 2003, vol. 56, iss. 1, pp. 33–85. DOI: 10.1115/1.1521166.

4. Matevossian O. A. [On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains]. In: *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 2015, vol. 98, no. 6, pp. 944–947. DOI: 10.4213/mzm10980.
5. Karachik V. V., Torebek B. T. [On the Dirichlet – Riquier problem for biharmonic equations]. In: *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 2017, vol. 102, no. 1, pp. 39–51. DOI: 10.4213/mzm11035.
6. Zveryayev Ye. M., Kovalenko M. D., Abrukov D. A., Menshova I. V., Kerzhayev A. P. [Examples of exact solutions for problems of bending plate with free face planes]. In: *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2019, no. 46, 17 p. Available at: https://keldysh.ru/papers/2019/prep2019_46.pdf (accessed: 12.05.2023). DOI: 10.20948/prepr-2019-46.
7. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of the Dirichlet Problem for the Poisson's Equation in a Multidimensional Infinite Layer]. In: *Matematika i Matematicheskoye modelirovaniye (setevoye izdaniye MGTU im. N. E. Baumana)* [Mathemathics and Mathematical Modelling (electronic journal of the Bauman MSTU)], 2015, no. 4, pp. 41–53. Available at: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/24 (accessed: 12.05.2023). DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
8. Algazin O. D. [Polynomial solutions of the boundary value problems for the Poisson equation in a layer]. In: *Matematika i Matematicheskoye modelirovaniye (setevoye izdaniye MGTU im. N. E. Baumana)* [Mathemathics and Mathematical Modelling (electronic journal of the Bauman MSTU)], 2017, no. 6, pp. 1–18. Available at: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/82 (accesssed: 12.05.2023). DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
9. Algazin O. D., Kopayev A. V. [The solution of the mixed boundary value problem of Dirichlet - Neumann for the Poisson equation in a multidimensional infinite layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya: Yestestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences], 2016, no. 3, pp. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56.
10. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of a mixed boundary value problem for the Moisil-Teodoresku system in an infinite layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2022, no. 2, pp. 6–16. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Алгазин Олег Дмитриевич* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана;
e-mail: mopi66@yandex.ru;

*Копаев Анатолий Владимирович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана;
e-mail: kopaev50@mail.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Oleg D. Algazin* – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru;

*Anatoliy V. Kopaev* – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: kopaev50@mail.ru


---


## ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д., Копаев А. В. Точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения со специальной правой частью в бесконечном слое // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 6–14.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-6-14

## FOR CITATION

Algazin O. D., Kopaev A. V. Exact solutions of the Navier boundary value problem for a biharmonic equation with a special right-hand side in an infinite layer. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 6–14.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-6-14