

УДК 533.6.011

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОСТУПАТЕЛЬНО НЕРАВНОВЕСНОЙ ДИНАМИКИ УДАРНО-СЖАТЫХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

Кузнецов М. М.¹, Кузнецов Г. В.¹, Паренкина В. И.², Сатюков Д. Г.¹, Халиков Р. Ф.¹

¹ Государственный университет просвещения

141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24,
Российская Федерация

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация

Аннотация

Цель: на основе асимптотических и приближенных теоретических методов решения системы кинетических уравнений Больцмана для ударно сжатой бинарной смеси газов найти аналитические представления функций распределения компонентов смеси.

Методы. Применялись асимптотические и вариационные методы математической физики.

Результаты. Найдены асимптотические и приближенные аналитические выражения для функций распределения компонентов ударно-сжатой бинарной смеси газов. Для известной в литературе модификации метода Тамма – Мотт-Смита впервые доказано выполнение законов сохранения потоков массы, импульса и энергии в произвольном сечении внутри ударной волны. Ранее подобное доказательство в литературе отсутствовало. Важность подобного доказательства обусловлена тем, что при применении классического метода Тамма – Мотт-Смита к бинарным смесям газов невозможно обеспечить выполнение законов сохранения внутри фронта ударной волны.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные аналитические результаты имеют существенное значение как для выяснения условий ускорения скоростей кинетических процессов в структуре ударных волн, так и для определения оптимальных условий проведения соответствующих экспериментов в ударных трубах.

Ключевые слова: асимптотическая модель, эффект перехлёста, рэлеевская смесь, неравновесность

ANALYTICAL MODELS OF TRANSLATIONALLY NONEQUILIBRIUM DYNAMICS OF SHOCK-COMPRESSED BINARY GAS MIXTURES

M. Kuznetsov¹, G. Kuznetsov¹, V. Parenkina², D. Satyukov¹, R. Halikov¹

¹ Federal State University of Education

24 ulitsa Very Voloshinoi, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

² Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe shosse 4, Moscow 125993, Russian Federation

Abstract

Aim. On the basis of asymptotic and approximate theoretical methods for solving the system of kinetic Boltzmann equations for a shock compressed binary mixture of gases, analytical representations of the distribution functions of the components of the mixture are found.

Methods. Asymptotic and variational methods of mathematical physics were used.

Results. Asymptotic and approximate analytical expressions are found for the distribution functions of components of a shock-compressed binary mixture of gases. For a modification of the Tamm–Mott-Smith method known in the literature, the laws of conservation of mass, momentum and energy fluxes in an arbitrary section inside a shock wave are proved for the first time. Previously, there was no such proof in the literature. The importance of such a proof is due to the fact that when applying the classical Tamm–Mott-Smith method to binary mixtures of gases, it is impossible to ensure compliance with the conservation laws inside the shock wave front.

Research implications. The obtained analytical results are essential both for elucidating the conditions for accelerating the velocities of kinetic processes in the structure of shock waves, and for determining the optimal conditions for conducting appropriate experiments in shock tubes.

Keywords: asymptotic model, overlap effect, Rayleigh mixture, disequilibrium

Введение

В настоящей работе рассматриваются бинарные смеси газов с произвольными величинами концентраций её компонентов в ударной волне.

В случае сильно диспергированных смесей рассматривается предельный переход по двум параметрам: относительной плотности и относительной молекулярной массе компонентов смеси. При этом сами функции распределения в принципе являются асимптотически точными аналитическими решениями системы уравнений Больцмана.

В работах [1; 2] авторам удалось отказаться от обычно постулируемого вида функций распределения в пространстве молекулярных скоростей [3] и заменить его асимптотическим представлением этих функций. Конкретный вид этих функций находится из аналитического решения системы асимптотически упрощённых уравнений Больцмана для компонентов рэлеевской смеси газов.

В данной работе, как и в [1; 2], использовался следующий предельный переход по относительным величинам концентраций и молекулярных масс компонентов этой смеси.

$$\frac{n_h}{n_l} \equiv v \rightarrow 0, \quad \frac{m_h}{m_l} \equiv b \rightarrow \infty, \quad \frac{n_h m_h}{n_l m_l} = v \cdot b \equiv \tilde{\rho} = \text{const} \ll 1, \quad (1)$$

где n_h , n_l , m_h , m_l – соответственно концентрации и молекулярные массы компонентов.

Нетрудно видеть, что предельный переход (1) соответствует следующему соотношению

$$L_{ll} \ll L_{lh} \ll L_{hh}, \quad (2)$$

где L_{ll} , L_{lh} , L_{hh} – длины свободного пробега соответственно лёгкого-лёгкого, лёгкого-тяжёлого, тяжёлого-тяжёлого компонентов.

В силу предельного перехода (1) и неравенств (2) неоднородная релаксация лёгкого и тяжёлого компонентов разбивается в первом приближении по малому параметру $\tilde{\rho}$ на два независимых этапа.

На первом этапе в силу $v \rightarrow 0$ релаксирует к состоянию равновесия только лёгкий компонент, поскольку влияние тяжёлого компонента на релаксацию лёгкого мало, и им можно пренебречь с точностью до величин порядка $\tilde{\rho} \ll 1$.

Тяжёлый компонент, проходя через фронт ударной волны шириной L_{ll} в лёгком газе, не претерпевает существенных изменений, поскольку рассеяние тяжёлых молекул на лёгкие является чрезвычайно малым при $\frac{m_l}{m_h} \rightarrow 0$ [4]. Ввиду этого макроскопические параметры максвелловского распределения тяжёлого компонента: плотность n_h , скорость u_h и температура T_h , остаются неизменными на протяжении всей длины зоны релаксации лёгкого компонента L_{ll} . Они, таким образом, совпадают с параметрами «холодного равновесного состояния» вверх по потоку вдали от переднего фронта скачка в лёгком газе.

В силу асимптотической постановки рассматриваемая задача сильно упрощается по сравнению со случаем сравнимых по величине концентраций обоих компонентов. Известно, что в случае сравнимых концентраций релаксация обоих компонентов происходит параллельно, а не последовательно [5].

Следует также отметить, что качественное различие поступательной релаксации в смесях со сравнимыми величинами концентраций и молекулярных масс лёгкого и тяжёлого компонентов и в сильно диспергированных таких смесях сопровождается и сильным различием в практическом использовании этой релаксации. Как показали численные расчёты фронтов ударных волн [6], эффекты поступательной неравновесности в недиспергированных смесях наиболее интересны в задачах спуска космических аппаратов в атмосферах планет Солнечной системы. Было показано, что учёт поступательной неравновесности особенно важен при расчёте скоростей обменных химических реакций.

Эффекты поступательной неравновесности в сильно диспергированных смесях интересны для практического использования в лабораторных земных условиях (например, при эффективном вкладывании энергии в тяжёлый компонент смеси в схемах управляемого термоядерного синтеза) [7].

1. Релаксация тяжёлого компонента рэлеевской смеси

Как указывалось во Введении, равновесное состояние лёгкого компонента непрерывно сохраняется на масштабе релаксации тяжёлого компонента L_{lh} , являясь искомым решением для этого компонента.

Таким образом, для лёгкого компонента асимптотическое решение (обозначим его $f_{l,asy}$) совпадает с максвелловским распределением $F_l^{(M)}$ для лёгкого компонента в конце зоны его релаксации

$$f_{l,asy} = F_l^{(M)} \quad (1.1)$$

где

$$F_l^{(M)} = n_{l,asy} \left(\frac{\beta_l}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\beta_l (\xi_l - u_{l,asy})^2 \right) \exp(-\beta_l \eta_l^2) \exp(-\beta_l \zeta_l^2) \quad (1.2)$$

причём $n_{l,asy}$, $T_{l,asy}$, $u_{l,asy}$ – соответственно парциальная числовая плотность, температура и макроскорость лёгкого компонента в конце его зоны релаксации, $\beta_l = \frac{m_l}{2kT_{l,asy}}$.

Начальное условие для релаксации тяжёлого компонента естественно задать в конце зоны релаксации лёгкого компонента на длине δ_l , причём $\delta_l \approx L_{ll}$. Численно в качестве δ_l можно взять, например, длину, на которой величина плотности n_l меняется от половины до полного значения $n_{l,asy}$ в конце зоны релаксации лёгкого компонента.

Как отмечалось выше, ввиду «замороженности» поступательной релаксации тяжёлого компонента на масштабе L_{ll} начальное условие для «размороженности» релаксации тяжёлого компонента на масштабе L_{lh} будет совпадать с «холодным» распределением тяжёлого компонента $F_{h,-\infty}^{(M)}$ перед фронтом скачка в лёгком газе.

Заметим, что перед фронтом скачка оба компонента находятся в «холодном» поступательном равновесии и все макропараметры их парциальных максвелловских распределений будут одинаковыми. Это касается среднемассовых скоростей

$$u_{l,-\infty} = u_{h,-\infty} \equiv u_{-\infty} \quad (1.3)$$

и парциальных температур

$$T_{l,-\infty} = T_{h,-\infty} \equiv T_{-\infty}. \quad (1.4)$$

При этом различными остаются молекулярные массы компонентов $m_l \neq m_h$, $m_l \ll m_h$ и концентрации $n_l \neq n_h$, $n_h \ll n_l$.

Обозначим это «холодное» распределение как $F_{h,\delta}^{(M)}$, где

$$F_{h,\delta}^{(M)} = n_{h,\delta} \left(\frac{\beta_h}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\beta_h (\xi_h - u_{-\infty})^2) \exp(-\beta_h \eta_h^2) \exp(-\beta_h \zeta_h^2) \quad (1.5)$$

Здесь параметры $n_{h,\delta}$, $T_{h,\delta}$, $u_{h,-\infty}$ – соответственно парциальная числовая плотность, температура и макроскорость тяжелого компонента в начале его зоны релаксации, $\beta_h = \frac{m_h}{2kT_{h,\delta}}$.

Зона релаксации тяжёлого компонента завершается на распределении $F_{h,s}^{(M)}$, которое равно

$$F_{h,s}^{(M)} = n_{h,s} \left(\frac{\beta_h}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\beta_h (\xi_h - u_{h,s})^2 \right) \exp(-\beta_h \eta_h^2) \exp(-\beta_h \zeta_h^2), \quad (1.6)$$

где оба распределения имеют одинаковые средние парциальные скорости

$$u_{h,s} = u_{l,asy} \equiv u_s, \quad (1.7)$$

и средние парциальные температуры

$$T_{h,s} = T_{l,asy} \equiv T_s. \quad (1.8)$$

Как мы видим, определение функции распределения для тяжёлого компонента f_h сводится в главном приближении по малому параметру $\tilde{\rho}$ к решению одного кинетического уравнения Больцмана с перекрёстным интегралом столкновений. Для дальнейшего изложения уравнение Больцмана будет удобно записать в следующем виде [8]:

$$\frac{df_h}{dt} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{\vec{\Xi}_l} g_{lh} (f_l' f_h' - f_l f_h) b db d\varepsilon d^3 \Xi_l, \quad (1.9)$$

где левая часть равенства (11) является, так называемой, полной производной [МСС], $\vec{\Xi}_l$ и $\vec{\Xi}_h$ – скорости молекул до столкновения, $\vec{\Xi}_l'$ и $\vec{\Xi}_h'$ – после столкновения, причём $f_l' = f_l'(\vec{\Xi}_l', t)$; $f_h' = f_h'(\vec{\Xi}_h', t)$; $f_l = f_l(\vec{\Xi}_l, t)$; $f_h = f_h(\vec{\Xi}_h, t)$, b – прицельное расстояние; ε – угловой (азимутальный) параметр столкновения, $g_{lh} = |\vec{\Xi}_l - \vec{\Xi}_h|$ – модуль относительной скорости лёгкой и тяжёлой молекул [9], $d^3 \Xi_l = d\Xi_{lx} d\Xi_{ly} d\Xi_{lz}$.

Как указано в работе [8]: «уравнение Больцмана описывает процесс превращения произвольного начального распределения в равновесное максвелловское распределение. Время релаксации такого процесса определяется интенсивностью диссипативных процессов (интегралом столкновений), т. е. эффективностью столкновений как механизма, формирующего максвелловское распределение. Для оценки τ по порядку величины можно считать, что»:

$$\tau \sim \frac{f}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{\vec{\Xi}_l} g_{lh} (f_l' f_h' - f_l f_h) b db d\varepsilon d\vec{\Xi}_l} \sim \frac{1}{r_0^2 \bar{v}_l n_l} \quad (1.10)$$

где r_0 – радиус молекулы модели газа из «твёрдых сфер» [3]; $\bar{v}_l, n_l$ – соответственно средняя тепловая скорость и плотность газа из молекул лёгкого компонента.

Далее будет рассмотрен случай стационарного решения для функции распределения f_l, f_h . Поэтому уравнение (1.9) запишется в виде:

$$\xi_{hx} \frac{\partial}{\partial x} f_h(x) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g_{lh} (F_l^{(M)'} f_h' - F_l^{(M)} f_h) b db d\varepsilon d\xi_l d\eta_l d\zeta_l \quad (1.11)$$

Причём в формуле (1.9) интеграл по трёхмерному пространству $\vec{\Xi}_l$ соответствует трём однократным:

$$\int_{\vec{\Xi}_l} \dots d^3 \Xi_l = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_l d\eta_l d\zeta_l \quad (1.12)$$

Изменение функции распределения тяжёлого компонента f_h удобно представить в виде суммы:

$$f_h(\vec{\Xi}, x) = F_{h,s}^{(M)}(\vec{\Xi}) - \Delta f_h(x), \quad (1.13)$$

где x – координата вдоль потока в ударной волне.

Нетрудно показать, что для добавки $\Delta f_h(x)$ справедливо линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\xi_{hx} \frac{\partial}{\partial x} \Delta f_h(x) = \Delta f_h(x) \cdot Z(\vec{\Xi}_h), \quad (1.14)$$

где $Z(\vec{\Xi}_h)$ – интегральное сечение взаимодействия молекул тяжёлого и лёгкого компонентов, причём в силу равенства (11) величина $Z(\vec{\Xi}_h)$ равна τ^{-1} , т. е.

$$Z(\vec{\Xi}_h) = \int_0^\pi d\chi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F_l^{(M)'} - F_l^{(M)}] B(g_{lh}, \chi) d\varepsilon d\xi_l d\eta_l d\zeta_l. \quad (1.15)$$

Множитель $B(g_{lh}, \chi)$ в формуле (1.15) пропорционален дифференциальному сечению рассеяния [9]. Рассмотрим в качестве примера две наиболее простых модели молекулярных соударений, для которых функция $B(g_{lh}, \chi)$ принимает наиболее простой вид:

1) модель молекул из «твёрдых сфер»

$$B(g_{lh}, \chi) = g_{lh} \sigma_{lh}^2 \sin \chi \cos \chi, \quad (1.16)$$

где $\sigma_{lh} = \frac{\sigma_l + \sigma_h}{2}$, σ_l, σ_h – соответственно диаметры молекул – «твёрдых сфер» лёгкого и тяжёлого компонентов;

2) модель «псевдомаксвелловских» молекул

$$B(g_{lh}, \chi) = \phi_{lh} \sin \chi \cos \chi, \quad (1.17)$$

где величина ϕ_{lh} – имеет размерность удельного потока скорости сталкивающихся молекул через единицу площади сферы соударений единичного радиуса, причём $\phi_{lh} = \text{const}$.

На основе решения уравнения (1.14) искомая функция распределения тяжёлого компонента f_h будет иметь следующий вид:

$$f_h(\vec{c}_h, x) = F_{h,s}^{(M)} - [F_{h,s}^{(M)} - F_{h,\delta}^{(M)}] \exp\left(-\frac{Z(\vec{\Xi}_h)(x-\delta_l)}{c_{hx}}\right), \quad (1.18)$$

где $F_{h,\delta}^{(M)}$ и $F_{h,s}^{(M)}$ – максвелловские распределения молекул тяжёлого компонента соответственно в начале его зоны релаксации и в её конце.

На основе равенства (1.18) можно построить решение для f_h в следующей безразмерной форме:

$$\frac{F_{h,s}^{(M)} - f_h(\vec{c}_h, x)}{[F_{h,s}^{(M)} - F_{h,\delta}^{(M)}]} = \exp(-\Gamma), \quad (1.19)$$

где

$$\Gamma = - \frac{Z(\vec{\Xi}_h)(x - \delta_l)}{c_{hx}} \quad (1.20)$$

Решение (1.19) имеет чрезвычайно простой и универсальный вид и обычно характерно для модельного кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука [3].

Однако, в отличие от заранее постулированного упрощённого вида модельного оператора столкновений, в рассматриваемом кинетическом уравнении (1.14) такое эквивалентное упрощение не постулируется, а достигается в силу приведённого выше асимптотического анализа задачи.

Дальнейшие строгие асимптотические преобразования интеграла столкновений в правой части уравнения (1.11) связаны с приведением его к дифференциальной форме, совпадающей в ряде случаев с интегралом столкновений в правой части кинетического уравнения Фоккер – Планка [10].

Ранее подобный метод был развит в работах [11; 12]. Целью этих работ было обоснование применения метода Чепмена – Энскога для вывода уравнения движения сильнодиспергированных смесей газов.

Как оказалось, наиболее адекватным методом аналитического исследования течений сильнодиспергированных газов является метод приведения интеграла столкновений к дифференциальной форме, впервые предложенный Г. А. Лорентцом [4; 11].

Преимуществом метода Лорентца по сравнению с методом Чепмена – Энскога является его большая область применимости к описанию движения газа, включая как режимы сплошной среды, так и переходные режимы по параметру разреженности (числу Кнудсена). Метод Лорентца применим также и для исследования структуры ударной волны в диспергированных средах.

Упрощение интеграла столкновений в методе Лорентца можно начать уже с интеграла столкновений в кинетическом уравнении (1.9) при неизвестном виде обоих искомых функций f_l и f_h .

В рассматриваемой задаче, как уже отмечалось ранее, функция f_l известна и совпадает с равновесным распределением Максвелла $F_l^{(M)}$ с макроскопическими параметрами (6), (7), постоянными по всей зоне релаксации тяжёлого компонента.

2. Модифицированный метод Тамма – Мотт-Смита

Известно, что для аналитического исследования задачи о структуре ударной волны в однокомпонентных газах в смысле простоты решения кинетического уравнения Больцмана и его практического использования наиболее эффективным оказался метод Тамма – Мотт-Смита [3].

Однако непосредственное использование этого метода в бинарных смесях газов оказалось невозможным из-за невыполнения законов сохранения потоков массы, импульса и энергии в произвольном сечении внутри фронта ударной волны [13].

В работе [14] был предложен модифицированный метод Тамма – Мотт-Смита, сохраняющий все его преимущества и для смесей газов без доказательства законов сохранения. Ниже в нашей работе приводится соответствующее доказательство.

Суть модификации метода Тамма – Мотт-Смита проще всего пояснить на примере бинарной смеси газов. Согласно этой модификации, представление функции распределения для молекул какого-либо компонента содержало две различные части. Первая часть совпадала с представлением функций распределения для этого компонента по методу Тамма – Мотт-Смита. Вторая часть (в виде добавки к первой) представляла собой произведение разности между распределениями Максвелла другого компонента, умноженной на весовой множитель. В работе [14] эта модификация была распространена на многокомпонентную смесь, причём функция распределения имела вид:

$$f_i(\mathbf{c}, x) = \frac{1-h(x)}{2} f_i^-(\mathbf{c}) + \frac{1+h(x)}{2} f_i^+(\mathbf{c}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_{ij} \tilde{h}(x) [f_j^+(\mathbf{c}) - f_j^-(\mathbf{c})], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Здесь f_i^- и f_i^+ – поступательно равновесные максвелловские распределения

$$f_i^-(\mathbf{c}) = n_i^- \cdot m_i^{\frac{3}{2}} (2\pi kT^-)^{-3/2} \exp[-m_i(\mathbf{c} - \mathbf{v}^-)^2 / 2kT^-] \quad (2.2)$$

$$f_i^+(\mathbf{c}) = n_i^- \cdot m_i^{\frac{3}{2}} (2\pi kT^+)^{-3/2} \exp[-m_i(\mathbf{c} - \mathbf{v}^+)^2 / 2kT^+] \quad (2.3)$$

Индексы «-» и «+» в формулах (2.1)–(2.3) относятся к максвелловским функциям распределений по собственным тепловым скоростям молекул и макроскопическим параметрам этих функций соответственно на входе («-») и выходе («+») ударной волны, m_i – масса молекулы i -го компонента. Для компонента j формулы для максвелловских функций распределения, аналогичные (2.2), (2.3), получаются формальной заменой в них индекса i на индекс j , причём β_{ij} равно m_j/m_i .

В равенстве (2.1) функции $h(x)$ и $\tilde{h}(x)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$h(-\infty) = -1, h(+\infty) = 1, \tilde{h}(-\infty) = \tilde{h}(+\infty) = 0 \quad (2.4)$$

Соотношения (2.1)–(2.4) и представляют, собственно, модифицированную формулировку метода Тамма – Мотт-Смита. Главное в этой модификации – добавление к первым двум слагаемым, представляющим обычную формулировку метода, т. н. «Анзаца», третьего, содержащего функцию $\tilde{h}(x)$.

Добавление этого слагаемого и является главным достижением в формулировке модифицированного метода, поскольку благодаря ему автоматически выполняется обязательное требование выполнения законов сохранения переноса парциальных масс, суммарного импульса и суммарной энергии смеси газов в любом сечении внутри ударной волны. Замечательным достоинством модифицированного подхода является также и то, что при переходе к бинарной смеси газов число неизвестных функций остаётся тем же, что и в простом газе, т. е. две:

$$h(x) \text{ и } \tilde{h}(x) \quad (2.5)$$

В связи с этим заметим также, что использование обычной формулировки метода Тамма – Мотт-Смита, как было показано в работе [13], невозможно при определении структуры изменения макропараметров внутри ударной волны, ввиду невыполнения законов сохранения. Для их выполнения обычно используют другую, менее совершенную модификацию «Анзац», использованную, например, в работе [15], где помимо функций (2.5) приходится считать переменными и параметры: T^+ , v^+ .

Это обстоятельство делает практически невозможным получение аналитического решения с помощью бимодальной аппроксимации функций распределения в ударной волне [15; 16].

В работе [14] утверждение об автоматическом выполнении законов сохранения не было проверено. Ниже мы дадим проверку этого утверждения.

3. Проверка выполнения законов сохранения потоков массы, импульсов и энергии при произвольном значении координаты x внутри волны

3.1. Сохранение потока массы каждого компонента « i »

Поток массы каждого компонента « i » при произвольном значении координаты x

$$\langle c_x m_i f_i \rangle \quad (3.1.1)$$

вычисляется интегрированием по фазовому пространству скоростей молекул $\vec{c}$ с использованием равенств (2.1)–(2.3):

$$\begin{aligned} \langle m_i c_x f_i \rangle &= \frac{1}{2} [\langle m_i c_x f_i^+(\vec{c}) \rangle + \langle c_x f_i^-(\vec{c}) \rangle] \\ &+ \frac{h(x)}{2} [\langle m_i c_x f_i^+(\vec{c}) \rangle - \langle m_i c_x f_i^-(\vec{c}) \rangle] + \\ &+ \tilde{h}(x) \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{2} [\langle m_j c_x f_j^+(\vec{c}) \rangle - \langle m_j c_x f_j^-(\vec{c}) \rangle], \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

3.2. Сохранение суммарного потока импульсов компонентов смеси

Как известно [4], в смесях газов сохраняется суммарный поток импульсов компонентов смеси

$$\langle \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i \rangle \quad (3.2.1)$$

Как в предыдущем подпункте 3.1. используем соотношения (2.1)–(2.3). Тогда для выражения (3.2.1) получим следующее представление:

$$\begin{aligned} \langle \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i \rangle &= \frac{1}{2} \left[\langle \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i^+(\vec{c}) \rangle + \langle \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i^-(\vec{c}) \rangle \right] + \\ &+ h(x) \frac{1}{2} \left[\langle \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i^+(\vec{c}) \rangle - \langle \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i^-(\vec{c}) \rangle \right] + \end{aligned}$$

$$+\tilde{h}(x) \left[< \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} c_x^2 f_j^+(\vec{c}) > - < \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} c_x^2 f_j^-(\vec{c}) > \right] \quad (3.2.2)$$

3.3. Сохранение суммарного потока энергии компонентов смеси

Подобно сохранению суммарного импульса в смесях газов сохраняется суммарный поток энергии компонентов смеси [4].

$$< \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} c^2 + E_i \right) c_x f_i >, \quad (3.3.1)$$

где E_i внутренняя энергия молекул смеси газов.

Используя модифицированный «Анзац» (2.1) аналогично соотношениям (3.1.2) и (3.2.2), получим

$$\begin{aligned} < \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} c^2 + E_i \right) c_x f_i > = \frac{1}{2} \left[< \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} c^2 + E_i \right) c_x f_i^+(\vec{c}) > + < \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} c^2 + E_i \right) c_x f_i^-(\vec{c}) > \right] + \frac{h(x)}{2} \left[< \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} c^2 + E_i \right) c_x f_i^+(\vec{c}) > - < \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} c^2 + E_i \right) c_x f_i^-(\vec{c}) > \right] + \frac{\tilde{h}(x)}{2} \left[< \sum_{j=1}^N \left(\frac{m_j}{2} c^2 + E_j \right) c_x f_j^+(\vec{c}) > - < \sum_{j=1}^N \left(\frac{m_j}{2} c^2 + E_j \right) c_x f_j^-(\vec{c}) > \right] \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Сохранение потоков макровеличин смеси газов, указанных в разделе 3, вытекает из равенств (3.1.1) – (3.3.2) следующим образом:

Левые части указанных равенств основаны на интегрировании по всему фазовому пространству тепловых скоростей молекул $\vec{c}$ и взяты при произвольном значении координаты x внутри ударной волны, поскольку эта координата входит в число аргументов функции распределения молекул f_i , причём

$$f_i = f_i(\vec{c}, x) \quad (3.3.3)$$

1. В правой же части равенств расстояние x входит только в координатные функции (2.5). Такая факторизация фазового пространства, как известно [4], характерна вообще для моментных методов решения уравнения Больцмана и, в частности, для классического «Анзаца» Тамма – Мотт-Смита [3; 9] и рассматриваемой его модификации (2.1) [14].

Важно отметить, что каждая из координатных функций (2.5) умножается на квадратную скобку, в которой содержатся левые и правые части соотношений Рэнкина – Гюгоньо в смесях газов. Левые и правые части этих соотношений относятся соответственно к левой ($x \rightarrow -\infty$) и к правой ($x \rightarrow +\infty$) асимптотическим границам ударной волны.

Покомпонентное сохранение (для каждого «i») потока массы

$$< m_i c_x f_i^-(\vec{c}) > = < m_i c_x f_i^+(\vec{c}) > \quad (3.3.4)$$

Сохранение суммарного потока импульсов компонентов смеси

$$< \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i^-(\vec{c}) > = < \sum_{i=1}^N m_i c_x^2 f_i^+(\vec{c}) > \quad (3.3.5)$$

Сохранение суммарного потока энергии компонентов смеси

$$\begin{aligned}
& < \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i c^2}{2} + E_i \right) c_x f_i^-(\vec{c}) > = \\
& = < \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i c^2}{2} + E_i \right) c_x f_i^+(\vec{c}) > \quad (3.3.6)
\end{aligned}$$

Проследим, какие изменения произойдут при учёте равенств (3.3.4) – (3.3.6) в правых частях формул (3.1.2), (3.2.2) и (3.3.2).

Первые квадратные скобки в правых частях этих формул, умножаемые на множитель $\frac{1}{2}$, содержат сумму одинаковых слагаемых. Вследствие этого первые квадратные скобки можно заменить на одно из этих слагаемых.

Во вторых и третьих квадратных скобках содержатся разности равных друг другу левых и правых частей соотношений Рэнкина – Гюгонио в смесях газов. Поэтому не равные нулю внутри ударной волны координатные множители (2.5) будут умножаться на равные нулю вторые и третьи квадратные скобки.

В силу этого законы сохранения потоков массы, импульсов и энергии при произвольном значении координаты x внутри волны будут выполняться автоматически.

Заключение

Для сильно диспергированных смесей газов рассмотрена строгая асимптотическая постановка задачи о структуре ударного фронта.

Показано, что для рэлеевской смеси газов в случае асимптотического перехода типа (1) функция распределения лёгкого компонента остаётся неизменной на всей длине релаксации тяжёлого компонента. Эта функция равна максвелловскому распределению с макроскопическими параметрами, определяемыми по соотношениям Рэнкина – Гюгонио в ударной волне с одним лёгким компонентом.

Найден асимптотический вид кинетического уравнения для релаксации тяжёлого компонента к общему состоянию поступательного равновесия с лёгким компонентом.

Таким уравнением, как оказалось, является уравнение Больцмана для одномерной ударной волны с Фоккер – Планковским оператором столкновений. Приведён явный вид этого уравнения. Для применения модифицированного метода Тамма – Мотт-Смита, сохраняющего все преимущества его исходной классической редакции, доказаны законы сохранения потоков массы, импульса и энергии при произвольном значении координаты внутри фронта ударной волны.

Статья поступила в редакцию 31.10.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Аналитическая оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста в ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 2. С. 41–51. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51.
2. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Асимптотическое значение эффекта высокоскоростного перехлёста в ударной сжатой смеси газов / Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 39–56. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 510 с.
5. Куликов С. В. Поступательная неравновесность трёхкомпонентного газа во фронте ударной волны // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1997. № 4. С. 171–178.
6. Численное моделирование процессов поступательной и химической неравновесности во фронте сильной ударной волны / Горелов В. А., Комаров В. Н., Кузнецов М. М., Юмашев В. Л. // Теоретические основы химической технологии. 2003. Т. 37. № 1. С. 3–9.
7. Великодный В. Ю., Битюрин В. А. О возможности термоядерного синтеза во фронте ударной волны // Прикладная физика. 2001. № 3. С. 12–19.
8. Осипов А. И. Релаксационные процессы в газах. 1. Неравновесное распределение энергии по поступательным степеням свободы // Физика горения и взрыва. 1966. Т. 2. № 4. С. 42–61.
9. Черчэньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с.
10. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1997. 367 с.
11. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976. 496 с.
12. Галкин В. С., Макашев Н. К. Условия применимости и молекулярно-кинетический вывод уравнений многотемпературной многоскоростной газодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. № 6. С. 1443–1453.
13. Samuel Tanenbaum B., MacDonald Scott R. Comments on “Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture” // Physics of Fluids. 1966. Vol. 9. Iss. 5. P. 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772.
14. Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures // Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej). 1983. Vol. 35. No. 2. P. 215–239.
15. Oberai M. M. Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture // Physics of Fluids. 1965. Vol. 8. P. 826–833. DOI: 10.1063/1.1761326.
16. Fujimoto T. Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixtures with No Chemical Reaction // Rarefied Gas Dynamics. Vol. 1. Proceedings of the Fourth International Symposium held at the Institute for Aerospace Studies (Toronto, 1964) / ed. by J. H. de Leeuw. New York: Academic Press, 1965. P. 223–239.

REFERENCES

1. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. [Analytical estimation of the highest value of the effect of high-speed overshoot in a shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the

- Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2021, no. 2, pp. 41–51. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51.
2. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. [The asymptotic high-speed overshoot effect value in shock-compressed gas mixture]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2021, no. 3, pp. 39–56. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56.
 3. Kogan M. N. *Dinamika razrezhennogo gaza* [Dynamics of rarefied gas]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 440 p.
 4. Chapmen S., Cowling T. *Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov* [The Mathematical Theory of Non-uniform Gases]. Moscow, Izdatelstvo inostrannoy literatury Publ., 1960. 510 p.
 5. Kulikov S. V. [Translational nonequilibrium of a three-component gas in the front of a shock wave]. In: *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics. A Journal of Russian academy of Sciences], 1997, no. 4, pp. 171–178.
 6. Gorelov V. A., Komarov V. N., Kuznetsov M. M., Yumashev V. L. [Numerical modeling of the translational and chemical disequilibria in the front of a strong shock wave]. In: *Teoreticheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering], 2003, vol. 37, no. 1, pp. 3–9.
 7. Velikodny V. Yu., Bityurin V. A. [About possibility of thermonuclear synthesis in a shock wave front]. In: *Prikladnaya fizika* [Applied Physics], 2001, no. 3, pp. 12–19.
 8. Osipov A. I. [Relaxation processes in gases. 1. Nonequilibrium distribution of energy over translational degrees of freedom]. In: *Fizika gorennya i vzryva* [Combustion, Explosion and Shock Waves], 1966, vol. 2, no. 4, pp. 42–61.
 9. Cherenyani K. *Teoriya i prilozheniya uravneniya Boltsmana* [Theory and applications of the Boltzmann equation]. Moscow, Mir Publ., 1978. 496 p.
 10. Akhiezer A. I., Peletminsky S. V. *Metody statisticheskoy fiziki* [Methods of statistical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 367 p.
 11. Mitchner M., Kruger C. *Chastichno ionizovannyye gazy* [Partially ionized gases]. Moscow, Mir Publ., 1976. 496 p.
 12. Galkin V. S., Makashev N. K. [Conditions for the applicability and molecular-kinetic derivation of the equations of multitemperature multivelocity gas dynamics]. In: *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1983, T. 23, no. 6, pp. 1443–1453.
 13. Samuel Tanenbaum B., MacDonald Scott R. Comments on “Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture”. In: *Physics of Fluids*, 1966, vol. 9, iss. 5, pp. 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772.
 14. Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures. In: *Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej)*, 1983, vol. 35, no. 2, pp. 215–239.
 15. Oberai M. M. Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture. In: *Physics of Fluids*, 1965, vol. 8, pp. 826–833. DOI: 10.1063/1.1761326.
 16. Fujimoto T. Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixtures with No Chemical Reaction. In: de Leeuw J. H., ed. *Rarefied Gas Dynamics. Vol. 1. Proceedings of the Fourth International Symposium held at the Institute for Aerospace Studies (Toronto, 1964)*. New York, Academic Press, 1965, pp. 223–239.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кузнецов Глеб Витальевич – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: GlebWOW7@yandex.ru;

Паренкина Виктория Игоревна – старший преподаватель кафедры 916 «Математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);

e-mail: parjonkinavi@mail.ru;

Сатюков Дмитрий Геннадьевич – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: dsatyukov@gmail.com;

Халиков Руслан Фанусович – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: Rustek95@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Gleb V. Kuznetsov – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;

e-mail: GlebWOW7@yandex.ru;

Viktorya I. Parenkina – Senior Lecturer, Department 916 “Mathematics” Moscow Aviation Institute (National Research University);

e-mail: parjonkinavi@mail.ru;

Dmitry G. Satyukov – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;

e-mail: dsatyukov@gmail.com;

Ruslan F. Halikov – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;

e-mail: Rustek95@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Аналитические модели поступательно неравновесной динамики ударно-сжатых бинарных смесей газов / Кузнецов М. М., Кузнецов Г. В., Паренкина В. И., Сатюков Д. Г., Халиков Р. Ф. // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 4. С. 36–48.

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuznetsov G. V., Parenkina V. I., Satyukov D. G., Halikov R. F. Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 4, pp. 36–48.

DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48