

УДК 533.6.011.8

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-17-34

## СТЕПЕННЫЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

**Горелов С. Л., Нгуен В. Л.**

*Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)  
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9,  
Российская Федерация*

### **Аннотация**

**Цель.** Для тела вращения со степенной образующей и сферическим, параболическим и гиперболическим затуплениями вычисляется сила сопротивления в газовом потоке.

**Процедуры и методы.** Определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в критической точке в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

**Результаты.** Для тела вращения со степенной образующей и сферическим, параболическим и гиперболическим затуплениями вычисляется сила сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей течения газа.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты, полученные в данной работе, имеют большое значение для оптимизации геометрии летательных аппаратов.

**Ключевые слова:** высокоскоростной поток, локальные модели, аэродинамическое сопротивление тела вращения, вариационная задача

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790

## POWER BODIES OF MINIMUM RESISTANCE IN A GAS FLOW

**S. Gorelov, V. L. Nguyen**

*Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi 141701, Moscow Region, Russian Federation*

### **Abstract**

**Aim.** For a blunt body of revolution with a power generatrix and spherical, parabolic, and hyperbolic bluntnesses, we calculate the drag force in a gas flow.

**Methodology.** We determine the degree of minimum resistance and the bluntness radius in the generatrix of the body as functions of the elongation in a wide range of Reynolds numbers.

**Results.** For a blunt body of revolution with a power generatrix and spherical, parabolic, and hyperbolic bluntnesses, the drag force in a high-speed rarefied gas flow is calculated based on several local gas flow models.

**Research implications.** The results obtained in this work are of great importance for optimizing the aircraft geometry.

**Keywords:** high-speed flow, local models, aerodynamic drag of a body of revolution, variational problem

**Acknowledgments.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 20-08-00790).

## Введение

Задача построения геометрии тела – необходимая и существенная проблема в развитии аэрокосмической науки и техники, а также авиационной техники. В процессе движения с высокой скоростью в газе тело всегда находится под воздействием аэродинамических сил, которые определяются из локальных моделей, главное предположение этих моделей состоит в том, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения.

Классическая задача построения тела вращения минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [1–6]. Были разработаны эффективные численные методы решения таких задач [7]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [8]. Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием целевых функций разного вида, зависящих от некоторого количества параметров, по которым и производится оптимизация [9; 10]. В частности, широкое распространение получила степенная целевая функция [11; 12].

В работе используется целевая степенная функция вместе с локальными методами (формулы свободномолекулярной аэродинамики, формула гиперзвуковой аэродинамики Ньютона), что позволило свести вариационную задачу минимизации функционала (сопротивление тела вращения) к задаче поиска экстремума функции от одной, двух или трёх переменных. Решаются задачи об определении формы тел вращения с затуплением в гиперзвуковом потоке в случае газа Ньютона и свободномолекулярной модели.

## 1. Локальный метод

Для вычисления аэродинамических сил, действующих на тело, движущегося в газе, необходимо знать поток импульса  $\mathbf{p}$  на поверхности тела. Существующие результаты аэродинамики разреженных газов показывают, что для не очень сложных тел при больших скоростях обтекания функция  $\mathbf{p}$  определяется, главным образом, локальными свойствами поверхности в данной точке [13]. В сильно разреженном газе на выпуклых телах это предположение оправдывается полностью (даже для малых скоростей), в континуальном режиме в его пользу говорит успех эмпирических обобщений формулы Ньютона.

Наибольшее распространение получила локальная модель из [14], в которой коэффициенты давления и трения равны (отнесённые к скоростному напору  $\rho_\infty V_\infty^2 / 2$ )

$$p = p_0 \cos^2 \theta + p_1 \cos \theta, \quad \tau = \tau_0 \cos \theta \sin \theta \quad (1)$$

Функции  $p_0, p_1, \tau_0$  зависят от числа  $Re_0$ , температурного фактора  $t_w$  и показателя степени адиабаты  $\gamma$ ,  $\theta$  – угол между внутренней нормалью к поверхности и направлением скорости газа (см. рис. 1).

Отличительной особенностью данной модели (кроме простоты) является то, что в предельных случаях она соответствует, либо свободномолекулярной модели, либо модели Ньютона.

Так, для свободномолекулярной модели ( $Re_0 \rightarrow 0$ ) [15]:

$$p_0 = \tau_0 = 2, \quad p_1 = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma} \quad (2)$$

В случае модели Ньютона ( $Re_0 \rightarrow \infty$ ) [1]:

$$p_0 = 2, \quad p_1 = \tau_0 = 0 \quad (3)$$

Рассмотрим два случая применения локальных методов: формула Ньютона и свободномолекулярная модель.

## 2. Формула Ньютона

### 2.1. Степенные тела вращения

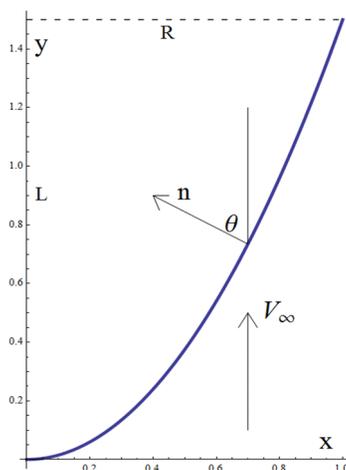


Рис. 1 / Fig. 1. Схема обтекания тела вращения /  
Scheme of flow around a body of revolution

Источник: составлено авторами.

Задано тело вращения длиной  $L$  и радиусом основания  $R$ . Требуется определить форму образующей  $y(x)$  такую, при которой это тело имеет минимальное

сопротивление в гиперзвуковом потоке газа. Причём давление на элемент поверхности определяется формулой Ньютона.

Коэффициент сопротивления  $C_x$  (аэродинамическая сила, действующая на тело вдоль вектора скорости, отнесённая к скоростному напору и характерной площади, в данном случае – это площадь основания, то есть  $\pi R^2$ ) будет равен:

$$c_x = \frac{2}{R^2} \int_0^R (c_p \cdot \cos \theta + c_\tau \cdot \sin \theta) x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (4)$$

Здесь  $C_p$  и  $c_\tau$  нормальная и касательная аэродинамические силы, действующие на элемент поверхности  $ds$ ,  $\cos \theta = \left(1 + (dy/dx)^2\right)^{-1/2}$  (5)

Для формула Ньютона:

$$c_p = 2 \cos^2 \theta, \quad c_\tau = 0 \quad (6)$$

Тогда выражение (4) запишется (линейные размеры отнесены к  $R$ )

$$c_x = 4 \int_0^1 \frac{x}{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (7)$$

в случае, если образующая тела вращения – степенная функция:  $y = Lz^\beta$ ,  $z = x/R$ ,  $\lambda = L/R$ , уравнение коэффициента сопротивления (7) запишется в виде гипергеометрической функции  $F[a, b, c, d]$

$$c_x = 4 \int_0^1 \frac{z}{1 + (\lambda \beta z^{\beta-1})^2} dz = 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2 \lambda^2\right) \quad (8)$$

В этом случае задачу можно сформулировать так: найти величину  $\beta$  такую, чтобы коэффициент сопротивления был минимален при заданной величине  $\lambda$ .

В табл. 1 представлены величины  $\beta$  и  $c_x$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ . Заметим, что во многих работах ось вращения – это ось  $Ox$ . В этом случае величина показателя степени в степенной функции  $\alpha = \beta^{-1}$ . В табл. 1 также представлена величина  $\alpha$ .

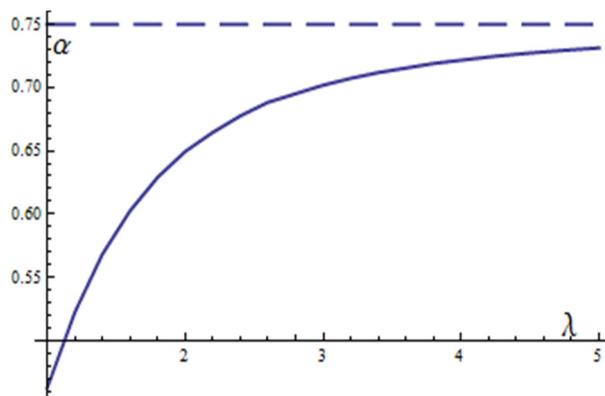
На рис. 2. показана зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от удлинения  $\lambda$ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к  $\alpha = 3/4 = 0.75$ , соответственно [4].

Таблица 1 / Table 1

Величины  $\beta$  и  $C_x$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /  
Values of  $\beta$  and  $C_x$  as functions of elongation  $\lambda$

$\lambda$	$\beta$	$\alpha$	$C_x$
2	1.54	0.6493	0.3305
4	1.386	0.7215	0.0986
6	1.357	0.7369	0.0455
8	1.347	0.7424	0.0259
10	1.342	0.7451	0.0167

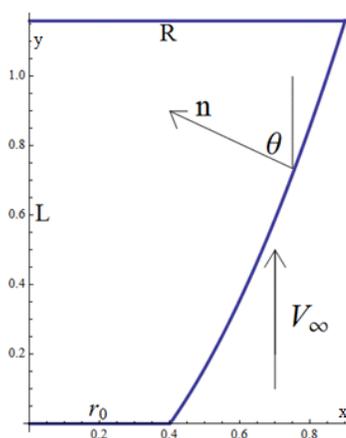
Источник: составлено авторами.



**Рис. 2 / Fig. 2.** Зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от величины удлинения  $\lambda$  /  
Dependence of  $\alpha = \beta^{-1}$  on the magnitude of elongation  $\lambda$

Источник: составлено авторами.

## 2.2. Степенные тела вращения с плоским затуплением



**Рис. 3 / Fig. 3.** Схема обтекания тела с плоским затуплением /  
Scheme of body flow with a flat blunt

Источник: составлено авторами.

Задано тело вращения (рис. 3) длиной  $L$ , радиусом основания  $R$  и плоским торцом с радиусом  $r_0$ . Требуется определить форму образующей  $y(x)$  и величину  $r_0$  такие, при которых это тело имеет минимальное сопротивление в гиперзвуковом потоке газа.

В случае формулы Ньютона для торца  $c_p=2$ , а для образующей  $c_p=2\cos^2\theta$ . Уравнение для величины коэффициента сопротивления запишется (линейные размеры отнесены к  $R$ ):

$$c_x = 2r_0^2 + 4 \int_{r_0}^1 \frac{x}{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (9)$$

Для затупленного степенного тела образующая имеет вид [16]

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < r_0 \\ \lambda \frac{x^\beta - r_0^\beta}{1 - r_0^\beta}, & r_0 < x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

Тогда для модели Ньютона запишем уравнение (9) в виде

$$\begin{aligned} c_x &= 2r_0^2 + 4 \int_0^1 \frac{x}{1 + \left( \frac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta} x^{\beta-1} \right)^2} dx - 4r_0^2 \int_0^1 \frac{x}{1 + \left( \frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} x^{\beta-1} \right)^2} dx = \\ &= 2r_0^2 + 2F \left( 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right) - 2r_0^2 F \left( 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Вариационная задача свелась к поиску минимума функции (11) по двум переменным  $\beta$  и  $r_0$  при заданном удлинении  $\lambda$ . В Таблице 2 представлены результаты расчётов величин  $\beta$ ,  $\alpha = \beta^{-1}$  и  $r_0$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ , при которых достигается минимум  $c_x$  и, для сравнения, величины  $c_{x0}$  при тех же удлинениях, но без затупления ( $r_0=0$ ).

Таблица 2 / Table 2

Величины  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $C_x$ ,  $C_{x0}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /

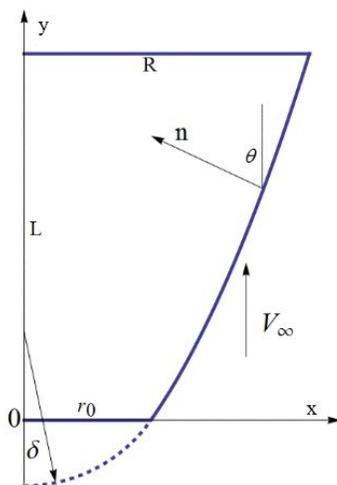
Values of  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $C_x$ ,  $C_{x0}$  as functions of elongation  $\lambda$

$\lambda$	$\beta$	$\alpha$	$r_0$	$c_x$	$c_{x0}$
2	1.448	0.691	0.123	0.321	0.3305
4	1.375	0.727	0.0293	0.0982	0.0986
6	1.355	0.738	0.00786	0.0454	0.0455
8	1.346	0.743	0.00346	0.0259	0.0259
10	1.342	0.745	0.00181	0.0167	0.0167

Источник: по данным авторов.

При малых удлинениях величина радиуса затупления велика а коэффициент сопротивления существенно меньше, чем без затупления. Начиная с  $\lambda=8$ , несмотря на затупление коэффициент сопротивления становится практически одинаковым в обоих случаях.

### 2.3. Степенные тела вращения с параболическим, гиперболическим, сферическим затуплениями



**Рис. 4 / Fig. 4** Схема образующей осесимметричного степенного тела с затуплением / Scheme of forming a suspisimetric degree body with a blunt

Источник: составлено авторами

Образующая осесимметричная степенная тела вращения  $y(x)$  (ось  $y$  – ось вращения) содержит 2 части: 1) парабола радиуса затупления  $R_p$ , либо гипербола радиуса затупления  $R_h$ , либо окружности радиуса  $R_s$  при  $0 < x < r_0$ ; 2) степенная функция при  $r_0 < x < R$  ( $R$  – радиус основания). Расположим это тело таким образом, что  $y(r_0) = 0$ . Расстояние от оси  $x$  до основания тела обозначим  $L$ , а расстояние от оси  $x$  до критической точки обозначим  $\delta$ .

Тогда уравнение для образующей тела вращения с параболическим затуплением будет иметь вид:

$$y(x) = \begin{cases} y_s(x) = \delta \left( \frac{x^2}{r_0^2} - 1 \right), & 0 < x < r_0 \\ y_p(x) = (\lambda - \delta) \frac{x^\beta - r_0^\beta}{1 - r_0^\beta}, & r_0 < x < R \end{cases} \quad (12)$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке  $x = r_0$ , имеем:

$$R_p = \frac{1}{2\lambda\beta \frac{r_0^{\beta-2}}{2 - (2-\beta)r_0^\beta}}; \delta = \frac{\lambda\beta r_0^\beta}{2 - (2-\beta)r_0^\beta}; \lambda = \frac{L + \delta}{R} \quad (13)$$

Коэффициент сопротивления такого тела (сила, действующая на тело, отнесённая к скоростному напору и площади основания) состоит из суммы сил, действующих на параболическое затупление и степенную часть.  $Cx_p = c_{xs} + c_{xp}$ .

Подставляя выражения (12), (13) в (7) и вычисляя интегралы, получаем:

$$C_{x_p} = \frac{2 \lg(1 + A^2 r_0^2)}{A^2} + 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -B^2\right) - 2r_0^2 F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -C^2\right) \quad (14)$$

$$A^2 = \left(2 \frac{\delta}{r_0^2}\right)^2, \quad B^2 = \left(\frac{(\lambda - \delta)\beta}{1 - r_0^\beta}\right)^2, \quad C^2 = \left(\frac{(\lambda - \delta)\beta r_0^{\beta-1}}{1 - r_0^\beta}\right)^2$$

В табл. 3 показаны результаты расчётов величин  $\beta$  и  $r_0$ , зависящие от удлинения  $\lambda$ , при которых достигается минимум коэффициента сопротивления тела вращения с параболическим затуплением  $C_{x_p}$ . В табл. 3 также сравнение значений  $C_{x_p}$  для тел с затуплением и значений  $c_{x_0}$  без затупления.

Таблица 3 / Table 3

**Величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_0$ ,  $C_{xp}$ ,  $C_{x0}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /**

**Values of  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_0$ ,  $C_{xp}$ ,  $C_{x0}$  as functions of elongation  $\lambda$**

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.42818	1.36994	1.35267	1.34529	1.34146
$r_0$	0.23404	0.04950	0.01752	0.00809	0.00437
$R_p$	0.14711	0.02732	0.00897	0.00396	0.00208
$C_{xp}$	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.01668
$C_{x0}$	0.3305	0.0986	0.0455	0.02591	0.0167

Источник: по данным авторов.

Видно, что значения коэффициента сопротивления параболического затупления тела вращения меньше чем в случае отсутствия затупления (хотя разница не очень большая).

Аналогично для уравнения образующей тела вращения с гиперболическим затуплением будет вид (все размеры отнесены к  $R$ )

$$y(x) = \begin{cases} y_s(x) = -a + a\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}, & 0 < x < r_0 \\ y_p(x) = \lambda - a_1(1 - x^\beta), & r_0 < x < 1 \end{cases} \quad (15)$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке  $x = r_0$ , имеем:

$$a = \frac{b^2 \lambda \beta r_0^\beta \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}}{r_0^2 + r_0^{2+\beta} (\beta - 1) - b^2 \beta r_0^\beta \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\right)}; \quad R_h = \frac{b^2}{a} \quad (16)$$

$$a_1 = \frac{\lambda r_0^2}{r_0^2 + r_0^{2+\beta} (\beta - 1) - b^2 \beta r_0^\beta \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}\right)}$$

Тогда коэффициент сопротивления тела складывается из сопротивления гиперболического затупления  $c_{xs}$  и поверхности вращения  $c_{xp}$

Имея в виду (15), (16), (7) и вычисляя интегралы, получаем:

$$\begin{aligned}
 c_{xs} &= \frac{2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left[ (a^2 + b^2)r_0^2 + a^2b^2 \operatorname{Log} \left( 1 + \frac{a^2r_0^2}{b^4} + \frac{r_0^2}{b^2} \right) \right] \\
 c_{xp} &= 2F \left( 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -a_1^2\beta^2 \right) - 2r_0^2 F \left( 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -a_1^2\beta^2 r_0^{2\beta-2} \right) \\
 Cx_h &= c_{xs} + c_{xp}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Таблица 4 / Table 4

Величины  $\beta, r_0, b, R_h, R_p, C_{xh}, C_{xp}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /

Values of  $\beta, r_0, b, R_h, R_p, C_{xh}, C_{xp}$  as functions of elongation  $\lambda$

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.42818	1.36993	1.35267	1.34529	1.34146
$r_0$	0.23404	0.04950	0.01752	0.00809	0.00437
$b$	60.1069	6.07575	3.50101	4.49887	0.90306
$R_h$	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
$R_p$	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
$C_{xh}$	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686
$C_{xp}$	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686

Источник: по данным авторов.

В табл. 4 даны значения  $\beta, r_0, b, c_{xh}$  – коэффициент сопротивления с гиперболическим затуплением и  $c_{xp}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ . Там также положены радиусы затупления  $R_h, R_p$ .

Аналогично для уравнения образующей тела вращения со сферическим затуплением будет вид (все размеры отнесены к R):

$$y(x) = \begin{cases} y_s(x) = \sqrt{R_s^2 - r_0^2} - \sqrt{R_s^2 - x^2}, & 0 < x < r_0 \\ y_p(x) = \lambda_1 \frac{x^\beta - r_0^\beta}{1 - r_0^\beta}, & r_0 < x < 1 \end{cases}
 \tag{18}$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке  $x=r_0$ , имеем:

$$R_s = \frac{1}{\lambda_1\beta} \sqrt{r_0^4 + r_0^{4-2\beta} - 2r_0^{4-\beta} + r_0^2\lambda_1^2\beta^2}; \delta = R_s - \sqrt{R_s^2 - r_0^2}; \lambda = \lambda_1 + \delta
 \tag{19}$$

Тогда подставляя выражения (18), (19) в (7) и вычисляя интегралы, получаем коэффициент сопротивления по формуле Ньютона:

$$Cx_s = 2 \left( r_0^2 - \frac{r_0^4}{2R_s^2} \right) + 2F \left( 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\lambda_1\beta}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right) - 2r_0^2 F \left( 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\lambda_1\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right)
 \tag{20}$$

Таблица 5 / Table 5

**Величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_s$ ,  $R_h$ ,  $R_p$ ,  $C_{xs}$ ,  $C_{xh}$ ,  $C_{xp}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ /**

**Values of  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_s$ ,  $R_h$ ,  $R_p$ ,  $C_{xs}$ ,  $C_{xh}$ ,  $C_{xp}$  as functions of elongation  $\lambda$**

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.183	1.3524	1.3487	1.3439	1.3408
$r_0$	0.3271	0.0613	0.020	0.00876	0.004578
$R_s$	0.3556	0.0682	0.0222	0.0097	0.0050
$R_h$	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
$R_p$	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
$C_{xs}$	0.3409	0.0984	0.04549	0.02591	0.016689
$C_{xh}$	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686
$C_{xp}$	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686

Источник: по данным авторов.

В табл. 5 представлены аналогично величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_s$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ , при которых достигается минимум  $C_{xs}$  – коэффициент сопротивления со сферическим затуплением и для сравнения  $C_{xh}$ ,  $C_{xp}$  при тех же удлинениях. В табл. 5 также проведено сравнение радиуса затупления для различных случаев.

### 3. Свободномолекулярная модель

#### 3.1. Степенные тела вращения

В случае свободномолекулярного модели в гиперзвуковом потоке газа можно записать (2)

$$c_p = 2 \cos^2 \theta + z \cos \theta, \quad z = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma} \quad (21)$$

$$c_\tau = 2 \cos \theta \sin \theta$$

Здесь  $t_w$  – температурный фактор,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\theta$  – угол между внутренней нормалью к поверхности и направлением скорости газа.

Задача ставится также как и в п. 2.1. Уравнение (4) запишется:

$$c_x = 2 + 2z \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} dx \quad (22)$$

Пусть образующая – степенная функция:  $y = L \left( \frac{x}{R} \right)^\beta$ .

Тогда уравнение (22) запишется:

$$c_x = 2 + 2z \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 + (\lambda \beta x^{\beta-1})^2}} dx = F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2 \lambda^2 \right) \quad (23)$$

В табл. 6 показаны величины  $\beta$ ,  $\alpha$ , и  $c_x$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ .

На рис. 5. изображена зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от удлинения  $\lambda$ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к  $\alpha = 2/3 = 0.667$ , соответственно [12].

Таблица 6 / Table 6

Величины  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $c_x$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /Values of  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $c_x$  as functions of elongation  $\lambda$ 

$\lambda$	$\beta$	$\alpha$	$c_x$
2	1.8895	0.52924	2.1168
4	1.6067	0.62239	2.06417
6	1.5511	0.6447	2.04364
8	1.5305	0.6534	2.03297
10	1.5204	0.65772	2.02646

Источник: по данным авторов.

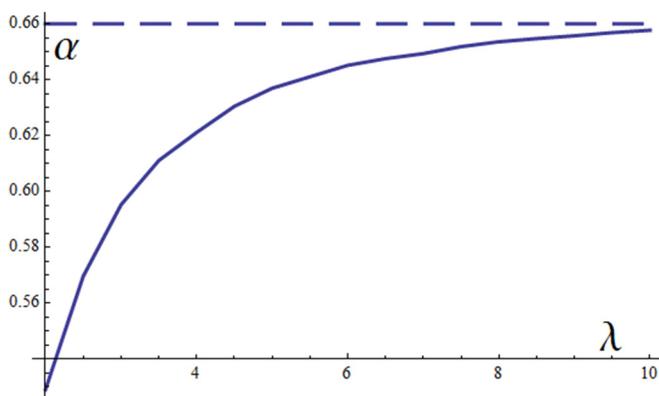


Рис. 5 / Fig. 5. Зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от величины удлинения  $\lambda$ ,  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$  /  
Dependence of  $\alpha = \beta^{-1}$  on elongation  $\lambda$ ,  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$

Источник: составлено авторами.

### 3.2. Степенные тела вращения с плоским затуплением

Задача ставится также как и в п. 2.2. Используя уравнение (4), (21), (22) получим:

$$c_x = 2 + zr_0^2 + 2z \int_{r_0}^1 \frac{x}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} dx \quad (24)$$

Подставляя выражения (10) в (24) и вычисляя интегралы, получаем:

$$c_x = 2 + zr_0^2 + zF \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left( \frac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] - zr_0^2 F \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left( \frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] \quad (25)$$

Таблица 7 / Table 7

Величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $c_x$ ,  $c_{x0}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /

Values of  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $c_x$ ,  $c_{x0}$  as functions of elongation  $\lambda$

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.6447	1.5621	1.53494	1.52262	1.5161
$r_0$	0.23526	0.08243	0.03985	0.02319	0.01510
$c_x$	2.11388	2.06372	2.04353	2.03293	2.02645
$c_{x0}$	2.1168	2.06417	2.04364	2.03297	2.02646

Источник: по данным авторов.

В табл. 7 показаны результаты расчётов величин  $\beta$  и  $r_0$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ , при которых достигается минимум  $c_x$  в случае свободномолекулярной модели и сравнение с величиной  $c_{x0}$  при тех же удлинениях, но без затупления ( $r_0=0$ ).

### 3.3. Степенные тела вращения с параболическим, гиперболическим, сферическим затуплениями

Постановка задачи такая же, как и в п. 2.3. Используя уравнения (12), (13), (22), получим коэффициент сопротивления в свободномолекулярном случае:

$$C_{x_p} = 2 + 2z \frac{(-1 + \sqrt{1 + A^2 r_0^2})}{A^2} + zF \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -B^2 \right] - z r_0^2 F \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -C^2 \right] \quad (26)$$

$$A^2 = \left( 2 \frac{\delta}{r_0^2} \right)^2; \quad B^2 = \left( \frac{(\lambda - \delta)\beta}{1 - r_0^\beta} \right)^2; \quad C^2 = \left( \frac{(\lambda - \delta)\beta r_0^{\beta-1}}{1 - r_0^\beta} \right)^2$$

Таблица 8 / Table 8

Величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_p$ ,  $c_{xp}$ ,  $c_x$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /

Values of  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_p$ ,  $c_{xp}$ ,  $c_x$  as functions of elongation  $\lambda$

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.60196	1.54591	1.52687	1.51794	1.51295
$r_0$	0.4977	0.17611	0.08855	0.053177	0.03546
$R_p$	0.22104	0.0723584	0.034466	0.019960	0.012977
$c_{xp}$	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645
$c_x$	2.11388	2.06372	2.04353	2.03293	2.02645

Источник: по данным авторов

В табл. 8 представлены величины степени  $\beta$  и радиуса параболического затупления  $R_p$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  в свободномолекулярном случае. В табл. 8 также помещены значения коэффициента сопротивления с плоским торцом.

Расчёты проводились при температуре фактора  $t_w = 0.1$  и отношения теплоёмкостей  $\gamma = 1.4$ .

Аналогично, для гиперболического затупления, используя уравнение (15), (16), (22), получим:

$$c_{xs} = 2 + \frac{zb^2}{(a^2+b^2)} \left( a_2 (b^2+r_0^2) - b^2 + \frac{a^2b}{2\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{Log} \left[ \frac{a^2(b^2+2r_0^2)+2b(b^2+r_0^2)(b+a_2\sqrt{a^2+b^2})}{b^2(\sqrt{a^2+b^2}+b)^2} \right] \right)$$

$$c_{xp} = zF \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -a_1^2\beta^2 \right) - z r_0^2 F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -a_1^2\beta^2 r_0^{2\beta-2} \right) \quad (27)$$

$$Cx_h = c_{xs} + c_{xp}$$

$$a = \frac{b^2 \lambda \beta r_0^\beta \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}}}{r_0^2 + r_0^{2+\beta} (\beta-1) - b^2 \beta r_0^\beta \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}} \right)}; \quad R_h = \frac{b^2}{a}$$

$$a_1 = \frac{\lambda r_0^2}{r_0^2 + r_0^{2+\beta} (\beta-1) - b^2 \beta r_0^\beta \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{b^2}} \right)}; \quad a_2 = \sqrt{1 + \frac{a^2 r_0^2}{b^2 (b^2 + r_0^2)}}$$

Таблица 9 / Table 9

**Величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $b$ ,  $R_h$ ,  $R_p$ ,  $c_{xh}$ ,  $c_{xp}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /**

**Values of  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $b$ ,  $R_h$ ,  $R_p$ ,  $c_{xh}$ ,  $c_{xp}$  as functions of elongation  $\lambda$**

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.60136	1.54595	1.52687	1.51793	1.51294
$r_0$	0.49834	0.17594	0.088512	0.0531947	0.03547
$b$	168.282	10.2585	5.78814	2.51043	6.22285
$R_h$	0.221083	0.072322	0.034455	0.019958	0.012978
$R_p$	0.22104	0.072358	0.034466	0.019960	0.012977
$c_{xh}$	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645
$c_{xp}$	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645

Источник: по данным авторов.

В табл. 9 показаны зависимости величины  $\beta$ ,  $r_0$  и  $b$  от удлинения  $\lambda$ , при которых достигается минимум  $c_{xh}$ . В табл. 9 также проведено сравнение значений  $c_{xp}$ ,  $c_{xh}$ . Кроме того, в Таблице также помещены величины радиусов затупления  $R_p$  и  $R_h$ . Заметим что коэффициенты сопротивления  $c_{xp}$ ,  $c_{xh}$  и радиусы затупления в критической точке совпадают в обоих случаях.

Для случая сферического затупления используя уравнения (18), (19), (22), получим следующую формулу коэффициента сопротивления:

$$Cx_s = 2 + \frac{2z}{3R_s} \left[ R_s^3 - (R_s^2 - r_0^2)^{3/2} \right] + zF \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left( \frac{\lambda_1 \beta}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right) - zr_0^2 F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left( \frac{\lambda_1 \beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right) \quad (28)$$

Таблица 10 / Table 10

Величины  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_s$ ,  $R_h$ ,  $R_p$ ,  $c_{xs}$ ,  $c_{xh}$ ,  $c_{xp}$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  /

Values of  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $R_s$ ,  $R_h$ ,  $R_p$ ,  $c_{xs}$ ,  $c_{xh}$ ,  $c_{xp}$  as functions of elongation  $\lambda$

$\lambda$	2	4	6	8	10
$\beta$	1.1	1.4824	1.5078	1.50967	1.508
$r_0$	0.51122	0.1821	0.0874	0.0506	0.03283
$R_s$	0.5354	0.19382	0.09337	0.05406	0.03507
$R_h$	0.221083	0.072322	0.034455	0.019958	0.012978
$R_p$	0.22104	0.072358	0.034466	0.019960	0.012977
$c_{xs}$	2.11913	2.06439	2.04367	2.03298	2.02647
$c_{xh}$	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645
$c_{xp}$	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645

Источник: по данным авторов.

В табл. 10 показаны минимальные коэффициенты сопротивления  $c_{xs}$  для сферического затупления, полученные по формуле (28). В этой таблице проведено сравнение радиуса затупления между сферическим затуплением тела вращения и параболическим, гиперболическим случаями в свободномолекулярном режиме. Очевидно, что значения коэффициента сопротивления для сферического и параболического затуплений близки. А значения для гиперболического и параболического затуплений совпадают.

На рис. 6, 7 изображены зависимости  $R_s$ ,  $R_p$  и  $R_h$  от удлинения тела  $\lambda$  для разных случаев.

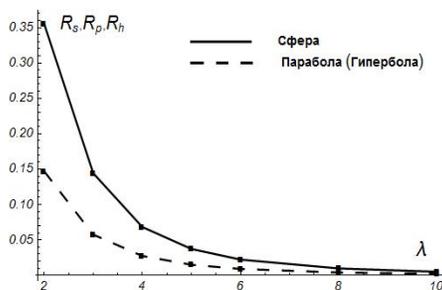


Рис. 6 / Fig. 6. Формула Ньютона / Newton's formula

Источник: составлено авторами

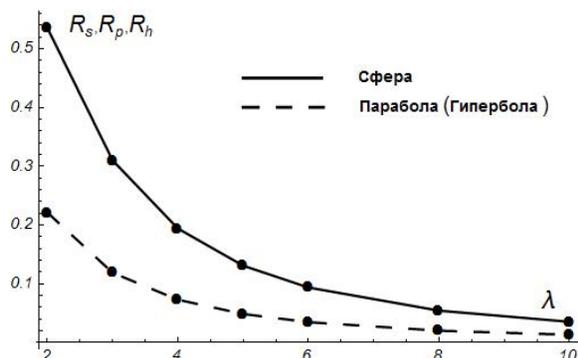


Рис. 7 / Fig. 7. Свободномолекулярная модель / Free molecular model

Источник: составлено авторами

Отметим что, радиусы затупления монотонно уменьшаются с увеличением  $\lambda$  для всех случаев (сферическое, параболическое, гиперболическое затупление). Более того, при увеличении удлинения  $\lambda$  радиус кривизны сферического затупления снижается существенно быстрее по сравнению с другими случаями. При больших удлинениях  $\lambda$ , радиус затупления стремится к нулю для всех случаев.

### Заключение

В данной работе сравнивают силы минимальных сопротивлений для тела вращения со степенной образующей и для затупленных тел вращения в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей. Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в критической точке в зависимости от удлинения.

Сравнение показывает, что во всех вариантах для случая гиперзвукового свободномолекулярного течения при больших удлинениях показатель степени  $\beta$  стремится к величине  $\beta=1.5$ , а в случае формулы Ньютона к  $\beta=1.333$ . Причём значения коэффициента минимального сопротивления для сферического и параболического затуплений близки. А значения для гиперболического и параболического затуплений совпадают.

Радиус затупления монотонно уменьшается с увеличением  $\lambda$  для всех случаев (сферическое, параболическое, гиперболическое затупление). Для одного и того же удлинения затупленные по сфере тела вращения минимального сопротивления имеют наибольший радиус затупления, что способствует уменьшению теплового потока в критической точке [17].

Статья поступила в редакцию 19.09.2022 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
2. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. Крайко А. Н., Пудовкин Д. Е., Якунина Г. Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
4. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 508 с.
5. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 328 с.
6. Остапенко Н. А., Якунина Г. Е. О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1992. № 1. С. 95–106.
7. Черноушко Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 240 с.
8. Бунимович А. И., Якунина Г. Е. Исследование формы поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 112–117.
9. Якунина Г. Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2000. № 64. № 2. С. 299–310.
10. Таковицкий С. А. Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 6. С. 775–782. DOI: 10.31857/S003282350002741-5.
11. Благодослов В. И., Гродзовский Г. Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 6–22.
12. Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ (сетевое научное издание). 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=117962> (дата обращения: 22.09.2022). DOI: 10.34759/trd-2020-113-4.
13. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 342 с.
14. Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
15. Гусев В. Н., Коган М. Н., Перепухов В. А. О подобии и изменении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока // Ученые записки ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 1. С. 24–33.
16. Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Загупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МФТИ. 2021. Т. 13. № 1 (49). С. 96–107. DOI: 10.53815/20726759\_2021\_13\_1\_96.
17. Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Тепловой поток в критической точке осесимметричных тел минимального сопротивления // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 4. С. 43–53. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53.

## REFERENCES

1. Newton I. *Matematicheskie nachala natural'noi filosofii* [Mathematical principles of natural philosophy]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 688 p.
2. Chernyi G. G. *Techenie gaza s bol'shoi sverkhzvukovoi skorost'yu* [Course of gas with a high supersonic speed]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 220 p.
3. Krayko A. N., Pudovkin D. E., Yakunina G. E. *Teoriya aerodinamicheskikh form, blizkikh k optimal'nyim* [Theory of close-to-optimal aerodynamic forms]. Moscow, Yanus-K Publ., 2001. 132 p.
4. Miele A. *Teoriya optimal'nykh aerodinamicheskikh form* [Theory of optimum aerodynamic shapes]. Moscow, Mir Publ., 1969. 508 p.
5. Lunev V. V. *Giperzvukovaya aerodinamika* [Hypersonic aerodynamics]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1975. 328 p.
6. Ostapenko N. A., Yakunina G. E. [Least-drag bodies moving in media subject to locality hypothesis]. In: *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1992, no. 1, pp. 95–106.
7. Chernous'ko F. L., Banichuk N. V. *Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniya* [Variational problems of mechanics and control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 240 p.
8. Bunimovich A. I., Yakunina G. E. [Investigation of the shape of the transverse contour of a conical spatial body of minimal resistance moving in a rarefied gas]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1986, no. 5, pp. 112–117.
9. Yakunina G. E. [On the construction of optimal spatial forms within the framework of the local interaction model]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2000, no. 64, no. 2, pp. 299–310.
10. Takovitskiy S. A. [Analytical solution to the wave-drag minimization problem for an axisymmetric fore-body using local linearization]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2018, vol. 82, no. 6, pp. 775–788. DOI: 10.31857/S003282350002741-5.
11. Blagosklonov V. I., Grodzovskiy G. L. [Axisymmetric flow past power-law bodies of revolution at supersonic velocities of the oncoming flow]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1974, vol. V, no. 6, pp. 6–22.
12. Gorelov S. L., Nguyen V. L. [Rotation body of minimal aerodynamic drag in hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy MAI (setevoe nauchnoe izdanie)* [Electronic journal “Trudy MAI”], 2020, no. 113. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=117962> (accessed: 22.09.2022). DOI: 10.34759/trd-2020-113-4.
13. Barantsev R. G. *Vzaimodeistvie razrezhennykh gazov s obtekaemyimi poverkhnostyami* [The interaction of sparse gases with streamlined surfaces]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 342 p.
14. Galkin V. S., Erofeev A. I., Tolstykh A. I. [An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy TSAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1977, Iss. 1833, pp. 6–10.
15. Gusev V. N., Kogan M. N., Perepukhov V. A. [On the similarity and change of aerodynamic characteristics in the transition region at hypersonic flow velocities]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1970, vol. 1, no. 1, pp. 24–33.
16. Gorelov S. L., Nguyen V. L. [Blunted axisymmetric body with a minimal resistance in a hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)], 2021, vol. 13, no. 1 (49), pp. 96–107. DOI: 10.53815/20726759\_2021\_13\_1\_96.

17. Gorelov S. L., Nguyen V. L. [Heat flux at a critical point of axisymmetric bodies of minimum resistance]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics 2021], no. 4, pp. 43–53. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53.
- 

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Горелов Сергей Львович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);

e-mail: gorelovsl@yandex.ru;

Нгуен Ван Лам – аспирант кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);

e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey L. Gorelov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology;

e-mail: gorelovsl@yandex.ru;

Van Lam Nguyen – Postgraduate Student, Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology;

e-mail: lamvqtc1990@gmail.com.

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Степенные тела минимального сопротивления в газовом потоке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 17–34.

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-17-34.

### FOR CITATION

Gorelov S. L., Nguyen V. L. Power bodies of minimum resistance in a gas flow. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 17–34.

DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-17-34.