

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-65-77

ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ ВОКРУГ ДВУХ НАГРЕВАЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ КАПЕЛЬ

Хасанов А. С.

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация

Цель. Формулы для полей температуры и концентрации вокруг двух испаряющихся одинаковых аэрозольных капель в поле электромагнитного излучения обобщаются на случай двух капель с произвольными радиусами.

Процедура и методы. Коэффициенты в разложениях полей температуры и концентрации по сферическим функциям рассматриваются как координаты векторов бесконечномерного линейного нормированного пространства, которые находятся из граничных условий операторными методами.

Результаты. Формулы для полей температуры и концентрации вокруг двух одинаковых капель обобщены для двух капель с произвольными радиусами. Проведены расчёты по этим формулам и приведены графики профилей полей температуры и концентрации для двух капель с неодинаковыми радиусами для разных расстояний между центрами капель.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные теоретические формулы позволяют составить простые алгоритмы для практических расчётов.

Ключевые слова: аэрозольные капли, испарение капель, взаимодействующие капли

TEMPERATURE AND CONCENTRATION FIELDS AROUND TWO DROPS HEATED BY ELECTROMAGNETIC RADIATION

A. Khasanov

*Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanniy per. 36, Moscow 117997, Russian Federation*

Abstract

Aim. Formulae for temperature and concentration fields around two evaporating identical aerosol drops in the electromagnetic radiation field are generalized to the case of two drops with arbitrary radii.

Methodology. Coefficients in expansions of temperature and concentration fields by spherical functions are considered as coordinates of vectors of an infinite-dimensional linear normalized space, which are found from boundary conditions by means of linear operators.

Results. Generalized formulae for temperature and concentration fields around two drops with arbitrary radii are obtained. Calculations are carried out using these formulae and graphs of

temperature and concentration field profiles for two unequal drops for different distances between drop centers are given.

Research implications. The obtained theoretical formulae for temperature and concentration fields around two drops with arbitrary radii allow one to make simple algorithms for practical calculations.

Keywords: aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops

Введение

Задача об испарении одиночных капель в поле электромагнитного излучения решалась в работах [1–2]. Задача об испарении двух взаимодействующих капель рассматривалась в работах [3–6] с применением биполярной системы координат. Для понимания процесса испарения двух взаимодействующих испаряющихся капель важным является исследование полей температуры и концентрации вокруг этих капель. Наиболее сильно это взаимодействие выражено на линии центров капель. В работе [7] нами были получены формулы для этих профилей полей температуры и концентрации вокруг двух одинаковых капель методами теории линейных операторов. Этот метод достаточно прост и может быть использован при решении и других задач об аэрозольных частицах [8–11]. Задача об испарении аэрозольных капель с учётом различных эффектов остаётся актуальной [12–16]. Целью настоящей работы является обобщение результатов работы [7] на случай двух капель с произвольными радиусами.

Методы

В задаче рассматриваются две неподвижные капли чистого вещества, взвешенные в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси образован молекулами вещества капель, а второй компонент состоит из молекул несущего газа. На капли падает монохроматическое излучение, которое нагревает их. Предполагается, что коэффициент теплопроводности вещества капель значительно больше коэффициента теплопроводности несущего газа. В этих условиях распределение температуры вдоль поверхности любой из двух капель можно считать однородным. Молекулы вещества капель могут испаряться с поверхностей капель или конденсироваться на них. Молекулы несущего газа не испытывают фазового перехода на поверхностях капель. Радиусы капель будем считать достаточно большими по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул бинарной смеси. В этом случае при записи граничных условий на поверхностях капель мы можем пренебречь влиянием скачков температуры и концентрации на процессы испарения и конденсации. При этом мы считаем, что радиусы капель достаточно малы, чтобы можно было пренебречь временами релаксаций полей температуры и концентрации. Это позволяет нам процессы испарения и конденсации описывать в квазистационарном приближении. Пусть n_1 и n_2 – численные концентрации молекул первого и второго компонентов бинарной смеси и $n = n_1 + n_2$. Тогда относительные концентрации этих компонентов определяются по формулам $c_1 = \frac{n_1}{n}$ и $c_2 = \frac{n_2}{n}$, где $c_1 + c_2 = 1$. Будем считать, что $c_1 \ll 1$. В этом случае определяющим механизмом переноса

молекул в бинарной смеси является диффузия, т. е. процессы испарения (или конденсации) происходят в диффузионном режиме.

Пусть O_1 и O_2 – центры капель, R_1 и R_2 – радиусы капель ($R_1 \leq R_2$). В декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ направление оси O_1z_1 совпадает с направлением вектора $\overline{O_1O_2}$. Декартова система координат $O_2x_2y_2z_2$ получена путем параллельного переноса системы координат $Ox_1y_1z_1$. Пусть P – точка плоскости, проходящей через линию центров капель, r_1, θ_1, φ_1 – сферические координаты этой точки в системе координат с началом в точке O_1 , а r_2, θ_2, φ_2 – с центром в точке O_2 , где $r_1 \geq R_1$ и $r_2 \geq R_2$.

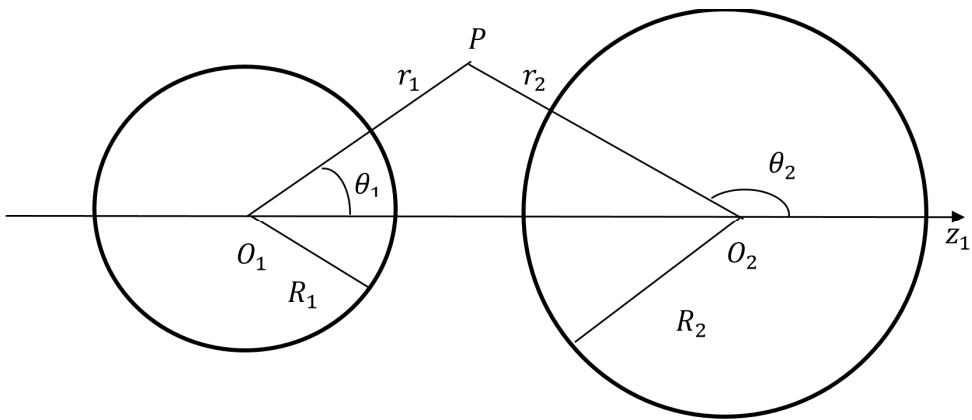


Рис. 1 / Fig. 1. Сферические координаты r_1, θ_1 и r_2, θ_2 одной и той же точки P в бинарной смеси в сферических системах координат с началами в точках O_1 и O_2 / Spherical coordinates r_1, θ_1 and r_2, θ_2 of the same point P in a binary mixture in spherical coordinate systems with origins at points O_1 and O_2 .

Источник: составлено автором.

Пусть T – распределение температуры в бинарной смеси. Прямая O_1O_2 является осью симметрии полей T и c_1 , следовательно, эти поля не зависят от сферической координаты φ . Будем считать, что на большом удалении от капель величины T и c_1 равны постоянным величинам T_∞ и $c_{1\infty}$. Предполагается, что процессы испарения и конденсации происходят при малых относительных перепадах температуры, т. е. $\left| \frac{T-T_\infty}{T_\infty} \right| \ll 1$. Пусть $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$ – температуры поверхностей первой и второй капель. Эти величины являются неизвестными задачи и будут найдены из граничных условий. Относительные концентрации молекул насыщенных паров вещества капель при температурах $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$ обозначим символами $c_{1s}(T_{s,1})$ и $c_{1s}(T_{s,2})$. При одновременном выполнении условий $\left| \frac{T-T_\infty}{T_\infty} \right| \ll 1$ и $c_1 \ll 1$ мы приходим к следующей граничной задаче [6]:

$$\Delta T = 0, \quad (1)$$

$$\Delta c_1 = 0, \quad (2)$$

$$T = T_{s,1}, c_1 = c_{1s}(T_{s,1}) \text{ на поверхности первой капли,} \quad (3)$$

$$T = T_{s,2}, c_1 = c_{1s}(T_{s,2}) \text{ на поверхности второй капли,} \quad (4)$$

$$T = T_\infty \text{ на большом расстоянии от капель,} \quad (5)$$

$$c_1 = c_{1\infty} \text{ на большом расстоянии от капель.} \quad (6)$$

Решения уравнений (1) – (2) ищем в виде [17]:

$$T = T_\infty + (T_{s,1} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) + \\ + (T_{s,2} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2), \quad (7)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + (c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) + \\ + (c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2), \quad (8)$$

где $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты, P_n – полином Лежандра. Пусть $A_1 = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots)^T$, $A_2 = (a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots)^T$, $B_1 = (b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots)^T$, $B_2 = (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots)^T$. Из предположения об абсолютной сходимости рядов в разложениях (7)–(8) на поверхностях капель следует, что эти четыре вектора являются элементами линейного нормированного пространства l_1 [18] бесконечномерных векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$ с нормой $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

В разложениях (7)–(8) уже учтены условия (5)–(6). При рассмотрении граничного условия (3) на поверхности первой капли, слагаемые в разложениях (7)–(8) полей T и c_1 , записанные через координаты r_2 , θ_2 , записываются через координаты r_1 , θ_1 с использованием формулы [17]

$$(-1)^n \left(\frac{l}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_1), \quad (9)$$

справедливой вблизи первой капли, где C_{n+s}^n – биномиальные коэффициенты, l – расстояние между центрами капель. Аналогично, при рассмотрении условия (4) на поверхности второй капли, слагаемые в разложениях (7)–(8), записанные через координаты r_1 , θ_1 , записываются через координаты r_2 , θ_2 с использованием формулы [17]

$$\left(\frac{l}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_{n+s}^n \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_2), \quad (10)$$

справедливой вблизи второй капли. Так как $\left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} = \left(\frac{l}{r_2}\right)^{n+1} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1}$, то формулы (7)–(8) вблизи первой капли могут быть записаны в виде

$$T = T_\infty + (T_{s,1} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) +$$

$$+(T_{S,2} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_n^{(2)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_1), \quad (11)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + (c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) + \\ + (c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} b_n^{(2)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_1). \quad (12)$$

Аналогично, так как $\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} = \left(\frac{l}{r_1}\right)^{n+1} \left(\frac{R_1}{l}\right)^{n+1}$, то вблизи второй капли

$$T = T_\infty + (T_{S,2} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2) + \\ + (T_{S,1} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_n^{(1)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_1}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_2), \quad (13)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + (c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2) + \\ + (c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s b_n^{(1)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_1}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_2). \quad (14)$$

Запишем граничные условия (3)–(4) в виде матричных уравнений относительно четырёх неизвестных векторов A_1, A_2, B_1, B_2 . Для этого введём матрицы C_1 и C_2 с бесконечным числом строк и столбцов, элементы которых с индексами $i \in N$ и $j \in N$ определяются по формулам:

$$(C_1)_{ij} = C_{i+j-2}^{j-1} \left(\frac{R_1}{l}\right)^{i-1} \left(\frac{R_2}{l}\right)^j, \quad (15)$$

$$(C_2)_{ij} = C_{i+j-2}^{j-1} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{i-1} \left(\frac{R_1}{l}\right)^j. \quad (16)$$

Можно доказать, что эти матрицы принадлежат линейному нормированному пространству M матриц C с бесконечным числом строк и столбцов с нормой $\|C\| = \sup \sum_{s=1}^{\infty} |c_{sn}|$. При этом, если $X \in l_1$ и $C \in M$, то матричный оператор, определённый по формуле $Y = CX$, где CX – произведение матрицы C на вектор X , действует из l_1 в l_1 . В дальнейшем для матрицы и порождённого ею матричного оператора будем использовать одно и то же обозначение. Можно показать, что норма матричного оператора C , согласованная с нормой вектора X , равна $\|C\| = \sup \sum_{s=1}^{\infty} |c_{sn}|$. После подстановки разложений (11)–(14) в граничные условия (3)–(4) и изменения порядка суммирования в двойных суммах, приравнивание коэффициентов при одинаковых многочленах Лежандра в правых и левых частях условий (3)–(4) приводит к следующим уравнениям, записанным в матричной форме:

$$A_1 + \frac{T_{S,2} - T_\infty}{T_{S,1} - T_\infty} C_1 A_2 = E_1, \quad B_1 + \frac{c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}} C_1 B_2 = E_1, \\ A_2 + \frac{T_{S,1} - T_\infty}{T_{S,2} - T_\infty} C_2 A_1 = E_1, \quad B_2 + \frac{c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}} C_2 B_1 = E_1,$$

где $E_1 = (1, 0, 0, \dots)^T \in l_1$. Решение этой системы простым методом подстановки приводит к следующему ответу:

$$A_1 = (E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - \frac{T_{S,2} - T_\infty}{T_{S,1} - T_\infty} (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1, \quad (17)$$

$$A_2 = (E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - \frac{T_{s,1} - T_\infty}{T_{s,2} - T_\infty} (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1, \quad (18)$$

$$B_1 = (E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - \frac{c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}} (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1, \quad (19)$$

$$B_2 = (E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - \frac{c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}} (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1, \quad (20)$$

где E – единичная матрица с бесконечным числом строк и столбцов. В нашей задаче предполагается, что капли не касаются друг друга, т. е. $R_1 + R_2 < l$. В этом случае простыми приёмами нахождения сумм числовых рядов можно доказать, что $\|C_1\| < 1$, $\|C_2\| < 1$. Ясно, что $E \in M$, $\|E\| = 1$, $C_1 C_2 \in M$, $\|C_1 C_2\| \leq \|C_1\| \cdot \|C_2\| < 1$, $C_2 C_1 \in M$, $\|C_2 C_1\| \leq \|C_2\| \cdot \|C_1\| < 1$. Следовательно, $(E - C_1 C_2)^{-1} \in M$, $(E - C_2 C_1)^{-1} \in M$ [18]. Таким образом, $A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_1$, $B_1 \in l_1$, $B_2 \in l_1$.

Для перехода от векторных величин к скалярным величинам введём линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей m [18]. Если $V = (v_1, v_2, \dots) \in m$, то $\|V\| = \sup |v_k|$. Если фиксированную последовательность $V \in m$ рассматривать как матрицу, состоящую из одной строки с бесконечным числом элементов, то по формуле $y = VX$, где $X \in l_1$, а VX – произведение матриц, можно определить матричный оператор (в данном случае это будет функционал), действующий из l_1 в $(-\infty, +\infty)$. Этот функционал будем обозначать тоже буквой V . Его норма, согласованная с нормой вектора $X \in l_1$, совпадает с числом $\|V\| = \sup |v_k|$.

Определим в точке kP бинарной смеси вектор-строку $V^{(1)}(P) = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots) \in m$, где

$$v_k^{(1)} = \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k P_{k-1}(\cos\theta_1). \quad (21)$$

Аналогично определяется вектор-строка $V^{(2)}(P) = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots) \in m$, где

$$v_k^{(2)} = (-1)^{k-1} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k P_{k-1}(\cos\theta_2). \quad (22)$$

Из формул (11)–(14) и (17)–(20) получим следующие формулы для полей T и c_1 :

$$T(P) = T_\infty + V^{(1)}(P)[(T_{s,1} - T_\infty)(E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - (T_{s,2} - T_\infty)(E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] + V^{(2)}(P)[(T_{s,2} - T_\infty)(E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - (T_{s,1} - T_\infty)(E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1], \quad (23)$$

$$c_1(P) = c_{1\infty} + V^{(1)}(P)[(c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty})(E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - (c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty})(E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] + V^{(2)}(P)[(c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty})(E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - (c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty})(E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1]. \quad (24)$$

Путём предельного перехода при $l \rightarrow \infty$ из формул (23)–(24) можно получить формулы для одиночной капли. При $R_1 = R_2$ мы получим формулы, приведённые в работе [7] для случая двух одинаковых капель.

Поиск неизвестных температур $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$ поверхностей капель

Пусть $H_{w,1}$ и $H_{w,2}$ – тепло, выделяющееся в единицу времени в объёме первой и второй каплей соответственно. Эти величины равны суммарной мощности тепловых источников, которые возникают вследствие поглощения каплями

монохроматического излучения. Величины $H_{w,1}$ и $H_{w,2}$ могут быть найдены по формулам [6]

$$H_{w,1} = \pi R_1^2 I K_{w,1}, \quad (25)$$

$$H_{w,2} = \pi R_2^2 I K_{w,2}, \quad (26)$$

где I – интенсивность излучения, а $K_{w,1}$ и $K_{w,2}$ – факторы поглощения первой и второй каплей. Пусть H_1 и $Q_{1,1}$ – потоки тепла и первого компонента газовой смеси через поверхность первой капли. Аналогичные потоки через поверхность второй капли обозначим через H_2 и $Q_{1,2}$. Тогда

$$H_{w,1} = L_1 m_1 Q_{1,1} + H_1, \quad (27)$$

$$H_{w,2} = L_1 m_1 Q_{1,2} + H_2, \quad (28)$$

где L_1 и m_1 – удельная теплота фазового перехода и масса молекул первого компонента бинарной смеси. На основе разложений (23)-(24) полей T и c_1 , величины H_1 , H_2 , $Q_{1,1}$ и $Q_{1,2}$ могут быть найдены путем простых вычислений соответствующих поверхностных интегралов. С учётом условия $\left| \frac{T-T_\infty}{T_\infty} \right| \ll 1$, из уравнений (27)–(28) могут быть выведены следующие уравнения относительно неизвестных температур $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$ поверхностей капель. Для нахождения температуры $T_{s,1}$ получим уравнение

$$\begin{aligned} T_{s,1} - T_\infty + \frac{L_1 m_1 n D_{12}}{\kappa_e} (c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}) = \\ = \frac{(IR_1 K_{w,1}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} E_1 + (IR_2 K_{w,2}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1}{[E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} E_1] - [E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1]}. \end{aligned} \quad (29)$$

Температуру $T_{s,2}$ можно найти из уравнения

$$\begin{aligned} T_{s,2} - T_\infty + \frac{L_1 m_1 n D_{12}}{\kappa_e} (c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}) = \\ = \frac{(IR_2 K_{w,2}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} E_1 + (IR_1 K_{w,1}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1}{[E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} E_1] - [E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1]}, \end{aligned} \quad (30)$$

где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси, κ_e – коэффициент теплопроводности несущего газа, $E_1^T = (1, 0, 0, \dots) \in m$. В случае капель воды величины $K_{w,1}$ и $K_{w,2}$ могут быть найдены по формулам [6]

$$K_{w,1} = \exp \left[-0,2 \left(\sqrt{n_\lambda^2 + m_\lambda^2} - 1 \right) \right] \cdot [1 - \exp \left(-8\pi m_\lambda \frac{R_1}{\lambda} \right)], \quad (31)$$

$$K_{w,2} = \exp \left[-0,2 \left(\sqrt{n_\lambda^2 + m_\lambda^2} - 1 \right) \right] \cdot [1 - \exp \left(-8\pi m_\lambda \frac{R_2}{\lambda} \right)], \quad (32)$$

где n_λ , m_λ – действительная и мнимая части показателя преломления воды для длины волны λ . Путём предельного перехода при $l \rightarrow \infty$ из формулы (29) можно получить уравнение для одиночной капли.

Расчёт профилей полей температуры и концентрации

Так как наиболее сильное взаимодействие капель проявляется на линии их центров, то рассмотрим поля T и c_1 на этой линии. Так мы получим профили температуры и концентрации. В этом случае координаты θ_1 и θ_2 , в зависимости от положения точки P на линии центров, принимают только два значения 0 и π , а координаты r_1 и r_2 легко выражаются через координату z_1 системы координат

$O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 1). Так как $P_{k-1}(\cos 0) = 1$, $P_{k-1}(\cos \pi) = (-1)^{k-1}$, то формулы (21)–(22) приобретают вид:

$$v_k^{(1)} = \begin{cases} -\left(\frac{R_1}{z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in (-\infty, -R_1], \\ \left(\frac{R_1}{z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in [R_1, l - R_2] \cup [l + R_2, +\infty). \end{cases} \quad (33)$$

$$v_k^{(2)} = \begin{cases} \left(\frac{R_2}{l-z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in (-\infty, -R_1] \cup [R_1, l - R_2], \\ -\left(\frac{R_2}{l-z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in [l + R_2, +\infty). \end{cases} \quad (34)$$

Расчёты были проведены для капель воды в атмосфере [19] (при значении давления $p = 101325$ Па). Пусть, для определённости, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, $a_1 = 2,5$ мкм, $a_2 = 5$ мкм, $\lambda = 10,6$ мкм, $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$. Тогда [20] $n_\lambda = 1,1750$ и $m_\lambda = 0,0802$. Все расчёты можно выполнить в Excel с большой точностью, используя в расчётах урезанные матрицы. Для достижения высокой точности в матрицах нами были оставлены первые 52 строки и 52 столбца, а у вектор-строк $V^{(1)}(P)$, $V^{(2)}(P)$ были оставлены первые 52 элемента. Уравнения (29)–(30) при известном значении l легко решить в Excel относительно температур $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$ поверхностей капель. На рисунках 2–4 приведены профили полей температуры и концентрации для трёх значений расстояния l между центрами капель: $l = 24R_1$, $l = 12R_1$, $l = 6R_1$ (по горизонтальной оси отложена величина z_1/R_1 , где z_1 – координата точки P на оси O_1z_1). Результаты расчётов близки к соответствующим значениям, полученным в работе [6] с использованием биполярной системы координат.

Заключение

При $l = 24a_1$ на рис. 2 видно слабое влияние большей капли на процесс испарения меньшей капли (профили вблизи меньшей капли рассматриваемой пары капель незначительно отличаются от профилей вокруг одиночной меньшей капли). При $l = 12a_1$ на рис. 3 мы видим, что сближение капель приводит к повышению температуры поверхности меньшей капли, повышается и концентрация c_1 на её поверхности. Это происходит из-за затруднения отвода тепла и испаряющейся воды от поверхности меньшей капли. Этот эффект ещё сильнее заметен на рис. 4 при $l = 6a_1$. Сближение двух капель может привести к существенному увеличению времени испарения меньшей капли.

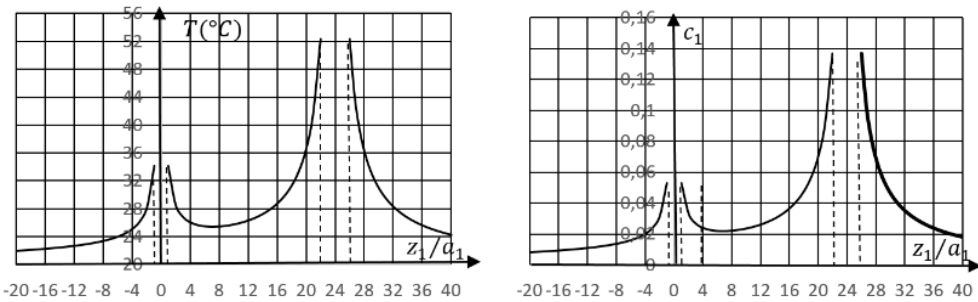


Рис. 2 / Fig. 2. Профили полей температуры и концентрации в воздухе вокруг двух испаряющихся капель воды с радиусами $a_1 = 2,5$ мкм и $a_2 = 5$ мкм, нагреваемых излучением с длиной волны $\lambda=10,6$ мкм и с интенсивностью $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ при значениях $p = 101325$ Па, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, $l = 24a_1$ / Temperature and concentration profiles around two evaporating water droplets of radii $a = 2.5 \mu\text{m}$ and $a = 5 \mu\text{m}$ in air, heated by radiation with a wavelength $\lambda=10.6 \mu\text{m}$ and an intensity $I = 1000 \text{ w/cm}^2$ at $p = 101325$ Pa, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, and $l = 24a_1$.

Источник: составлено автором.

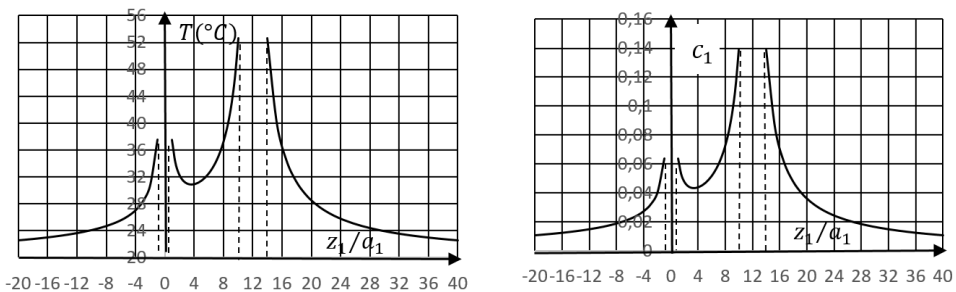


Рис. 3 / Fig. 3. Профили полей температуры и концентрации в воздухе вокруг двух испаряющихся капель воды с радиусами $a_1 = 2,5$ мкм и $a_2 = 5$ мкм, нагреваемых излучением с длиной волны $\lambda=10,6$ мкм и с интенсивностью $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ при значениях $p = 101325$ Па, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, $l = 12a_1$ / Temperature and concentration profiles around two evaporating water droplets of radii $a = 2.5 \mu\text{m}$ and $a = 5 \mu\text{m}$ in air, heated by radiation with a wavelength $\lambda=10.6 \mu\text{m}$ and an intensity $I = 1000 \text{ w/cm}^2$ at $p = 101325$ Pa, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, and $l = 12a_1$.

Источник: составлено автором.

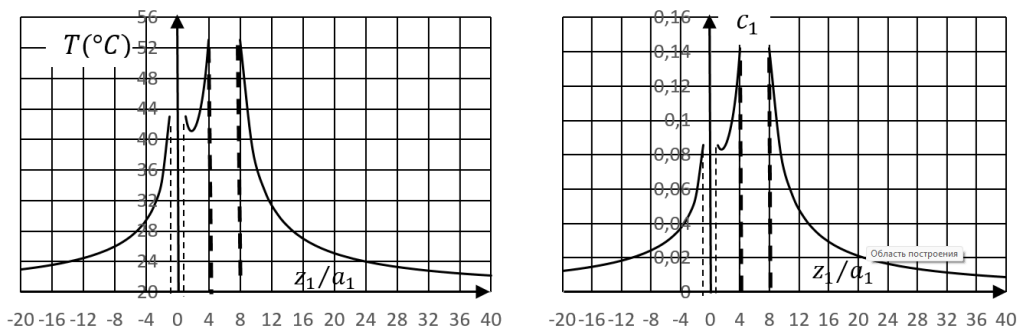


Рис. 4 / Fig. 4. Профили полей температуры и концентрации в воздухе вокруг двух испаряющихся капелек воды с радиусами $a_1 = 2,5$ мкм и $a_2 = 5$ мкм, нагреваемых излучением с длиной волны $\lambda = 10,6$ мкм и с интенсивностью $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ при значениях $p = 101325$ Па, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, $l = 6a_1$ / Temperature and concentration profiles around two evaporating water droplets of radii $a = 2.5 \mu\text{m}$ and $a = 5 \mu\text{m}$ in air, heated by radiation with a wavelength $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ and an intensity $I = 1000 \text{ w/cm}^2$ at $p = 101325$ Pa, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, $c_{1\infty} = 0$, and $l = 6a_1$.

Источник: составлено автором

Статья поступила в редакцию 14.04.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузиковский А. В. Динамика сферической частицы в мощном оптическом поле // Известия вузов. Физика. 1970. № 5. С. 89–94.
2. Яламов Ю. И., Шукин Е. Р., Уварова Л. А. Теория испарения капелек произвольных размеров в поле электромагнитного излучения // Инженерно-физический журнал. 1978. Т. 34. № 3. С. 439–443.
3. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 27. Iss. 5. P. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.
4. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 28. Iss. 7. P. 1298–1299. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
5. Теория испарения двух капелек, находящихся на произвольных расстояниях друг от друга / Яламов Ю. И., Барина М. Ф., Островский Ю. К., Шукин Е. Р. // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 341–344.
6. Шукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. М.: МПУ, 1992. 297 с.
7. Хасанов А. С. Формулы для профилей температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением одинаковых испаряющихся капелек // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 64–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76.

8. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твердых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях: монография. М.: МГОУ, 2006. 221 с.
9. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 293–297.
10. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Теория термофореза неоднородных аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 6. С. 929–935.
11. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Термофорез твердой сферической крупной аэрозольной частицы с учётом инерционных эффектов в уравнениях гидродинамики. М.: Московский педагогический университет, 1995. 33 с. Деп. в ВИНТИ № 3196-В95.
12. Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. О формуле, приемлемой для вычисления времени полного испарения как мелких, так и крупных сферических капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 56–69. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.
13. Прогностическая модель исследования процессов испарения капель воды / Антонов Д. В., Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Пискунов М. В. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 4. С. 936–944.
14. Особенности методики исследования процесса испарения подвешенных капель жидкости / Бочкарева Е. М., Лей М. К., Терехов В. В., Терехов В. И. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 5. С. 2208–2217.
15. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
16. Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды при движении через высокотемпературные газы // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 1. С. 104–111.
17. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
18. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
19. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
20. Centeno M. V. The Refractive Index of Liquid Water in the Near Infra-Red Spectrum // Journal of the Optical Society of America. 1941. Vol. 31. Iss. 3. P. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244.

REFERENCES

1. Kuzikovskiy A. V. [Dynamics of a spherical particle in a powerful optical field]. In: *Izvestiya vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 1970, no. 5, pp. 89–94.
2. Yalamov Yu. I., Shchukin E. R., Uvarova L. A. [The theory of evaporation of drops of arbitrary dimensions in the field of electromagnetic radiation]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of engineering physics and thermophysics], 1978, vol. 34, no. 3, pp. 439–443.
3. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 27, iss. 5, pp. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.

4. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 28, iss. 7, pp. 1298–1299. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
5. Yalamov Yu. I., Barinova M. F., Ostrovskiy Yu. K., Shchukin E. R. [Theory of the evaporation of two droplets with arbitrary distances between them]. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* [Soviet Physics. Doklady], 1985, vol. 284, no. 2, pp. 341–344.
6. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannyye voprosy fiziki aerolei* [Selected Problems of Aerosol Physics]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
7. Khasanov A. S. [Formulae for temperature and concentration profiles around two identical evaporating drops heated by electromagnetic radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2021, no. 1, pp. 64–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76.
8. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeystvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerolei v vneshnikh pol'yakh* [The theory of movement of sublimating and interacting solid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2006. 221 p.
9. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2006, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.
10. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [The theory of thermophoresis of inhomogeneous aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 1996, vol. 34, no. 6, pp. 929–935.
11. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. *Termoforez tverdoi sfericheskoi krupnoi aerolei s uchotom inertsiykh efektov v uravneniyakh gidrodinamiki* [Thermophoresis of a solid spherical large aerosol particle with allowance for inertial effects in hydrodynamic equations]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1995. 33 p. Dep. in VINITI no. 3196-V95.
12. Kuznetsov M. M., Kuz'min M. K., Kuleshova Yu. D. [On the formula acceptable for calculating the time of complete evaporation of both small and large spherical water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2022, no. 2, pp. 56–69. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.
13. Antonov D. V., Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Piskunov M. V. [Prognosis model for investigating the evaporation of water droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 4, pp. 936–944.
14. Bochkareva E. M., Ley M. K., Terekhov V. V., Terekhov V. I. [Methodological characteristics of an experimental investigation of the process of evaporation of suspended liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 5, pp. 2208–2217.
15. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Predictive determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gas media with a varying temperature]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
16. Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets moving through high-temperature gases]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2018, vol. 91, no. 1, pp. 104–111.

17. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics*. New York, Prentice-Hall, 1965. 553 p.
18. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 542 p.
19. Vargaftik N. B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i zhidkosti* [Reference book on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p.
20. Centeno M. V. The Refractive Index of Liquid Water in the Near Infra-Red Spectrum. In: *Journal of the Optical Society of America*, 1941, vol. 31, iss. 3, pp. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Поля температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением капель // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2023. № 2. С. 65-77. DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-65-77.

FOR CITATION

Khasanov A. S. Temperature and concentration fields around two drops heated by electromagnetic radiation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 65-77. DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-65-77.