

УДК 531.1

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-1-17-26

О КИНЕТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ ПРИ УЧЁТЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В УРАВНЕНИИ НАВЬЕ – СТОКСА

Гладков С. О., Зо Аунг

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация*

Аннотация

Цель: продемонстрировать методику вывода уравнения Навье – Стокса с учётом неоднородностей любого порядка по оператору Лапласа с помощью кинетического уравнения Больцмана.

Процедура и методы. Метод решения базируется на теории неравновесных явлений и основан на принципе роста энтропии.

Результаты. После проведённых вычислений найдены дополнительные неоднородные слагаемые к правой части уравнения Навье – Стокса по оператору Лапласа.

Теоретическая и практическая значимость. Спрогнозирован новый тип фундаментальных решений для стационарного уравнения параболического типа, имеющего существенное прикладное значение при решении ряда задач математической физики.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Навье – Стокса, бигармонический оператор

KINETIC APPROACH TAKING INTO ACCOUNT THE HETEROGENEITIES OF HIGHER ORDERS IN THE NAVIER – STOKES EQUATION

S. Gladkov, Zaw Aung

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shossse 4, Moscow 125993, Russian Federation*

Abstract

Aim. We demonstrate a method for deriving the Navier–Stokes equation taking into account inhomogeneities of any order according to the Laplace operator using the Boltzmann kinetic equation

Methodology. The solution method is based on the theory of nonequilibrium phenomena and on the principle of entropy growth

Results. After the calculations, additional heterogeneous terms are found to the right side of the Navier–Stokes equation according to the Laplace operator

Research implications. A new type of fundamental solutions for a stationary equation of parabolic type is predicted, which has a significant applied value in solving a number of problems of mathematical physics.

Keywords: Boltzmann kinetic equation, Navier–Stokes equation, biharmonic operator

Введение

Согласно общим принципам классической гидродинамики (см. [1–12]) при решении прикладных и чисто теоретических задач принципиальное значение имеет физическая постановка конкретной задачи, на решение которой нацелена соответствующая методика вычислений. Например, при решении задачи о вычислении силы сопротивления, которую решал Стокс, необходимым условием было условие «залипания» потока жидкости к поверхности шара. В этом случае основной областью решения был пограничный к поверхности слой жидкости, для которого реализовалось условие малости числа Рейнольдса, позволяющее свести стационарное нелинейное уравнение Навье – Стокса к линейному, что сильно упрощало задачу.

В нашей работе речь будет идти о выводе уравнения Навье – Стокса с учётом высших неоднородностей в его правой части по оператору Лапласа. Это оказывается возможным сделать с помощью кинетического уравнения Больцмана, многократно применявшегося при решении подобного рода задач многими авторами. Малым параметром при этом будет служить число Кнудсена $K = \frac{l}{2R}$, где l – длина свободного пробега молекул, R – радиус шара.

Важность этого шага диктуется прежде всего возможностью использовать полученное обобщённое уравнение Навье – Стокса к наночастицам, размер которых принадлежит диапазону $10^{-5} - 10^{-7}$ см ..

Стоит также обратить внимание и на следующий весьма важный момент. При решении поставленной задачи о вычислении силы сопротивления в постановке Стокса речь идёт о малом приграничном слое шириной δ , отсчитываемом в радиальном направлении от поверхности шара. Именно в этой области δ число Рейнольдса $Re = \frac{u\delta}{\nu}$ представляет собой малую величину, что и позволяет пренебречь нелинейным слагаемым $\nabla \Delta \mathbf{v}$ по сравнению со слагаемым $\nabla \Delta \mathbf{v}$. Это означает, что стационарное уравнение Навье – Стокса упрощается и приводится к виду $\nabla P = \eta \Delta \mathbf{v}$, которое и решал Стокс. Те же рассуждения справедливы и при решении нашей задачи.

В силу малости скорости потока $\mathbf{v}$ можно также в качестве граничного условия использовать условие «залипания» касательной и нормальной составляющих скорости потока на поверхности шара, то есть $v_\tau|_\Sigma = 0$, $v_n|_\Sigma = 0$. Эти граничные условия сильно отличаются от граничного условия при потенциальном обтекании, для которого справедливо равенство нулю только нормальной компоненты скорости, то есть $v_n|_\Sigma = 0$.

В рамках решаемой ниже задачи роль итерационного параметра будет играть число Кнудсена $K = \frac{l}{L}$, где L – линейный размер тела, которое часто представляется через число Рейнольдса и число Маха $M = \frac{u}{c_s}$, где c_s – скорость звука.

Действительно, если представить число Рейнольдса в виде $Re = \frac{uL}{\nu}$, то имеем:

$$Re = \frac{3uL}{l\nu_T} = 3 \frac{u}{c_s} \frac{c_s}{\nu_T} \frac{1}{K} = \frac{3c_s}{\nu_T} \frac{M}{K}. \quad (1)$$

Если исходить из формального определения скорости звука (см. [1]), а именно:

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}, \quad (2)$$

где P – давление, ρ – плотность, S – энтропия, в переменных V, T её можно записать как

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{\rho C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 - \frac{V}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}. \quad (3)$$

В случае использования уравнения состояния идеального газа $PV = NT$, отсюда следует, что

$$c_s = \sqrt{\frac{C_P}{C_V} \frac{T}{m}}, \quad (4)$$

где m – масса молекулы, C_V – изохорическая, а C_P – изобарическая теплоёмкости. Так как средняя тепловая скорость молекулы $v_T = \sqrt{\frac{3T}{m}}$, из (1) имеем

$$K = \frac{M}{Re} \sqrt{\frac{3C_P}{C_V}}. \quad (5)$$

В задаче, о которой идёт речь ниже, мы рассматриваем пограничный слой δ , где число Рейнольдса мало $Re \ll 1$, как и число Маха $M \ll 1$. Это означает, что согласно (5) число Кнудсена может быть любым, как малым, так и большим.

Заметим также, что формула (5) может быть отнесена и к жидкостям, хотя при её строгом получении и было использовано уравнение состояния идеального газа. Это объясняется тем, что в формуле (3) присутствуют частные производные от непрерывных функций, которые не подвержены резкому изменению. Действительно, например, $\frac{\partial P}{\partial T} \approx \frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{P - P_0}{T - T_0} \sim \frac{P}{T}$, аналогично и $\frac{\partial P}{\partial V}$. В результате по порядку величины приходим к той же формуле (5).

Для ответа на сформулированную проблему мы воспользуемся методом кинетического уравнения Больцмана [13; 14].

Уравнение Навье-Стокса с бигармоническим оператором

Запишем уравнение Больцмана в виде (см. [13]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = L(f), \quad (6)$$

где $f = f(t, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ – функция распределения, $\mathbf{v}$ – скорость молекул, а $L(f)$ – интеграл столкновений.

Будем искать решение в виде ряда

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad (7)$$

где

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p) - \mathbf{pV}}{T}}, \quad (8)$$

а нормировочный множитель

$$Z = \int \bar{f} d\Gamma = \int e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} d\Gamma, \quad (9)$$

$d\Gamma = d^3 p dV$ – фазовый объём.

Функция

$$\bar{f} = f_0|_{\mathbf{V}=0},$$

$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия частицы, m – её масса.

Вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ характеризует скорость гидродинамического потока.

Запишем правую часть уравнения в приближении времен релаксации, то есть как:

$$L(f) \approx -\frac{f_0 + f_1 + f_2 + \dots}{\tau_p}, \quad (10)$$

где τ_p – время между столкновениями молекул.

Поскольку полная энергия потока жидкости имеет вид

$$E = \frac{1}{Z} \int \left[\varepsilon(p) + \frac{mV^2}{2} \right] f d\Gamma,$$

то её производная по времени будет

$$\dot{E} = \frac{1}{Z} \int \varepsilon(p) \dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma. \quad (11)$$

Диссипативная функция

$$\dot{Q} = T \dot{S}, \quad (12)$$

где S – энтропия.

Согласно [15] энтропия неравновесного классического газа может быть записана в виде

$$S = -\frac{1}{Z} \int f \ln \left(\frac{f}{e} \right) d\Gamma. \quad (13)$$

Подставляя определение (13) в (12), получаем

$$\dot{Q} = -\frac{T}{Z} \int \dot{f} \ln f d\Gamma. \quad (14)$$

Вычитая (14) из соотношения (11), находим

$$\frac{1}{Z} \int [\varepsilon(p) + T \ln f] \dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = 0. \quad (15)$$

Поэтому с учётом (10) имеем

$$\frac{1}{Z} \int [\varepsilon(p) + T \ln(f_0 + f_1 + f_2 + \dots)] \frac{(f_0 + f_1 + f_2 + \dots)}{\tau_p} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = 0. \quad (16)$$

Согласно работе [16] рекуррентную формулу для определения поправки n -ого порядка к квазиравновесной функции распределения можно представить в виде

$$f_n = (-1)^n \tau_p^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right]^n f_0. \quad (17)$$

Поскольку

$$\ln(1 + \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^k}{k}, \quad (18)$$

то с точностью до $n = 2$ в формуле (17) имеем:

$$f_1 = -\tau_p (\dot{f}_0 + \mathbf{v} \cdot \nabla f_0), \quad (19)$$

$$f_2 = \tau_p^2 (\ddot{f}_0 + 2\mathbf{v} \cdot \nabla \dot{f}_0 + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 f_0), \quad (20)$$

где точки означают частные производные по времени.

Согласно (8) имеем

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{\frac{\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T}} \approx \frac{1}{Z} e^{\frac{\varepsilon(p)}{T}} \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T} \right) = \bar{f} \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T} \right). \quad (21)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\tau_p}{T} \bar{f} \left((\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \right) \left(1 + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} \right) = \\ &= \frac{\tau_p}{T} \bar{f} \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})^2}{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично

$$\frac{f_2}{f_0} = \frac{\tau_p^2}{T} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) - v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right]. \quad (23)$$

И, значит,

$$f_2 \approx \bar{f} \frac{\tau_p^2}{T} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) - v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} - \right. \\ \left. - \left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} \right]. \quad (24)$$

Тогда уравнение (15) можно записать как

$$\frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})}{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + \right. \\ \left. + \tau_p^2 \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) - v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} \right] \right\}^2 d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = 0. \quad (25)$$

Возводя в квадрат выражение в фигурных скобках (25) и оставляя только квадратичные по импульсу слагаемые, имеем

$$\frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \frac{m \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + (\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2 + \tau_p^2 \left[(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}})^2 + 4(\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}))^2 + \left(v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2\tau_p (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \left[\left((\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right] - 4\tau_p (\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) (\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})) + 2\tau_p^2 (\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) v_i v_k \frac{\partial^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right\} d\Gamma = 0. \quad (26)$$

Усредняя это выражение по направлениям импульсов молекул, находим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \frac{mT\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3} (\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}})^2 + \frac{p^4}{15m^2} \left[(\operatorname{div} \mathbf{V})^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right] + \right. \\
& + \frac{4\tau_p^2 p^4}{15m^2} \left[(\operatorname{div} \dot{\mathbf{V}})^2 + \left(\frac{\partial \dot{V}_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial \dot{V}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{V}_k}{\partial x_i} \right] - \frac{2\tau_p p^4}{15m^2} (\dot{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} + 2\dot{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}) - \\
& - \frac{4\tau_p p^4}{15m^2} \left[\operatorname{div} \mathbf{V} \operatorname{div} \dot{\mathbf{V}} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{V}_k}{\partial x_i} \right] + \frac{2\tau_p^2 p^4}{15m^2} (\dot{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} + 2\dot{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}) + \\
& \left. + \frac{4\tau_p^2 p^6}{105m^4} \left(\Delta \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} + (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V})^2 + \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4} (\Delta \mathbf{V})^2 \right) \right\} p^2 dp d\Omega = 0,
\end{aligned}
\tag{27}$$

где $d\Omega = dx dy dz$.

После ряда преобразований, использующих теорему Гаусса, получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \mathbf{V} \cdot \left\{ \frac{mT\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3} (-\ddot{\mathbf{V}} + 2\tau_p \ddot{\mathbf{V}} + \tau_p^2 \mathbf{V}^{(4)}) - \frac{p^4}{15m^2} (\Delta \mathbf{V} + 2\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}) + \right. \\
& \left. + \frac{2\tau_p p^4}{15m^2} (\Delta \dot{\mathbf{V}} + 2\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{V}}) + \frac{2\tau_p^2 p^4}{5m^2} (\Delta \ddot{\mathbf{V}} + 2\operatorname{grad} \operatorname{div} \ddot{\mathbf{V}}) + \frac{4\tau_p^2 p^6}{35m^4} \left(\Delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{1}{4} \Delta^2 \mathbf{V} \right) \right\} \\
& p^2 dp d\Omega = 0.
\end{aligned}$$

Полагая, наконец, выражение в фигурных скобках равным нулю, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathbf{V}} + \frac{p^2 \tau_p}{3mT} (-\ddot{\mathbf{V}} + 2\tau_p \ddot{\mathbf{V}} + \tau_p^2 \mathbf{V}^{(4)}) - \frac{p^4 \tau_p}{15m^3 T} (\Delta \mathbf{V} + 2\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}) + \\
& + \frac{2\tau_p^2 p^4}{15m^3 T} (\Delta \dot{\mathbf{V}} + 2\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{V}}) + \frac{2\tau_p^3 p^4}{5m^3 T} (\Delta \ddot{\mathbf{V}} + 2\operatorname{grad} \operatorname{div} \ddot{\mathbf{V}}) + \frac{4\tau_p^3 p^6}{35m^5 T} \left(\Delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{1}{4} \Delta^2 \mathbf{V} \right) = 0,
\end{aligned}
\tag{28}$$

Где черта сверху означает усреднение по импульсам молекул.

Считая жидкость несжимаемой и полагая $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, в пренебрежении высшими производными по времени, находим

$$\dot{\mathbf{V}} = \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau_2 \Delta^2 \mathbf{V},
\tag{29}$$

где вязкость ν и время «релаксации» τ_2 определены как

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{p^2 \tau_p}{15m^3 T} = \frac{1}{15m^3 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p p^6 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp, \\
\nu^2 \tau_2 &= \frac{\tau_p^3 p^6}{35m^5 T} = \frac{1}{35m^5 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p^3 p^8 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp,
\end{aligned}
\tag{30}$$

где множитель

$$Z_0 = \int_0^{\infty} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp. \quad (31)$$

Добавив в уравнение (29) член с градиентом давления, окончательно имеем

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau_2 \Delta^2 \mathbf{V}. \quad (32)$$

Уравнение (32) является целью настоящего сообщения. При решении задачи Стокса о вычислении силы сопротивления в случае наночастиц, последнее слагаемое в уравнении (32) играет важную роль. Его учёт позволяет вычислить силу сопротивления в виде ряда по числу Кнудсена и приводит к весьма существенной поправке. Здесь надо заметить, что при вычислении силы сопротивления должен быть учтён эффект «залипания» скорости потока к границе шара, что автоматически приводит к равенству нулю её касательной и нормальной составляющих, в отличие от потенциального потока, когда равна нулю только нормальная составляющая скорости [16].

Заключение

1. Предложен алгоритм вычисления неоднородных поправок к правой части уравнения Навье – Стокса;
2. Приведено обобщённое уравнение Навье – Стокса с учетом бигармонического слагаемого.

Статья поступила в редакцию 19.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. М.: ГИТТЛ, 1933–1935.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
3. Прикладная газовая динамика / Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д., Симонов Л. А. М.: ЦАГИ, 1948. 146 с.
4. Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. Том 2. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1949. 765 с.
5. Липман Г. В., Пакет А. Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 330 с.
6. Слёзкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 520 с.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie. М.: Иностранная литература, 1963. 246 с.
9. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностранная литература, 1963. 256 с.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х частях. М.: Физматлит, 1963. 560 с.
11. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. В 2-х частях. М.: Наука, 1965–1967.
13. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. Т. 10. М.: Наука, 1979. 528 с.

14. Резибуа П., Де Лернер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980. 423 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука, 2003. 583 с.
16. Гладков С. О. К вопросу о выводе формулы Магнуса // Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки. 2022. Т. 507. № 1. С. 20–23. DOI: 10.31857/S2686740022060086.

REFERENCES

1. Prandtl L., Tjitens O. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. In 2 vols]. New York, Dover Publications, 1957.
2. Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1932. 708 p.
3. Khristianovich S. A., Galperin V. G., Millionshchikov M. D., Simonov L. A. *Prikladnaya gazovaya dinamika* [Applied gas dynamics]. Moscow, Central Aerohydrodynamic Institute Publ., 1948. 146 p.
4. Zhukovskiy N. Ye. *Sobranie sochinenii. Tom 2. Gidrodinamika* [Collected works. Volume 2. Hydrodynamics]. Moscow, GITTL Publ., 1949. 765 p.
5. Lipman G. V., Paket A. E. *Vvedenie v aerodinamiku szhimaemoi zhidkosti* [Introduction to aerodynamics of a compressible fluid] Moscow, Izdatelstvo inostrannoy literatury Publ., 1949. 330 p.
6. Slyozkin N. A. *Dinamika vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti* [Dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow, GITTL Publ., 1955. 520 p.
7. Levich V. G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physical and Chemical Hydrodynamics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 700 p.
8. Birkhoff G. *Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude*. Princeton N.J., Princeton University Press, 1960. 202 p.
9. Serrin J. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*. In: Truesdell, C. (eds) *Fluid Dynamics I / Strömungsmechanik I. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*, vol 3 / 8 / 1. Berlin, Heidelberg, Springer, 1959. pp. 125–263; https://doi.org/10.1007/978-3-642-45914-6_2.
10. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. V 2-kh chastyakh* [Theoretical Hydromechanics. In 2 parts]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963. 560 p.
11. Milne-Thomson L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. London, Macmillan, 1955. 632 p.
12. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statisticheskaya gidromekhanika. V 2-kh chastyakh* [Statistical Hydromechanics. In 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1965–1967.
13. Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. *Fizicheskaya kinetika. T. 10* [Physical Kinetics. Vol. 10]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 528 p.
14. Resibois P., De Leener M. *Classical Kinetic Theory of Fluids*. New York, Wiley, 1977. 412 p.
15. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Statistical Physics. Vol. 5*. London, Butterworth-Heinemann, 1980. 564 p.
16. Gladkov S. O. [Derivation of the Magnus Formula]. In: *Doklady Rossiiskoi Akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki* [Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, technical sciences], 2022, vol. 507, no. 1, pp. 20–23. DOI: 10.31857/S2686740022060086.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);

e-mail: sglad51@mail.ru;

Зо Аунг – аспирант кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);

e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department No. 311 “Applied software and mathematical methods”, Moscow Aviation Institute (National Research University);

e-mail: sglad51@mail.ru;

Zaw Aung – Postgraduate Student, Department No. 311 “Applied software and mathematical methods”, Moscow Aviation Institute (National Research University);

e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О., Зо Аунг. О кинетическом подходе при учёте неоднородностей высших порядков в уравнении Навье – Стокса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2023. № 1. С. 17–26.

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-1-17-26

FOR CITATION

Gladkov S. O., Zaw Aung. Kinetic approach taking into account the heterogeneities of higher orders in the Navier – Stokes equation. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 1, pp. 17–26..

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-1-17-26