

УДК: 534.26

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-19-33

ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ИЗ ПЛОСКОГО КАНАЛА, ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Жаров В. А.

*Центральный аэрогидродинамический институт
имени профессора Н. Е. Жуковского
140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1,
Российская Федерация*

Аннотация

Цель: рассмотреть процесс излучения звуковой волны (главная мода) из полубесконечного канала без фланца, когда воздух внутри и вне канала покоится; разработать процедуру приближенного получения решения, которая позволяет получить коэффициенты отражения и трансформации волны основной моды на срезе канала, а также диаграмму направленности и пространственное распределение акустического давления вне канала; сравнить с точным аналитическим решением.

Процедура и методы. Решение задачи выражено через собственные функции задачи непрерывного и дискретного спектра. В качестве условий замыкания использованы условия непрерывности решения на срезе канала.

Результаты. Определены приближенные характеристики излучения звука из канала без фланцев, минуя процедуру Винера – Хопфа.

Теоретическая и/или практическая значимость. Предложенная процедура упрощает получение решения по сравнению с методом Винера – Хопфа, что в случае движущегося в канале газа позволяет связать процесс генерации звука с характеристиками пограничного слоя на стенках канала.

Ключевые слова: полубесконечный канал, невязкий совершенный газ, излучение звука из канала

RADIATION OF ACOUSTIC WAVES FROM A FLAT CHANNEL, APPROXIMATE SOLUTION

V. Zharov

*Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky
ulitsa Zhukovskogo 1, Zhukovsky 140180, Moscow region, Russian Federation*

Abstract

Aim: to consider the process of emitting a sound wave (main mode) from a semi-infinite channel without a flange when the air inside and outside the channel is at rest, to develop a procedure for approximating the solution, which allows us to obtain the reflection and transformation

coefficients of the main mode wave on the channel slice, as well as a directional pattern and spatial distribution of acoustic pressure outside the channel, and compare it with an accurate analytical solution.

Methodology. The solution of the problem is expressed in terms of the eigenfunctions of the continuous and discrete spectrum problem. The conditions of continuity of the solution on the channel slice are used as closure conditions.

Results. Approximate characteristics of sound emission from a channel without flanges are determined, bypassing the Wiener – Hopf procedure.

Research implications. The proposed procedure simplifies obtaining a solution compared to the Wiener – Hopf method, which, in the case of gas moving in the channel, makes it possible to link the sound generation process with the characteristics of the boundary layer on the channel walls.

Keywords: semi-infinite channel, inviscid perfect gas, sound emission from the channel

Введение

Процесс излучения звука из канала относится к сложным волновым явлениям, связанным с дифракцией акустических волн на срезе канала. Имеется строгая математическая теория (метод Винера – Хопфа [1; 2]), адекватно описывающая излучение звука, распространяющегося в канале, когда газ внутри и вне канала покоится, которая позволяет получить поле акустического давления во всей области распространения звука и определить звуковое давление не только в волновой зоне, но и на срезе канала [3]. Эта теория существенно усложняется, когда газ внутри канала и снаружи движется, и эти скорости различны [4; 5]. Исследования акустического поля в рассмотренной ситуации изучаются и экспериментально [6].

Разрабатываемые в настоящее время численные методы [7] позволяют решить эту задачу, но требуют большого машинного ресурса. Кроме того, определённые трудности в интерпретации этого явления возникают, когда скорость движения газа внутри канала и вне его является дозвуковой [8].

В связи с этим, на наш взгляд, представляет интерес переформулирование известных результатов, относящихся к излучению звука из канала на основе собственных функций канала и вне его, дающее более физический взгляд на эти явления благодаря аналогии между волнами неустойчивости в пограничном слое и акустическими волнами в канале, струе и внешнем к струе пространстве. В теории устойчивости пограничного слоя известно [9], что набор волн (волны Толлмина – Шлихтинга [10]) состоит из дискретного и непрерывного спектров волн. Соответственно, добавляя к дискретному набору акустических волн в канале и струе волны непрерывного спектра, на этом языке можно довольно просто интерпретировать ряд известных результатов. Ниже представлена реализация этих идей в случае покоящегося воздуха внутри канала и снаружи. Предлагается приближенное решение задачи, которое пригодно, по крайней мере, для $\omega/c \in [0,3]$, ω – частота, c – скорость звука в газе.

Пусть слева внутри канала набегают волна $e^{-i\omega t + i\alpha_{in} x}$. Внутри канала бежит отражённая волна $\left(R_{00} e^{-i\alpha_{00} x} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{0n} \psi_i(y) e^{-i\alpha_n x} \right) \text{Exp}[-i\omega t]$ [1], $R_{0,n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – коэффициенты отражения и трансформации набегающей волны в отражённую и систему гармоник [1]. Схема областей задачи изображена на рис. 1. Выберем функцию Грина в областях 1, 2 и 3 так, чтобы $\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)/\partial n_0 = 0$. Пунктиром обозначена бесконечно удалённая поверхность. Тогда 1

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \right\} dS_0.$$

Учитывая знак при определении производной по нормали, получим: для области 1

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 G_1(x, y; x_0, 1) \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} dx_0 + \frac{1}{4\pi} \int_1^{\infty} G_1(x, y; 0, y_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dy_0, \quad (1)$$

для области 2

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 G_2(x, y; x_0, -1) \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} dx_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-1} G_2(x, y; 0, y_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dy_0, \quad (2)$$

для области 3

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_3(x, y; 0, y_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dy_0. \quad (3)$$

Функция Грина должна представлять уходящую на бесконечности волну. Поэтому удобно её строить (методом отображений) из функции Ганкеля $H_0^{(1)}(\omega R)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$:
(область 3)

$$G_3(x, y; x_0, y_0) = (H_0^{(1)}(\omega R) + H_0^{(1)}(\omega R')), \\ R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, R' = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$

(область 1)

$$G_1(x, y; x_0, y_0) = (H_0^{(1)}(\omega R) + H_0^{(1)}(\omega R_1) + H_0^{(1)}(\omega R_2) + H_0^{(1)}(\omega R_3)), \\ R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 + 1)^2}, R_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0 + 1)^2}, \\ R_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0 - 1)^2}, R_3 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0 - 1)^2};$$

(область 2)

$$G_2(x, y; x_0, y_0) = (H_0^{(1)}(\omega R) - H_0^{(1)}(\omega R_1) + H_0^{(1)}(\omega R_2) - H_0^{(1)}(\omega R_3)),$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 - 1)^2}, R_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0 - 1)^2},$$

$$R_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0 + 1)^2}, R_3 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0 + 1)^2};$$

Имея уравнения (1), (2) и (3) и предполагая, что нормальная производная искомой функции φ на твёрдой границе равна нулю, можно получить уравнения для подынтегральной функции $\partial\varphi/\partial x_0$.

Из

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty G_1(x, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 \text{ И } \varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty G_3(x, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0$$

при $y \geq 1$, учитывая граничные условия на стенке и непрерывность на линии $x=0$, из уравнений (1) и (3) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty G_1(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-1} G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 - \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично при $y \geq -1$ из уравнений (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty G_2(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-1} G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0 - \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dy_0. \end{aligned} \quad (5)$$

При $y \geq 1$ вид решения известен (акустические моды в плоском канале [2]):

$$\varphi[x, y] = (e^{i\alpha_0 x} + R_{00} e^{-i\alpha_0 x}) \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^\infty R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y) e^{-i\alpha_n x}, \quad \varphi[0, y] = 1 + R_{00} + \sum_{n=1}^\infty R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y), \quad y \in [-1, 1].$$

$$\alpha_0 = \omega, \quad \alpha_n = \sqrt{\omega^2 - (\lambda_{in}^{(n)})^2}, \quad \lambda_{in}^{(n)} = \begin{cases} n\pi \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\psi_{in}^{(n)}(y) = \frac{1}{2} \left(e^{-y\lambda_{in}^{(n)} + \lambda_{in}^{(n)}} + e^{y\lambda_{in}^{(n)} + 3\lambda_{in}^{(n)}} \right).$$

Здесь α_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, волновые числа мод в канале, R_{0i} , $\psi_i(y)$, $i = 1, 2, \dots$ соответственно коэффициенты трансформации нулевой моды в i -ю и собственные функции, представляющие поперечное распределение в модах. Отсюда, при $x = -0$, получаем величину производной φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= i\alpha_0 (e^{i\alpha_0 x} - R_{00} e^{-i\alpha_0 x}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^\infty i\alpha_n R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y) e^{-i\alpha_n x}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=-0} &= i\alpha_0 (1 - R_{00}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^\infty i\alpha_n R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y). \end{aligned} \quad (7)$$

В итоге получаем систему уравнений для $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ при $x = -0$, $|y| \geq 1$. Определяя $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ в указанных областях из уравнений (4), (5) и (7), воспользовавшись уравнениями (1), (2) и (3), можно определить всё акустическое поле в областях 1, 2, 3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x_0, -y_0)}{\partial x_0} &= \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x_0}, \\ \left(\int_1^\infty G_1(0, y; 0, y_0) + (G_3(0, y; 0, -y_0) + G_3(0, y; 0, y_0)) \right) \frac{\partial \varphi(y_0)}{\partial x_0} dy_0 &= - \int_{-1}^1 G_3(0, y; 0, y_0) \frac{\partial \varphi(0, y_0)}{\partial x_0} dy_0 = \\ &= - \int_{-1}^1 G_3(0, y; 0, y_0) \left(i\alpha_0 (e^{i\alpha_0 x} - R_{00} e^{-i\alpha_0 x}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^\infty i\alpha_n R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y) e^{-i\alpha_n x} \right)_{x=-0} dy_0 \end{aligned}$$

Это интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно функции $\frac{\partial \varphi(0, y_0)}{\partial x_0}$ в интервале $y_0 \in [1, \infty]$. При этом коэффициент отражения и коэффициенты трансформации определяются из сравнения выражения (7) поля на выходе из канала с его выражением из уравнения (3) (система функций, $\{1, \psi_1(y), \psi_2(y), \dots\}$ ортогональна).

2. Условия на срезе канала. Условия на срезе канала можно сформулировать, воспользовавшись результатами работ [12; 13]. С учётом непрерывного спектра поле акустического давления в области (3) в покоящемся газе представляется интегралом

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_\beta e^{i\alpha_c(\beta)x} \psi_c(y, \beta) d\beta, \quad \alpha_c = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_c(y, \beta) \psi_c^*(y, \beta_1) dy &= \delta(\beta - \beta_1), \quad \psi_c(y, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие непрерывности поля давления $p[t, x, y]|_{x \rightarrow -0} = p[t, x, y]|_{x \rightarrow +0}$, $y \in [-1, 1]$ на срезе сопла даёт интегральные соотношения (9) и (10) для акустического поля внутри сопла с полем вне сопла (точнее, слева и справа от среза сопла):

$$(1 + R_{00}) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} A[\beta] \int_{-1}^1 \psi_{in}^{(0)}(y) \psi_c(\beta, y) dy d\beta \right)_{x=+0}, \quad \int_{-1}^1 \psi_{in}^{(0)}(\beta, y) \psi_c(\beta, y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin[\beta]}{\beta}, \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_{0n} \delta_{nj} = R_{0j} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} A[\beta] \int_{-1}^1 \psi_{in}^{(j)}(y) \psi_c(\beta, y) dy d\beta \right)_{x=+0}, \quad j=1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 \psi_{in}^{(j)}(y) \psi_c(\beta, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin[j\pi - \beta]}{j\pi - \beta} + \frac{\sin[j\pi + \beta]}{j\pi + \beta} \right).$$

Здесь $\psi_{in}^{(j)}(y)$, $\psi_{in}^{(0)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – нормированные собственные функции в канале:

$$\int_{-1}^1 \psi_{in}^{(j)*}(y) \psi_{in}^{(l)}(y) dy = \delta_{jl}, \quad j, l = 0, 1, 2, \dots$$

Воспользуемся теперь законом сохранением импульса на линии среза сопла. Из уравнения (7) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} |y| < 1, \quad \left(\psi_{in}^{(0)}(y) \alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) - \sum_{j=1}^{\infty} R_{0j} \alpha_{in}^{(j)} \psi_{in}^{(j)}(y) \right) \\ |y| \geq 1, \quad \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} p(x, y) \right) \Big|_{x=0}, \quad p(x, y) \text{ определяется с помощью функции Грина, формула (3)} \end{array} \right\}_{x=0} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\beta \alpha_c(\beta) A[\beta] \varphi_c(\beta, y) \right)_{x=+0}, \quad \alpha_c(\beta) = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}.$$

(11)

Функция $p'_x(0, y) \equiv 0$ только если мы рассматриваем канал с фланцем. Чтобы этого не было, необходимо определить акустическое давление на линии среза сопла $\{x=0, y \in [-\infty, -1] \cup y \in [1, \infty]\}$. Для этого можно воспользоваться функцией Грина в области 3 (рис. 1).

$\alpha_{in}^{(0)} = \omega$, $\alpha_{in}^{(j)} = \sqrt{\omega^2 - (\lambda_n / i)^2}$, λ_n – собственные числа в канале: для чётных мод $\lambda_n = in\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$, для нечётных мод $i^2 = -1$, $\lambda_n = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, как это следует из волнового уравнения. Умножим правую и левую часть равенства (10) на $\varphi_c^*(\beta, y)$ и проинтегрируем по $y \in (-\infty, \infty)$. В результате получим:

$$\left(\left(\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin[\beta_1]}{\beta_1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} R_{0j} \alpha_{in}^{(j)} \left(\frac{e^{i\lambda_n^{(n)}} \sin[\beta_1 - i\lambda_n^{(n)}]}{\beta_1 - i\lambda_n^{(n)}} + \frac{e^{3\lambda_n} \sin[\beta_1 + i\lambda_n^{(n)}]}{\beta_1 + i\lambda_n^{(n)}} \right) \right) \right)_{y \in [-1, 1]} +$$

$$\left(\frac{1}{i} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) \right) \Big|_{|y| > 1, x=0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}[-i\beta_1 y]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_c(\beta) A[\beta] \delta(\beta - \beta_1) d\beta = \alpha_c(\beta_1) A[\beta_1]$$

3. Определение поля вне канала. Дальнейшие вычисления необходимо провести в соответствии с определениями, приведёнными выше. Воспользуемся формулой (3) для вычисления интегралов:

$$p(0, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 G_3[y, y_0] \left(\frac{\partial}{\partial x} p(x, y_0) \right)_{x=-0}, \quad y \in [-\infty, -1] \cup [1, \infty].$$

$$\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) \Big|_{|y|>1, x=-0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}[-i\beta_1 y],$$

$$\left(\frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x_0} \right) \Big|_{x_0=-0, |y_0| \leq 1} = i\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{in}^{(n)} R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y_0)$$

$$p(0, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 G_3[0, x_0, y, y_0] \left(\begin{aligned} &i\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) e^{i\alpha_{in}^{(0)} x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} - \\ &-\sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{in}^{(n)} R_{0n} e^{-i\alpha_{in}^{(n)} x_0} \psi_{in}^{(n)}(y_0) \end{aligned} \right),$$

$$\alpha_{in}^{(0)} = \omega, \alpha_{in}^{(j)} = \sqrt{\omega^2 - (\lambda_j / i)^2}, \lambda_j = i j \pi, j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j \dots$$

$$p(0, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 G_3[y, y_0] \left(\frac{\partial}{\partial x} p(x, y_0) \right)_{x=-0}, \quad y \in [-\infty, -1] \cup [1, \infty].$$

$$p(0, x_0, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 G_3[0, x_0, y, y_0] \left(\begin{aligned} &i\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) e^{i\alpha_{in}^{(0)} x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} - \\ &-\sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{in}^{(n)} R_{0n} e^{-i\alpha_{in}^{(n)} x_0} \psi_{in}^{(n)}(y_0) \end{aligned} \right),$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_0} p(0, x_0, y) - \\ &-\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 \frac{\partial}{\partial x_0} G_3[0, x_0, y, y_0] \left(i\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) e^{i\alpha_{in}^{(0)} x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{in}^{(n)} R_{0n} e^{-i\alpha_{in}^{(n)} x_0} \psi_{in}^{(n)}(y_0) \right) - \\ &-\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 2H_0^{(1)} \left[\left| \omega \sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2} \right| \right] \left(\begin{aligned} &i\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) \frac{\partial}{\partial x_0} e^{i\alpha_{in}^{(0)} x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} - \\ &-\sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{in}^{(n)} R_{0n} \frac{\partial}{\partial x_0} e^{-i\alpha_{in}^{(n)} x_0} \psi_{in}^{(n)}(y_0) \end{aligned} \right) = \end{aligned}$$

$$x_0 \rightarrow -0;$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{-1}^1 dy_0 \frac{\partial}{\partial x_0} H_0^{(1)}[\omega \sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2}] \right)_{x_0 \rightarrow 0} \left(i\alpha_{in}^{(0)} (1 - R_{00}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{in}^{(n)} R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y_0) \right) - \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, |y - y_0|] \left(-(\alpha_{in}^{(0)})^2 (1 - R_{00}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{in}^{(n)})^2 R_{0n} \psi_{in}^{(n)}(y_0) \right). \\
&\frac{\partial}{\partial x} H_0^{(1)}[\omega \sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2}] = -\frac{x_0 \omega H_1^{(1)}[\omega \sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2}]}{\sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2}}.
\end{aligned}$$

Здесь $H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода [14].

При стремлении x_0 к 0 этот член исчезает. В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi} \left((\alpha_{in}^{(0)})^2 (1 - R_{00}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \text{Exp}[-i\beta_1 y] \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, \omega |y - y_0|] + \right. \\
&\left. \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{in}^{(n)})^2 R_{0n} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \text{Exp}[-i\beta_1 y] \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, \omega |y - y_0|] \psi_{in}^{(n)}(y_0) \right) = \\
&= \left((\alpha_{in}^{(0)})^2 (1 - R_{00}) \overline{\Psi^{(0)}}(\beta_1, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{in}^{(n)})^2 R_{0n} \overline{\Psi^{(n)}}(\beta_1, \omega) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi^{(0)}}(\beta_1, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \text{Exp}[-i\beta_1 y] \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, \omega |y - y_0|] \\
\overline{\Psi^{(n)}}(\beta_1, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \text{Exp}[-i\beta_1 y] \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, \omega |y - y_0|] \psi_{in}^{(n)}(y_0)
\end{aligned}$$

$$\psi_{in}^{(n)}(y_0) = \frac{1}{2} \left(e^{-y\lambda_{in}^{(n)} + \lambda_{in}^{(n)}} + e^{y\lambda_{in}^{(n)} + 3\lambda_{in}^{(n)}} \right), \quad \lambda_{in}^{(n)} = in\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Воспользовавшись полученным результатом, выразим $A[\beta]$ через коэффициент отражения R_{00} и коэффициенты трансформации R_{0j} , $j = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
\alpha_c(\beta_1) A[\beta_1] &= (1 - R_{00}) \left(\alpha_{in}^{(0)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{Sin}[\beta_1]}{\beta_1} + (\alpha_{in}^{(0)})^2 \overline{\Psi^{(0)}}(\beta_1, \omega)_{y \in [-1, 1]} \right) - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} R_{0j} \alpha_{in}^{(j)} \left(\frac{e^{\lambda_{in}^{(j)}} \text{Sin}[\beta_1 - i\lambda_{in}^{(j)}]}{\beta_1 - i\lambda_{in}^{(j)}} + \frac{e^{3\lambda_{in}^{(j)}} \text{Sin}[\beta_1 + i\lambda_{in}^{(j)}]}{\beta_1 + i\lambda_{in}^{(j)}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{in}^{(n)})^2 R_{0n} \overline{\Psi^{(n)}}(\beta_1, \omega) \quad (13) \\
\overline{\Psi^{(0)}}(\beta_1, \omega) &= \frac{1}{4\pi i} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \text{Exp}[-i\beta_1 y] \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, \omega |y - y_0|], \\
\overline{\Psi^{(n)}}(\beta_1, \omega) &= \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) dy \text{Exp}[-i\beta_1 y] \int_{-1}^1 dy_0 H_1^{(0)}[0, \omega |y - y_0|] \psi_{in}^{(n)}(y_0).
\end{aligned}$$

Подставляя выражение [13] для $A[\beta_1]$ в формулы (9) и (10), получим систему уравнений относительно R_{00} , R_{0j} , $j=1,2,\dots$. Эта система уравнений не вырождена, и, в соответствии с формулой $p(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\beta} e^{i\alpha(\beta)x} \psi_c(y,\beta,\omega) d\beta$ позволяет определить акустическое поле во всём объёме (в данном случае приближенно).

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента $R_{00}(\omega)$ от ω в предположении, что субгармоники не возбуждаются. Красная линия – точное решение [1; 2]. В этом случае имеем

$$R_{00} = -\frac{1 - I(\omega)}{1 + I(\omega)},$$

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin[\beta]}{\beta} + \frac{\omega^2}{4\pi i} f(\omega, \beta) \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin[\beta]}{\beta} d\beta,$$

$$f(\omega, \beta) = \int_{-\infty}^{-1} dy \int_{-1}^1 dy_0 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta y} H_0^{(1)}(\omega|y - y_0|) + \int_1^{\infty} dy \int_{-1}^1 dy_0 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta y} H_0^{(1)}(\omega|y - y_0|)$$

$H_0^{(1)}(z)$ – функция Ганкеля первого рода [14].

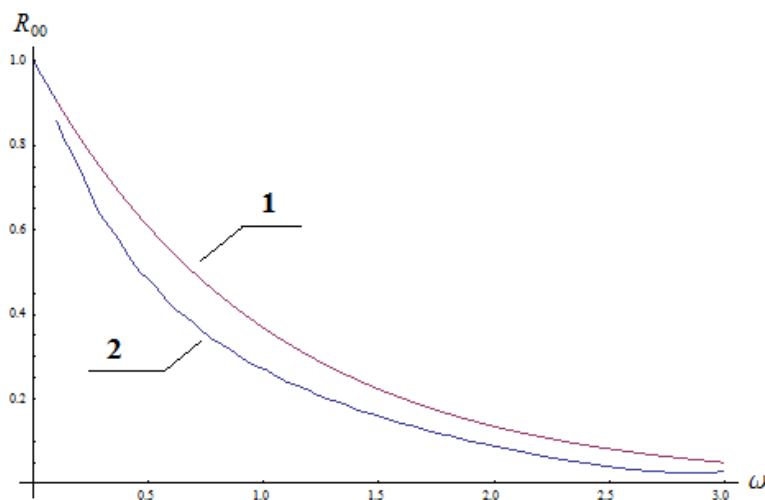


Рис. 2 / Fig. 2. Зависимость коэффициента $R_{00}(\omega)$ от ω . 1 – точное решение [1; 2], 2 – приближенное решение / Dependence of the coefficient $R_{00}(\omega)$ on ω . 1 – exact solution [1; 2], 2 – approximate solution.

Источник: составлено автором

На рис. 2: 1 – точное решение [1; 2], 2 – приближенное решение. Видно, что количественно и качественно использованное приближение для акустического поля на линии среза вне канала аппроксимирует точное решение в диапазоне $\omega \in [0, 3]$. Можно высказать предположение о том, что существует другое приближение, которое даст лучшее совпадение, или надо действовать методом итераций.

При этом акустическое поле в области $x \in [0, \infty], y \in [0, \infty]$ при различных значениях ω выглядит следующим образом, представленным на рис. 3 и рис. 4. В последнем случае приведены линии уровня акустического давления.

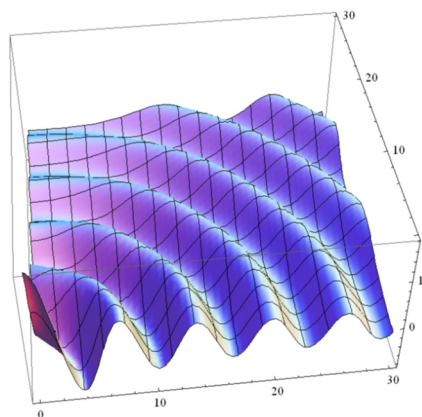


Рис. 3 / Fig. 3. Акустическое поле в области $x \in [0, \infty], y \in [0, \infty]$ при $\omega=1$ /
Acoustic field in the area $x \in [0, \infty], y \in [0, \infty]$ at $\omega=1$

Источник: составлено автором

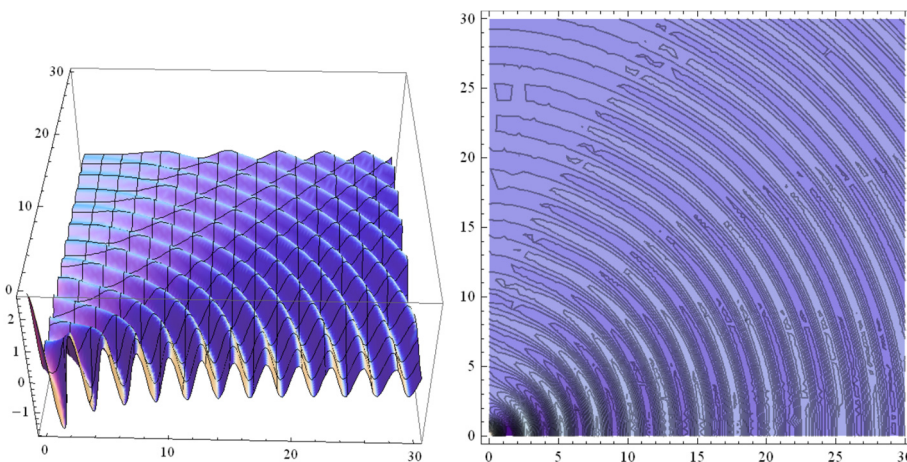


Рис. 4 / Fig. 4. Акустическое поле в области $x \in [0, \infty], y \in [0, \infty]$ при $\omega=2.5$ /
Acoustic field in the area $x \in [0, \infty], y \in [0, \infty]$ at $\omega=2.5$

Источник: составлено автором

Для последнего случая диаграмма направленности акустического шума представлена на рис. 5.

Прямая линия показывает направление распространения волн в соответствии с вектором $\mathbf{n}: \mathbf{n} = \{\cos[\varphi], \sin[\varphi]\}$, $n^2 = 1$.

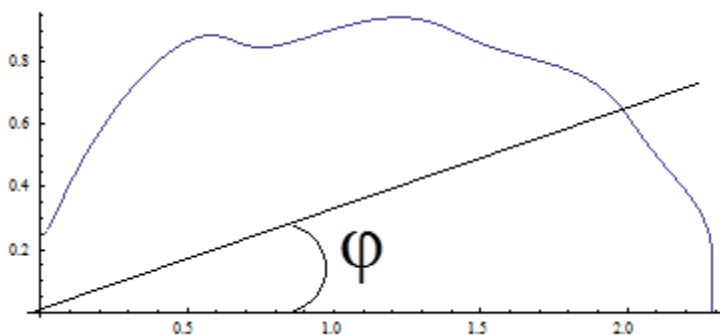


Рис. 5 / Fig. 5. Диаграмма направленности акустического шума
 $\omega = 2.5, \quad a\{\cos[\varphi], \sin[\varphi]\}, a = \text{Abs}[\sqrt{\pi\omega\cos[\varphi]}A(\omega\sin[\varphi])]$ /
 Directional diagram of acoustic noise
 $\omega = 2.5, \quad a\{\cos[\varphi], \sin[\varphi]\}, a = \text{Abs}[\sqrt{\pi\omega\cos[\varphi]}A(\omega\sin[\varphi])]$.

Источник: составлено автором

При больших значениях ω , по-видимому, можно пользоваться приближением тонких пучков.

Заключение

Предложенный приближенный алгоритм решения задачи об излучении звука из канала количественно и качественно достаточно хорошо воспроизводит точное аналитическое решение работы [1]. Разработанный подход, по-видимому, можно перенести на случай истекающей из канала равновесной струи, когда газ движется внутри и вне канала, причём скорости движения газа различны. При этом моды струи и канала будут присутствовать в решении в явном виде.

Статья поступила в редакцию 14.09.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Вайнштейн Л. А. Строгое решение задачи о плоском волноводе с открытым концом // Известия Академии наук СССР. Серия физическая. 1948. Т. 12. № 2. С. 144–165.
2. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Иностранная литература, 1962. 279 с.

3. Жаров В. А., Хлопков Ю. И., Чернышев С. Л. Дифракция звуковых волн из канала в покоящийся газ. Точные решения // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 3 (7). С. 152–157.
4. Munt R. M. The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe // *Journal of Fluid Mechanics*. 1977. Vol. 83. Iss. 4. P. 609–640. DOI: 10.1017/S0022112077001384.
5. Munt R. M. Acoustic Transmission Properties of a Jet Pipe with Subsonic Jet Flow: I. The Cold Jet Reflection Coefficient // *Journal of Sound and Vibration*. 1990. Vol. 142. Iss. 3. P. 413–436. DOI: 10.1016/0022-460X(90)90659-N.
6. Gorazd Ł., Jurkiewicz J., Snakowska A. Experimental Verification of the Theoretical Model of Sound Radiation from an Unflanged Duct with Low Mean Flow // *Archives of Acoustics*. 2012. Vol. 37. No. 2. P. 227–236. DOI: 10.2478/v10168-012-0030-7.
7. Tolstykh A. I., Lipavskii M. V., Chigarev E. N. DNS of thin shear instability by ninth-order multioperators-based schemes // *International Journal of Computing Science and Mathematics*. 2007. Vol. 1. Iss. 2-4. P. 432–443. DOI: 10.1504/IJCSM.2007.016544.
8. Using Wavelet transforms and Linear Stochastic Estimation to study nearfield pressure and turbulent velocity signatures in free jets / Grassucci D., Camussi R., Kerhervé F., Jordan P., Grizzi S. // AIAA 2010-3954. 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Session: AA-36: Jet Noise – Experimental Studies II (07 June 2010 – 09 June 2010, Stockholm, Sweden). 2010. P. 3954. DOI: 10.2514/6.2010-3954.
9. Salven H., Grosch C. E. The continuous spectrum of Orr-Sommerfeld equation. Part 2. Eigenfunction expansions // *Journal of Fluid Mechanic*. 1981. Vol. 104. P. 445–465. DOI: 10.1017/S0022112081002991.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
11. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
12. Копьев В. Ф., Шур М. Л. Азимутальные компоненты звукового поля турбулентной струи: результаты измерений и их использование для валидации современных методов расчета шума // Ученые записки ЦАГИ. 2010. Т. 41. № 1. С. 5–12.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 621 с.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, Физматлит, 1971. 1108 с.

REFERENCES

1. Vainshtein L. A. [A rigorous solution to the problem of a flat waveguide with an open end]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya fizicheskaya* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics], 1948, vol. 12, no. 2, pp. 144–165.
2. Noble B. *Primeneniye metoda Vinera – Khopfa dlya resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Application of the Wiener-Hopf method for solving partial differential equations]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1962. 279 s.
3. Zharov V. A., Khlopkov Yu. I., Chernyshev S. L. [Diffraction of sound waves from a channel into a gas at rest. Exact solutions]. In: *Trudy MFTI* [Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)], 2010, vol. 2, no. 3 (7), pp. 152–157.
4. Munt R. M. The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 1977, vol. 83, iss. 4, pp. 609–640. DOI: 10.1017/S0022112077001384.

5. Munt R. M. Acoustic Transmission Properties of a Jet Pipe with Subsonic Jet Flow: I. The Cold Jet Reflection Coefficient. In: *Journal of Sound and Vibration*, 1990, vol. 142, iss. 3, pp. 413–436. DOI: 10.1016/0022-460X(90)90659-N.
6. Gorazd Ł., Jurkiewicz J., Snakowska A. Experimental Verification of the Theoretical Model of Sound Radiation from an Unflanged Duct with Low Mean Flow. In: *Archives of Acoustics*, 2012, vol. 37, no. 2, pp. 227–236. DOI: 10.2478/v10168-012-0030-7.
7. Tolstykh A. I., Lipavskii M. V., Chigirev E. N. DNS of thin shear instability by ninth-order multioperators-based schemes. In: *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 2007, vol. 1, iss. 2-4, pp. 432–443. DOI: 10.1504/IJCSM.2007.016544.
8. Grassucci D., Camussi R., Kerhervé F., Jordan P., Grizzi S. Using Wavelet transforms and Linear Stochastic Estimation to study nearfield pressure and turbulent velocity signatures in free jets. In: *AIAA 2010-3954. 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Session: AA-36: Jet Noise – Experimental Studies II (07 June 2010 – 09 June 2010, Stockholm, Sweden)*, 2010, pp. 3954. DOI: 10.2514/6.2010-3954.
9. Salven H., Grosch C. E. The continuous spectrum of Orr-Sommerfeld equation. Part 2. Eigenfunction expansions. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 104, pp. 445–465. DOI: 10.1017/S0022112081002991.
10. Schlichting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 711 p.
11. Jackson J. *Klassicheskaya elektrodinamika* [Classical electrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1965. 702 p.
12. Kopiev V. F., Shur M. L. [Azimuthal components of turbulent jet sound field: measurement results and their implementation for validation of modern noise computation techniques]. In: *Uchenyye zapiski TSAGI* [TsAGI Science Journal], 2010, vol. 41, no. 1, pp. 5–12.
13. Landau L. D., Lifshits Ye. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 621 p.
14. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 1971. 1108 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Жаров Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: v_zharov@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir A. Zharov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky;
e-mail: v_zharov@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Жаров В. А. Излучение акустических волн из плоского канала, приближенное решение // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 4. С. 19–33.

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-19-33

FOR CITATION

Zharov V. A. Radiation of acoustic waves from a flat channel, approximate solution. In: *Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 4, pp. 19–33.

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-19-33