

УДК 534. 213.4

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-45-55

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УЛЬТРАЗВУКА В ПОРАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ, ЗАПОЛНЕННЫХ ГАЗОМ НИЗКОЙ ПЛОТНОСТИ

Козлов В. Ф.

*Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
140187, Московская обл., г. Жуковский, ул. Гагарина, д. 16, Российская Федерация*

Аннотация

Целью работы является построение эффективного в практическом применении решения задачи о распространении ультразвуковых волн в порах прямоугольного сечения, заполненных разреженным газом.

Процедура и методы. Решение нестационарных двумерных уравнений газовой динамики в приближении ползущих течений строится в виде бесконечных рядов по собственным функциям, в которых нулевые члены разложений – заранее определённые функции. Число Кнудсена, определяемое как отношение длины свободного пробега в газе к характерному поперечному размеру поры, предполагается меньше либо порядка 1. Поэтому на внутренних поверхностях пор используются граничные условия, учитывающие эффекты скольжения и скачок температуры.

Результаты. Представлено модифицированное решение задачи о распространении ультразвуковых волн в порах прямоугольного сечения, заполненных разреженным газом. В отличие от ранее опубликованных результатов решение представлено быстро сходящимися рядами по собственным функциям. Проверка численными методами показала, что достаточно взять два члена разложений, чтобы обеспечить относительную точность расчётов, не превышающую 1%. Получены приближенные соотношения для собственных значений и коэффициентов двухчленных разложений, удобные для компьютерных вычислений. Также получено несколько математических результатов общего характера.

Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты работы могут быть использованы для инженерных оценок акустических характеристик пористых материалов, эксплуатируемых при низких давлениях, а так же представляют основу для дальнейших теоретических исследований акустических свойств пористых материалов.

Ключевые слова: пора, длина свободного пробега, течение со скольжением, монохроматическая волна, частота, собственная функция, собственное значение, динамическая плотность, динамическая сжимаемость, характеристический импеданс

EFFECTIVE SOLUTION FOR ULTRASOUND PROPAGATION IN RECTANGULAR PORES FILLED WITH A RAREFIED GAS

V. Kozlov

Moscow Institute of Physics and Technology

ul. Gagarina 16, Zhukovsky 140187, Moscow Region, Russian Federation

Abstract

Aim. The aim of the paper is to construct an effective solution in practical application to the problem of ultrasonic wave propagation in rectangular-section pores filled with a rarefied gas.

Methodology. The solution to unsteady two-dimensional gas dynamics equations in the creeping flow approach is constructed in the form of infinite series of eigenfunctions, in which zero terms of expansions are predefined functions. The Knudsen number, defined as the ratio of the free path length in a gas to the characteristic transverse pore size, is assumed to be less than or on the order of unity. Therefore, boundary conditions taking into account the effects of sliding and temperature jump on the inner surfaces of the pores are used.

Results. A modified solution to the problem of ultrasonic wave propagation in rectangular-section pores filled with a rarefied gas is presented. In contrast to the previously published results, the solution is represented by rapidly converging series of eigenfunctions. Verification by numerical methods shows that only two terms of expansions are needed to ensure a relative accuracy of calculations not exceeding 1%. Approximate relations for eigenvalues and coefficients of two-term expansions convenient for computer calculations are obtained. Several general mathematical results are also presented.

Research implications. The results of the work can be used for engineering assessments of the acoustic characteristics of porous materials operated at low pressures, as well as provide a basis for further theoretical studies of the acoustic properties of porous materials.

Keywords: pore, mean free pass, slip-flow, monochromatic wave, frequency, eigenfunction, eigenvalue, dynamic density, dynamic compressibility, characteristic impedance

Введение

Задачам экспериментального и теоретического определения акустических свойств пористых материалов и сред в связи с их огромным практическим значением в современной акустике уделяется большое внимание (см., например, обзор [1]). На рубеже XX–XXI веков сначала теоретическим путём [2; 3], а затем и экспериментальными методами [4, p. 481] было показано, что пористое покрытие определённой микроструктуры может существенно увеличить протяжённость ламинарного обтекания аэродинамических поверхностей в высокоскоростных потоках воздуха. По условиям практического применения такие покрытия должны оставаться работоспособными при низких давлениях в окружающей среде, когда характерные поперечные размеры пор должны хотя бы в пределах одного порядка превышать длину свободного пробега молекул газовой фазы. Последнее означает, что в соответствующих теоретических моделях должны учитываться корпускулярные свойства газа, заполняющего поры. Реше-

ния о распространении ультразвуковых волн в порах простых геометрий, учитывающие это требование, были построены в работе [5]. В них, в частности, обобщались результаты работ [6; 7; 8], полученные ранее в приближении сплошной среды.

Для указанных выше условий газ может рассматриваться как сплошная среда за исключением тонких слоёв Кнудсена на твёрдых поверхностях. Число Кнудсена для таких режимов мало, но конечно. Для пор треугольного и прямоугольного сечений решения в [5, р. 3402] были представлены рядами по собственным функциям. Однако на практике было обнаружено, что в случае пор прямоугольного сечения такие ряды сходятся очень медленно. Чтобы достичь требуемой точности, необходимо численно решать системы, состоящие из сотен линейных алгебраических и трансцендентных уравнений. В данной статье предложена новая форма решения задачи. В ней решение представлено бесконечными, но быстро сходящимися рядами и требует существенно меньших компьютерных ресурсов. Кроме того, получены приближенные аналитические выражения для наиболее важных собственных значений и коэффициентов разложений, что при практическом использовании требует минимальных усилий.

Статья состоит из введения, четырёх разделов и заключения. В первом разделе кратко изложена постановка задачи, во втором – описывается способ представления решения быстро сходящимися рядами. В третьем разделе показано, как использовать такие ряды для расчёта акустических характеристик пор прямоугольного сечения. В четвертом приведены результаты численного тестирования приближенных соотношений. В заключении представлено краткое резюме результатов работы.

1. Постановка задачи и предыдущее решение

В указанной выше работе [5] была рассмотрена следующая задача. Монохроматическая акустическая волна круговой частоты ω распространяется внутри бесконечной однородной поры, заполненной газом низкой плотности. Число Кнудсена, определяемое как отношение длины свободного пробега молекул газа λ к характерному поперечному размеру поры L_p ($\text{Kn} = \lambda/L_p$), предполагается малым, но конечным. Длина свободного пробега при этом определяется с помощью известного в кинетической теории разреженного газа приближенного соотношения для модели твёрдых шаров $\lambda = 2\eta(\rho_0 c)$, где η – динамическая вязкость, $\bar{c} = \sqrt{8R_g T_0/\pi}$ – средняя молекулярная скорость, R_g – удельная газовая постоянная, ρ_0 и T_0 – плотность и равновесная температура газа, соответственно.

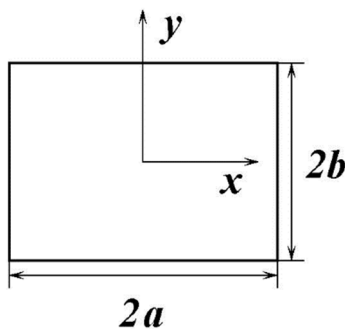


Рис. 1 / Fig. 1. Геометрия поперечного сечения поры: a – полуширина, b – полувысота прямоугольника / Geometry of the pore cross section: (a) half-width and (b) half-height of the rectangle.

Источник: подготовлено автором

Для поры прямоугольного поперечного сечения (рис. 1) точное решение [5] можно представить для удобства в несимметричной по переменным x и y форме как:

$$\tilde{u}(x, y, z) = 2 \frac{\Lambda^2}{i\omega\rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dz} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Psi_m(x, y, B_u, \Lambda), \quad (1a)$$

$$\tilde{T}(x, y, z) = -2 \frac{\tilde{\Lambda}^2 \tilde{p}}{\rho_0 C_p} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \tilde{\Psi}_m(x, y, B_E, \tilde{\Lambda}), \quad (1b)$$

где $\tilde{u}(x, y, z)$ и $\tilde{T}(x, y, z)$ – комплексные амплитуды колебательной скорости и пульсаций температуры в выражениях $u(x, y, z, t) = \tilde{u}(x, y, z) \exp(i\omega t)$ и

$$T'(x, y, z, t) = \tilde{T}(x, y, z) \exp(i\omega t); \quad \Psi_m(x, y, B_u, \Lambda) = \frac{(-1)^m}{\gamma_m \beta_m^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(\beta_m x)}{Q_m \text{ch}(\beta_m/q)} \right) \cos(\gamma_m y)$$

$$\text{и } \tilde{\Psi}_m(x, y, B_E, \tilde{\Lambda}) = \frac{(-1)^m}{\tilde{\gamma}_m \tilde{\beta}_m^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(\tilde{\beta}_m x)}{\tilde{Q}_m \text{ch}(\tilde{\beta}_m/q)} \right) \cos(\tilde{\gamma}_m y) - \text{собственные функции.}$$

В выражениях для собственных функций использованы следующие обозначения безразмерных параметров: $q = b/a$, $\beta_m = \sqrt{\gamma_m^2 - \Lambda^2}$, $\tilde{\beta}_m = \sqrt{\tilde{\gamma}_m^2 - \tilde{\Lambda}^2}$, $\Lambda = \sqrt{-i\omega\rho_0 b^2/\eta}$, $\tilde{\Lambda} = \sqrt{\text{Pr} \Lambda}$, $Q_m = 1 + B_u \beta_m \text{th}(\beta_m/q)$, $\tilde{Q}_m = 1 + B_E \tilde{\beta}_m \text{th}(\tilde{\beta}_m/q)$, где Pr – число Прандтля ($\text{Pr} = \eta C_p / \kappa$), C_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, κ – коэффициент теплопроводности.

Неизвестные константы интегрирования a_m и $\tilde{a}_m$ в (1) удовлетворяют двум не связанным друг с другом бесконечным системам алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(-1)^m \cos \gamma_m}{\gamma_m (\alpha_n^2 - \gamma_m^2)} = \frac{1}{2\alpha_n^2} \quad \text{and} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \frac{(-1)^m \cos \tilde{\gamma}_m}{\tilde{\gamma}_m (\alpha_n^2 - \tilde{\gamma}_m^2)} = \frac{1}{2\alpha_n^2} \quad (\alpha_n = (n+0.5)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

следующим из условий [5]

$$2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_m \gamma_m^{-1} \cos(\gamma_m y) = 1; \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tilde{a}_m \tilde{\gamma}_m^{-1} \cos(\tilde{\gamma}_m y) = 1. \quad (4)$$

В отличие от исходной работы [5] координаты x и y в (1) – (2) отнесены к полувысоте поперечного сечения поры b . По этой причине введено несколько новых обозначений. Обезразмеривание продольной координаты z , а также амплитуд $\tilde{p}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{T}$ в силу линейности исходных уравнений газодинамики в приближении ползущего течения не требуется. Полуширина поперечного сечения поры a (см. рис. 1) предполагается больше его полувысоты b , что, очевидно, не ограничивает общности полученных результатов. Собственные значения γ_m и $\tilde{\gamma}_m$, где $m\pi < (\gamma_m, \tilde{\gamma}_m) < (m+0.5)\pi$, $m=0,1,2,\dots$, – это корни трансцендентных уравнений:

$$\cos \gamma_m = B_u \gamma_m \sin \gamma_m; \quad \cos \tilde{\gamma}_m = B_E \tilde{\gamma}_m \sin \tilde{\gamma}_m, \quad (5)$$

являющихся следствием граничных условий (7) при $y = \pm 1$. Функции (1) удовлетворяют системе из двух, не связанных между собой двумерных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} + \Lambda^2 \tilde{u} = \Lambda^2 G, \\ \Delta \tilde{T} + \tilde{\Lambda}^2 \tilde{T} = \tilde{\Lambda}^2 \tilde{G} \end{cases} \quad (6)$$

и граничным условиям на стенках поры:

$$\tilde{u}_w = B_u \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial N} \right)_w, \quad \tilde{T}_w = B_E \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial N} \right)_w, \quad (7)$$

где $G = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dz}$, $\tilde{G} = \frac{1}{\rho_0 C_p} \tilde{p}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – лапласиан, $\partial/\partial N$ – производ-

ная вдоль внутренней единичной нормали к стенке поры, индексом “ w ” обозначены значения параметров на поверхностях поры. Безразмерные множители B_u и B_E введены для краткости и выражаются через коэффициенты аккомодации тангенциального импульса α_u и энергии α_E как:

$$B_u = (2\alpha_u^{-1} - 1) \text{Kn}, \quad B_E = (2\gamma/(\gamma+1) \text{Pr})(2\alpha_E^{-1} - 1) \text{Kn}, \quad (8)$$

где γ – показатель адиабаты. Подробности постановки задачи можно найти в [5].

II. Новая форма точного решения

При практическом использовании было обнаружено, что ряды типа (1) сходятся очень медленно. Чтобы достичь требуемой точности, необходимо численно решать системы из нескольких сотен линейных и трансцендентных уравнений. Что ведёт к неоправданно высоким затратам ресурсов ЭВМ. В данной работе предложена новая форма решения сформулированной задачи (6) – (8), позволяющая избежать указанных затруднений. Оно состоит из двух частей:

$$\tilde{u}(x, y, z) = \tilde{u}_0(x, y, z) + \tilde{u}_1(x, y, z), \quad (9)$$

$$\tilde{T}(x, y, z) = \tilde{T}_0(x, y, z) + \tilde{T}_1(x, y, z), \quad (10)$$

где $\tilde{u}_0(x, y, z)$ и $\tilde{T}_0(x, y, z)$ – удовлетворяющие граничным условиям (7) заранее определённые функции:

$$\tilde{u}_0(x, y, z) = G \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\beta_0 x)}{Q_0 \operatorname{ch}(\beta_0/q)} \right) \left(1 - \frac{\cos(\Lambda y)}{Q_\infty \cos \Lambda} \right), \quad (11)$$

$$\tilde{T}_0(x, y, z) = \tilde{G} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_0 x)}{\tilde{Q}_0 \operatorname{ch}(\tilde{\beta}_0/q)} \right) \left(1 - \frac{\cos(\tilde{\Lambda} y)}{\tilde{Q}_\infty \cos \tilde{\Lambda}} \right), \quad (12)$$

где $Q_\infty = 1 - B_u \Lambda \operatorname{tg} \Lambda$, $\tilde{Q}_\infty = 1 - B_E \tilde{\Lambda} \operatorname{tg} \tilde{\Lambda}$. Другие параметры определены выше.

Поскольку уравнения системы (6) и соответствующие граничные условия (7) независимы и отличаются друг от друга лишь обозначениями, то целесообразно рассмотреть, например, только решение для амплитуды колебательной скорости. Решение для амплитуды пульсаций температуры $\tilde{T}(x, y, z)$ может быть получено из результатов для $\tilde{u}(x, y, z)$ простой заменой соответствующих параметров на помеченные тильдой.

Подстановка выражений (9) и (11) в первое соотношение системы (6) приводит к двумерному неоднородному уравнению для неизвестной функции $\tilde{u}_1(x, y, z)$:

$$\Delta \tilde{u}_1 + \Lambda^2 \tilde{u}_1 = G \left\{ \Lambda^2 + \beta_0^2 \left(1 - \frac{\cos \Lambda y}{Q_\infty \cos \Lambda} \right) \right\} \frac{\operatorname{ch} \beta_0 x}{Q_0 \operatorname{ch}(\beta_0/q)}. \quad (13)$$

Прямая подстановка показывает, что ряд

$$\tilde{u}_1(x, y, z) = 2\Lambda^2 G \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{(-1)^m}{\gamma_m \beta_m^2} \left(\frac{\operatorname{ch}(\beta_m x)}{Q_m \operatorname{ch}(\beta_m/q)} - \frac{\operatorname{ch}(\beta_0 x)}{Q_0 \operatorname{ch}(\beta_0/q)} \right) \cos(\gamma_m y) \quad (14)$$

удовлетворяет (13) и граничным условиям (7), если

$$\frac{\cos(\Lambda y)}{Q_\infty \cos \Lambda} - 1 = 2\Lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(-1)^m}{\gamma_m \beta_m^2} \cos(\gamma_m y), \quad (15)$$

где константы интегрирования a_m и другие параметры точно такие же, как и в решении (1). С другой стороны, если разложения (15) верны, то выражения (9), (11) и (14) (так же как (10) и (12)) совпадают с решением (1).

Справедливость соотношений (16) и (17) была проверена численно. В пределе $\Lambda \rightarrow 0$ и $B_u \rightarrow 0$ функция (9), объединённая с разложением (14), представляет точное решение (в наших обозначениях) задачи о стационарном ламинарном течении в приближении сплошной среды. Соответствующие результаты можно найти, например, в монографии [9, р. 55].

III. Акустические свойства прямоугольной поры в приближении течения со скольжением

Как известно, акустические свойства длинного однородного канала полностью определяются динамической плотностью $\tilde{\rho}(B_u, \Lambda)$ и динамической сжимаемостью $\tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda})$. В этих переменных комплексная константа распространения равна $k(B_u, B_E, \gamma, \operatorname{Pr}, \Lambda) = i\omega \sqrt{\tilde{\rho}(B_u, \Lambda) \tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda})}$, а характеристический импеданс $-Z_c(B_u, B_E, \gamma, \operatorname{Pr}, \Lambda) = \sqrt{\tilde{\rho}(B_u, \Lambda) / \tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda})}$, где зависимость от времени

всюду определяется множителем $\exp(i\omega t)$. В случае однородных пор, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной волны, динамическая плотность и динамическая сжимаемость связаны с осреднёнными по площади поперечного сечения поры амплитудами колебательной скорости и пульсаций температуры как:

$$\tilde{\rho}(B_u, \Lambda) = -\frac{1}{i\omega \langle \tilde{u}(z) \rangle} \frac{d\tilde{p}}{dz}, \quad (16)$$

$$\tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda}) = \rho_0^{-1} (\langle \tilde{p} \rangle / \tilde{p}) = \frac{1}{p_0} - \frac{\langle \tilde{T} \rangle}{T_0 \tilde{p}} = \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{\rho_0 R \langle \tilde{T} \rangle}{\tilde{p}} \right), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}(z) \rangle = & -\frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dz} \left\{ \left(1 - \frac{q \operatorname{th}(\beta_0/q)}{\beta_0 Q_0} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{\Lambda Q_\infty} \right) + \right. \\ & \left. + 2q\Lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\gamma_m^2 \beta_m^2} \left(\frac{\operatorname{th}(\beta_m/q)}{\beta_m Q_m} - \frac{\operatorname{th}(\beta_0/q)}{\beta_0 Q_0} \right) \sin(\gamma_m - m\pi) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}(z) \rangle = & \frac{\tilde{p}}{\rho_0 C_p} \left\{ \left(1 - \frac{q \operatorname{th}(\tilde{\beta}_0/q)}{\tilde{\beta}_0 \tilde{Q}_0} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \tilde{\Lambda}}{\tilde{\Lambda} \tilde{Q}_\infty} \right) + \right. \\ & \left. + 2q\tilde{\Lambda}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_m}{\tilde{\gamma}_m^2 \tilde{\beta}_m^2} \left(\frac{\operatorname{th}(\tilde{\beta}_m/q)}{\tilde{\beta}_m \tilde{Q}_m} - \frac{\operatorname{th}(\tilde{\beta}_0/q)}{\tilde{\beta}_0 \tilde{Q}_0} \right) \sin(\tilde{\gamma}_m - m\pi) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

IV. Численные результаты и приближенные формулы

С целью проверки эффективности новой формы решения был выполнен численный расчёт динамической плотности $\tilde{\rho}(B_u, \Lambda)$ и динамической сжимаемости $\tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda})$ с использованием как соотношений (16) – (19), так и соответствующих результатов работы [5]. Обе теоретические модели дали одинаковые результаты. Было также обнаружено, что ряды (18) – (19) сходятся очень быстро. При этом учёт только нулевых членов в разложениях (18) – (19) обеспечивает относительную точность менее 3%. Учёт первых членов под знаком суммы в (18) – (19), т. е. аппроксимация средних амплитуд выражениями:

$$\langle \tilde{u}(z) \rangle \approx -\frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dz} \left\{ \left(1 - \frac{q \operatorname{th}(\beta_0/q)}{\beta_0 Q_0} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{\Lambda Q_\infty} \right) + \right.$$

$$+2q\Lambda^2 \frac{a_1}{\gamma_1^2 \beta_1^2} \left(\frac{\text{th}(\beta_1/q)}{\beta_1 Q_1} - \frac{\text{th}(\beta_0/q)}{\beta_0 Q_0} \right) \sin(\gamma_1 - \pi) \Bigg\}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}(z) \rangle \approx & \frac{\tilde{p}}{\rho_0 C_p} \left\{ \left(1 - \frac{q \text{th}(\tilde{\beta}_0/q)}{\tilde{\beta}_0 \tilde{Q}_0} \right) \left(1 - \frac{\text{tg} \tilde{\Lambda}}{\tilde{\Lambda} \tilde{Q}_\infty} \right) + \right. \\ & \left. + 2q\tilde{\Lambda}^2 \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\beta}_1^2} \left(\frac{\text{th}(\tilde{\beta}_1/q)}{\tilde{\beta}_1 \tilde{Q}_1} - \frac{\text{th}(\tilde{\beta}_0/q)}{\tilde{\beta}_0 \tilde{Q}_0} \right) \sin(\tilde{\gamma}_1 - \pi) \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

обеспечивает относительную погрешность расчётов, не превышающую 1%.

Для практического использования может оказаться полезным приближенное аналитическое решение трансцендентных уравнений (5):

$$\gamma_m \approx \delta_m + \frac{(1+Z_m^2)\tau_m}{1+B_u+Z_m^2} \left\{ 1 + \frac{B_u^2 Z_m \tau_m}{(1+B_u+Z_m^2)^2} + \dots \right\}, \quad (22)$$

где $\delta_m = (m+0.25)\pi$, $Z_m = B_u \delta_m$, $\tau_m = \pi/4 - \tan^{-1}(Z_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Путём численных расчётов было также установлено, что приближенное соотношение

$$\gamma_0 \approx X_0 \left\{ 1 + \frac{1}{24} \cdot \frac{1+4B_u}{1+2B_u} X_0^2 + \left[\frac{7}{1152} \cdot \left(\frac{1+4B_u}{1+2B_u} \right)^2 - \frac{1}{720} \cdot \frac{1+6B_u}{1+2B_u} \right] X_0^4 \right\}, \quad (23)$$

где $X_0 = (0.5+B_u)^{-1/2}$, обеспечивает лучшую аппроксимацию при $m=0$ и $B_u \geq 2$, чем формула (22).

Коэффициент a_1 в (20) можно вычислить с помощью приближенной формулы:

$$a_1 \approx 2(\gamma_1/\pi - 1)/(1+Y_1), \quad (24)$$

$$\text{где } Y_1 \approx 0.17927 \left\{ \frac{4}{\pi} \text{ctg} \left(\frac{1-X_1}{1+X_1} \right) - 1 \right\}, \quad X_1 \approx B_u \gamma_1 \left\{ 1.2 + 0.65 \exp \left[3 \left(\frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma_1 - \pi} \right) \right] \right\}.$$

Приближенные формулы для $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{a}_1$ в (21) получаются из (22) – (24) формальными заменами: $B_u \rightarrow B_E$, $\gamma_0 \rightarrow \tilde{\gamma}_0$, $\gamma_1 \rightarrow \tilde{\gamma}_1$.

Заключение

Построен новый вариант решения, описывающего распространение ультразвуковых волн в длинных порах прямоугольного сечения, заполненных газами низкой плотности, и учитывающего эффекты скольжения и скачка температуры. Оно так же, как и решение из работы [5], представлено в виде разложений в ряды по собственным функциям. Однако эти ряды в отличие от рядов из [5] сходятся очень быстро. Проверка численными методами показала, что достаточно взять по два первых члена разложений, чтобы обеспечить относительную точность аппроксимации, не превышающую 1%. Получены приближенные выражения для

собственных значений и коэффициентов 2-членных разложений. Кроме того, получено несколько математических результатов общего характера.

Результаты работы могут быть использованы для инженерных оценок акустических характеристик пористых материалов, эксплуатируемых при низких давлениях (см., например, [10]), а так же представляют основу для дальнейших теоретических исследований акустических свойств пористых материалов.

Статья поступила в редакцию 01.11.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horoshenkov K. V. A Review of Acoustical Methods for Porous Material Characterization // *International Journal of Acoustics and Vibration*. 2017. Vol. 22. No. 1. P. 92–103. DOI: 10.20855/ijav.2017.22.1455.
2. Problems in High Speed Flow Prediction Relevant to Control / Malmuth N. D., Fedorov A., Shalaev V., Cole J., Hites M., Williams D., Khokhlov A. // 2nd AIAA, Theoretical Fluid Mechanics Meeting (15 June 1998 – 18 June 1998, Albuquerque, NM, U.S.A.). Paper AIAA 98-2695. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1998-2695> (дата обращения: 23.04.2022).
3. Stabilization of Hypersonic Boundary Layers by Porous Coating / Fedorov A., Malmuth N., Rasheed A., Hornung H. G. // *AIAA Journal*. 2001. Vol. 39. Iss. 4. P. 605–610. DOI: 10.2514/2.1382.
4. Experiments on Passive Hypervelocity Boundary-Layer Control Using an Ultrasonically Absorptive Surface / Rasheed A., Hornung H. G., Fedorov A. V., Malmuth N. D. // *AIAA Journal*. 2002. Vol. 40. Iss. 3. P. 481–489.
5. Kozlov V. F., Fedorov A. V., Malmuth N. D. Acoustic properties of rarefied gases inside pores of simple geometries // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2005. Vol. 117. Iss. 6. P. 3402–3412. DOI: 10.1121/1.1893428.
6. Stinson M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1991. Vol. 89. Iss. 2. P. 550–558. DOI: 10.1121/1.400379.
7. Stinson M. R., Champoux Y. Assignment of shape factors for porous materials having simple pore geometries // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1990. Vol. 88. Iss. S. 1. Session 6PA: Physical Acoustics: Acoustics of Fluid-Filled Porous Materials I. P. S121. DOI: 10.1121/1.2028553.
8. Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes / Roh H.-S., Arnott W. P., Sabatier J. M., Raspet R. // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1991. Vol. 89. Iss. 6. P. 2617–2624. DOI: 10.1121/1.400700.
9. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965. 553 p.
10. Stability of Hypersonic Boundary Layer on Porous Wall with Regular Microstruture / Fedorov A., Kozlov V., Shiplyuk A., Maslov A., Malmuth N. // *AIAA Journal*. 2006. Vol. 44. No. 8. P. 1866–1871. DOI: 10.2514/1.21013.

REFERENCES

1. Horoshenkov K. V. A Review of Acoustical Methods for Porous Material Characterization. In: *International Journal of Acoustics and Vibration*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 92–103. DOI: 10.20855/ijav.2017.22.1455.

2. Malmuth N. D., Fedorov A., Shalaev V., Cole J., Hites M., Williams D., Khokhlov A. Problems in High Speed Flow Prediction Relevant to Control. In: *2nd AIAA, Theoretical Fluid Mechanics Meeting (15 June 1998 – 18 June 1998, Albuquerque, NM, U.S.A.)*. Paper AIAA 98-2695. Available at: <https://doi.org/10.2514/6.1998-2695> (accessed: 23.04.2022).
3. Fedorov A., Malmuth N., Rasheed A., Hornung H. G. Stabilization of Hypersonic Boundary Layers by Porous Coating. In: *AIAA Journal*, 2001, vol. 39, iss. 4, pp. 605–610. DOI: 10.2514/2.1382.
4. Rasheed A., Hornung H. G., Fedorov A. V., Malmuth N. D. Experiments on Passive Hypervelocity Boundary-Layer Control Using an Ultrasonically Absorptive Surface. In: *AIAA Journal*, 2002, vol. 40, iss. 3, pp. 481–489.
5. Kozlov V. F., Fedorov A. V., Malmuth N. D. Acoustic properties of rarefied gases inside pores of simple geometries. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, vol. 117, iss. 6, pp. 3402–3412. DOI: 10.1121/1.1893428.
6. Stinson M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, vol. 89, iss. 2, pp. 550–558. DOI: 10.1121/1.400379.
7. Stinson M. R., Champoux Y. Assignment of shape factors for porous materials having simple pore geometries. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, vol. 88, iss. S. 1. Session 6PA: Physical Acoustics: Acoustics of Fluid-Filled Porous Materials I, pp. S121. DOI: 10.1121/1.2028553.
8. Roh H.-S., Arnott W. P., Sabatier J. M., Raspet R. Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, vol. 89, iss. 6, pp. 2617–2624. DOI: 10.1121/1.400700.
9. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965. 553 p.
10. Fedorov A., Kozlov V., Shiplyuk A., Maslov A., Malmuth N. Stability of Hypersonic Boundary Layer on Porous Wall with Regular Microstruture. In: *AIAA Journal*, 2006, vol. 44, no. 8, pp. 1866–1871. DOI: 10.2514/1.21013.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Козлов Виталий Федорович – кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой общей физики Института аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (национального исследовательского университета), Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации;

e-mail: vfkozlov@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vitaly F. Kozlov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Deputy of Departmental Head, Department of General Physics, Institute of Aeromechanics and Flight Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology; Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation;

e-mail: vfkozlov@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Козлов В. Ф. Эффективное решение задачи о распространении ультразвука в порах прямоугольного сечения, заполненных газом низкой плотности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 45–55. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-45-55.

FOR CITATION

Kozlov V. F. Effective solution for ultrasound propagation in rectangular pores filled with a rarefied gas. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 45–55.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-45-55.