УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177

НАЧАЛЬНОЕ И КОНЕЧНОЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАДИУСА НЕСТАЦИОНАРНО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ АЭРОЗОЛЬНОЙ КАПЛИ

Корнеева Е.Е., Кузьмин М.К.
Московский государственный областной университет
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Авторами статьи найдены начальные и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся аэрозольной капли. При этом учтены кривизна поверхности капли, коэффициенты поверхностного натяжения и удельной теплоты фазового перехода, а также скачки концентрации и температуры. Проведены численные расчеты для всех величин, содержащихся в найденных выражениях для капель воды разных размеров и при различных температурах среды. Выделены сходства и различия этих выражений, которые важно учитывать при выборе формул для вычисления времени полного испарения капель.

Ключевые слова: аэрозольная капля, нестационарное испарение, скачки концентрации и температуры, предельные выражения скорости изменения радиуса.

INITIAL AND FINITE LIMIT EXPRESSION FOR THE RATE OF CHANGE IN THE RADIUS OF AN UNSTEADY EVAPORATING AEROSOL DROPLET

E. Korneeva, M. Kuzmin
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Annotation. We have found initial and finite limit expressions for the rate of change in the radius of an unsteady evaporating aerosol droplet. The equations take into account the curvature of the droplet surface, surface tension and specific heat of the phase transition, as well as concentration and temperature jumps. Numerical calculations for all values contained in the derived expressions for water droplets of different sizes and at different ambient temperatures are carried out. The similarities and differences of these expressions are revealed, which are important to consider when choosing formulae for calculating the time of complete evaporation of droplets.

Key words: aerosol drop, unsteady evaporation, jumps of temperature and concentration, limiting expressions of the rate of change in the radius.

© CC BY Корнеева Е.Е., Кузьмин М.К., 2018.

Введение

Исследование процесса испарения и конденсационного роста аэрозольных капель имеет важное теоретическое и практическое значение [1; 2]. Это подтверждается большим числом публикующихся работ по этой тематике [3–11]. Так как в ходе этих процессов размеры капель изменяются непрерывно, то эти процессы следует считать нестационарными.

Рассмотрим процесс нестационарного испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы, находящейся в бинарной газовой смеси, первый компонент которой образован молекулами вещества капли, а второй компонент – молекулами несущего газа, причём этот компонент не испытывает фазовый переход в рассматриваемом интервале температур. Будем полагать, что испарение протекает сферически симметрично в диффузионном режиме [1; 2].

К числу важнейших характеристик нестационарного процесса испарения аэрозольных капель относится скорость изменения их радиуса и время полного испарения капли. Имеется большое число взаимосвязанных факторов, влияющих на этот процесс. Для капель определённых размеров весьма существенным может быть влияние слоя Кнудсена вокруг капли [1; 2]. Для исследования влияния слоя Кнудсена на рассматриваемый процесс испарения капли учитывают, так называемые, скачки концентрации и температуры на этом слое.

Будем предполагать [1; 2], что концентрация пара у поверхности капли равна концентрации насыщенного пара при температуре её поверхности. Для сферических капель достаточно малого радиуса приходится учитывать зависимость концентрации насыщенных паров над поверхностью от коэффициента поверхностного натяжения вещества капли [12].

Постановка задачи

Как уже было сказано, мы рассматриваем сферически симметричное испарение. Поэтому выбираем сферическую систему координат с началом в центре капли. В рамках рассматриваемой модели нестационарного процесса испарения неподвижной сферической капли независимыми переменными будут r – радиальная координата сферической системы координат и время t. Выпишем основные уравнения, начальные и граничные условия нашей задачи. Положим, что распределение относительной концентрации пара $c_1(r, t)$ и температура парогазовой смеси $T(r, t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial c_1}{\partial r}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right), \qquad (2)$$

$$c_1\left(r,t\right)_{|t=0} = c_{10},\, c_1\left(r,t\right)_{|r\to\infty} = c_{1\infty} = c_{10}, \qquad (3)$$

$$T(r,t)_{|t=0} = T_0,\, T(r,t)_{|r\to\infty} = T_\infty = T_0, \tag{4}$$

$$Dnm_1 q \frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}_{|r=R}, \tag{5}$$

В нестационарные уравнения диффузии и теплопроводности, то есть в уравнения (1), (2) соответственно входят: $D = nm_2 D_{12}/\rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси; $n = n_1 + n_2$; n_1, m_1 и n_2, m_2 – концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно; ρ_e и a – соответственно плотность и температуропроводность парогазовой смеси.

В соотношении (5), выражающем условие непрерывности потока тепла через поверхность капли, участвуют величины: q – удельная теплота испарения вещества капли, κ – коэффициент теплопроводности парогазовой смеси.

Введём обозначения

$$c_{1s}(t) = c_1(T_s) = n_1(T_s)/n,$$

где $n_1(T_s)$ – концентрация насыщенных паров вещества капли при температуре её поверхности $T_s = T_s(t)$, далее положим

$$T_s(t)_{|t=0} = T_{s0},\, c_{1s}(t)_{|t=0} = c_{1s0}. \tag{6}$$

Формулу, определяющую зависимость концентрации насыщенных паров над сферической поверхностью достаточно большой кривизны от коэффициентов поверхностного натяжения и удельной теплоты фазового перехода вещества капли, можно получить с использованием приближенного уравнения Кельвина (Томсона) и приближенного уравнения Клапейрона-Клаузиуса. Искомая формула имеет вид [12]

$$c_{1s}(t) = \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right)\left\{1 + k_q\left[T_s(t) - T_{s0}\right]\right\}. \tag{7}$$

Здесь черта над буквой означает концентрацию насыщенных паров вещества капли над поверхностью, имеющей пренебрежимо малую кривизну при её температуре, то есть

$$\overline{c}_{1s0} = \overline{c}_{1s}(t)_{|t=0},\, \overline{c}_{1s}(t) = c_1(T_s),$$

а через k_σ, k_q обозначены выражения:

$$k_\sigma = \frac{2m_1\sigma}{kT_{s0}\rho_i},\, k_q = \frac{qm_1 - kT_{s0}}{kT_{s0}^2},$$

в которые входят величины: σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ_i – плотность вещества капли, k – постоянная Больцмана.

Отметим, что

$$c_{1s0} = \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right). \tag{8}$$

Для процесса испарения капель необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_c = c_{10} - \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right) < 0.$$

Из формулы (8) и выражения для k_σ следует, что концентрация насыщенных паров над поверхностью сферической капли существенно зависит от отношения σ/R, поэтому важность учёта коэффициента поверхностного натяжения возрастает с увеличением кривизны её поверхности.

Учёт скачков концентрации и температуры на слое Кнудсена вблизи поверхности капли осуществляется с помощью граничных условий [2]:

$$\left[c_1\left(r,t\right) - c_{1s}\left(t\right)\right]_{|r=R} = \left(K_c^{(c)}\frac{\partial c_1}{\partial r} + K_c^{(T)}\frac{1}{T_{s0}}\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{|r=R}, \tag{9}$$

$$\left[T\left(r,t\right) - T_s\left(t\right)\right]_{|r=R} = \left(K_T^{(T)}\frac{\partial T}{\partial r} + K_T^{(c)}T_{s0}\frac{\partial c_1}{\partial r}\right)_{|r=R}, \tag{10}$$

входящие в (9), (10) выражения $c_1(r, t)$ и $T(r, t)$ дают значения относительной концентрации первого компонента бинарной смеси и температуру вне слоя Кнудсена. Разности, расположенные в левых частях равенств (9), (10), называют соответственно скачками концентрации и температуры. Коэффициенты $K_c^{(c)}$, $K_c^{(T)}$, $K_T^{(T)}$, $K_T^{(c)}$ называют газокинетическими коэффициентами скачков концентрации и температуры.

При проведении численного анализа ниже получаемых предельных выражений для скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся капли мы будем использовать выражения для коэффициентов скачков концентрации и температуры, приведённые в монографии [13], где они получены для случая бинарной газовой смеси обобщением подхода Лоялки, разработанного для однокомпонентного газа.

Итак, соотношения (1) – (7) и (9), (10) определяют основные уравнения, начальные и граничные условия нашей задачи.

Метод решения задачи. Начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса капли

Для решения задачи мы используем метод интегральных преобразований Лапласа [14]. Как известно, преобразование Лапласа L устанавливает следующую связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$, где p – комплексный параметр:

$$F\left(p\right) = L\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty f\left(t\right)e^{-pt}dt.$$

В нашем случае в пространстве изображений неизвестными функциями являются:

$$S\left(r,p\right) = L\left\{c_1\left(r,t\right)\right\}, \Theta\left(r,p\right) = L\left\{T\left(r,t\right)\right\},$$

$$S_s(p) = L\{c_{1s}(t)\}, \Theta_s(p) = L\{T_s(t)\}.$$

Для получения начального и конечного предельных выражений скорости изменения радиуса испаряющейся капли нам достаточно иметь выражение функции $S(r, p)$. Следуя изложенной в работе [15] процедуре отыскания изображений и учитывая формулу (8), имеем

$$S(r,p) = \frac{c_{10}}{p} - \frac{\varepsilon_{cT}\kappa p_2}{k_{q\sigma}p_1 + \kappa p_2 + g_\chi p_1 p_2}\frac{R}{r}\exp\left(-r_c\sqrt{p}\right), \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0}k_q\varepsilon_T,\ \varepsilon_T = T_0 - T_{s0},$$

$$k_{q\sigma} = \gamma k_q \bar{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right),\quad \gamma = Dnm_1 q,$$

$$p_1 = \sqrt{p/D} + 1/R, p_2 = \sqrt{p/a} + 1/R, r_c = (r - R)/\sqrt{D},$$

$$g_\chi = k_{q\sigma}\chi_T + \kappa\chi_c,\quad \chi_c = K_c^{(c)} - \frac{\gamma}{\kappa T_{s0}}K_c^{(T)},\quad \chi_T = K_T^{(T)} - \frac{\kappa T_{s0}}{\gamma}K_T^{(c)},$$

χ_c, χ_T называются составными коэффициентами соответственно скачков концентрации и температуры [15], ε_T – начальной разницей температур у поверхности капли (разность температур внешней и внутренней сторон слоя Кнудсена).

До сих пор радиус капли R мы считали постоянной величиной, это допустимо только в случае, когда масса капли значительно больше массы вещества, испарившегося с поверхности капли за время рассматриваемого процесса [16], то есть когда имеет место процесс медленного испарения. Как известно [1], скорость нестационарного изменения радиуса капли определяется формулой

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Dnm_1}{\rho_i}\frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R}. \tag{12}$$

Так как $\frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R} = L^{-1}\left\{\frac{\partial S}{\partial r}_{|r=R}\right\}$, то необходимо иметь выражение для изображения $(\partial S/\partial r)_{|r=R}$. По выражению (11) находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_{|r=R} = \frac{\varepsilon_{cT}\kappa p_1 p_2}{p\left(k_{q\sigma}p_1 + \kappa p_2 + g_\chi p_1 p_2\right)}.$$

Предположив, что $\lim_{t\to 0}\left(\partial c_1 / \partial r\right)_{|r=R}$ существует, по теореме о начальном значении из операционного исчисления [14] находим

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right)_{|r=R} = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_{|r=R} = \frac{\varepsilon_{cT}\kappa}{g_\chi}.$$

Предположив теперь, что $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\partial c_1/\partial r\right)_{|r=R}$ существует, по теореме о конечном значении из операционного исчисления [14] находим

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right)_{|r=R}=\lim_{p\to 0}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_{|r=R}=\frac{\varepsilon_{cT}\kappa}{R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi}.$$

По формуле (12) получаем начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса капли:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0=\frac{\varepsilon_{cT}Dnm_1\kappa}{\rho_i g_\chi}\left(t\to 0\right), \tag{13}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty=\frac{\varepsilon_{cT}Dnm_1\kappa}{\rho_i\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]}\left(t\to\infty\right). \tag{14}$$

Численный анализ начального и конечного предельных выражений для скорости изменения радиуса капли

Для численного анализа выражений (13) и (14) будем рассматривать процесс нестационарного испарения ($\varepsilon_c < 0$) одиночных капель воды в условиях наиболее близких к реальным, а именно, в воздушную среду 50% влажности, когда давление среды $P = 0{,}1$ *МПа,* при двух значениях температуры 293 *К,* 323 *К.* Для коэффициента испарения воды α при указанных выше температурах среды полагаем соответственно 0,034 и 0,026 [17]. Чтобы охватить все часто рассматриваемые классы аэрозольных частиц (мелкие частицы, частицы с промежуточными размерами, умеренно крупные частицы, крупные частицы [13]), будем вести численные расчёты для капель воды с радиусами 10^{-8} м, 10^{-7} м, 10^{-6} м, 10^{-5} м.

В этой статье будем рассматривать процесс только испарения капель, поэтому при $\varepsilon_c < 0$ величина $\varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0}k_q\varepsilon_T$, входящая в выражения (13) и (14), должна быть отрицательной, а это возможно только при выполнении условия

$$\varepsilon_T > -k_q^{-1}\left(1-\frac{c_{10}}{\varepsilon_c}\right)^{-1}.$$

Откуда получаем, что если за основу брать начальную температуру поверхности капли, то при этом температура среды на внешней стороне слоя Кнудсена не может быть намного ниже температуры поверхности капли (в противном случае начнётся рост капли). Поскольку мы зафиксировали температуру среды, то следует сказать, что температура поверхности капли не может быть намного выше температуры среды. Например, в случае $R = 10^{-6}$ м значение $\varepsilon_T > -8{,}52$ К при $T = 293$ К и $\varepsilon_T > -10{,}75$ К при $T = 323$ К.

Для выражений (13) и (14) характерна зависимость от большого числа одних и тех же физических величин. Из них следует отметить такие, как коэффициенты взаимной диффузии, теплопроводности среды, удельной теплоты испарения, поверхностного натяжения и газокинетические коэффициенты скачков концентрации и температуры. Важно отметить относительно последних, что коэффициенты $K_c^{(c)}$, $K_T^{(c)}$ зависят от коэффициента испарения вещества капли, причём абсолютные величины выражений (13), (14) растут с увеличением коэффициента испарения. Коэффициенты $K_c^{(T)}$, $K_T^{(T)}$ не зависят от коэффициента испарения.

Очевидно, что значение абсолютной величины выражения (14) меньше соответствующего значения выражения (13) за счёт положительного слагаемого $R(k_{q\sigma} + \kappa)$, расположенного в знаменателе выражения (14).

Представляет интерес изучение зависимости выражений (13) и (14) от радиуса капли. Используя значения исходных физических величин из справочника [18], проведены расчёты всех величин, составляющих выражения (13) и (14). Ограничиваясь для простоты случаем $\varepsilon_T = 0$ приведём таблицу значений $k_{q\sigma} + \kappa$ и g_χ (см. табл. 1).

Таблица 1.
Зависимость величин $k_{q\sigma} + \kappa$, g_χ от радиуса капли при двух различных значениях температуры

T, K	R, м	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
293	$(k_{q\sigma} + \kappa)10^1$, Вт/(мК)	0,9550	0,8938	0,8877	0,8871
	$g_\chi 10^7$, Вт/К	1,3931	1,3802	1,3789	1,3788
323	$(k_{q\sigma} + \kappa)10^1$, Вт/(мК)	3,4069	3,1699	3,1462	3,1439
	$g_\chi 10^7$, Вт/К	3,1316	3,0765	3,0710	3,0704

Как видно из таблицы 1 значения величин $k_{q\sigma} + \kappa$ и g_χ существенно зависят от температуры среды. Их значения при температуре 323 К превосходят соответствующие значения, полученные при температуре 293 К, примерно 3,5 и 2,2 раза. Причем, значения этих величин медленно убываю с ростом радиуса капель, а несколько большее отличие величин первых двух столбцов численных значений объясняется учётом кривизны поверхности капель и коэффициента поверхностного натяжения.

Выражение в знаменателе формулы (14), заключённое в квадратные скобки, состоит из двух слагаемых, первое из которых явно зависит от радиуса капли. Для капель воды, радиусы которых близки значению 10^{-6} м эти слагаемые будут величинами одного порядка, а для более мелких капель значения первого слагаемого будут значительно меньше значений второго слагаемого, тем самым для капель таких размеров учёт скачков концентрации и температуры становится более существенным фактором. А для более крупных капель, наоборот, скачки концентраций и температуры оказывают всё меньшее влияние на скорость изменения радиуса капли при больших значениях времени. При малых значениях времени, согласно формуле (13), влияние скачков концентрации и температуры на скорость изменения радиуса капли весьма существенно, следовательно, существенно при этом и влияние коэффициента испарения. Формулы (13) и (14) отличаются характером зависимости от радиуса капли. В этом можно убедиться по приводимой ниже таблице значений выражений (13), (14) (при $\varepsilon_T = 0$) (см. табл. 2).

Таблица 2.
Зависимость выражений для $(dR/dt)_0$, $(dR/dt)_\infty$ от радиуса капли
при двух различных значениях температуры

T, K	R, м	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
293	$(dR/dt)_0 10^5$, м/с	–4,92	–4,17	–4,092	–4,086
	$(dR/dt)_\infty 10^5$, м/с	–5,35	–4,37	–2,78	–0,61
323	$(dR/dt)_0 10^5$, м/с	–14,04	–12,29	–12,11	–12,09
	$(dR/dt)_\infty 10^5$, м/с	–15,08	–12,17	–6,34	–1,18

Сравнивая численные значения выражений для $(dR/dt)_0$ и $(dR/dt)_\infty$ при указанных температурах, легко заметить многократное увеличение их абсолютных величин при переходе к более высокой температуре. Также общим свойством выражений (13) и (14) является то, что они по абсолютной величине убывают с увеличением радиуса капли, причём это происходит с разной скоростью: для формул при малых значений времени весьма медленно, а для формул при больших значениях времени значительно быстрее. Особенно быстро для крупных капель воды, последнее объясняется тем, что в знаменателе выражения (14) содержится слагаемое $R(k_{q\sigma} + \kappa)$, значение которого для крупных капель воды приближенно равно значению выражения $R\gamma k_q \overline{c}_{1s0}$.

По данным таблицы 2 получаем, что численные значения отношения $(dR/dt)_0/(dR/dt)_\infty$ при изменении R от 10^{-8} м до 10^{-5} м увеличивается от 0,92 до 6,70 при температуре $T = 293$ K и от 0,93 до 10,25 при температуре $T = 323$ K.

Установленные выше зависимости выражений (13), (14) от различных физических факторов следует учитывать при выборе формул для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель определённых размеров.

Статья поступила в редакцию 31.07.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Издательство АН СССР, 1958. 91 с.
2. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
3. Азанов Г.М., Осипцов А.Н. Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 67–76.
4. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
5. Захаревич А.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Экспериментальное исследование изменения температуры в центре капли воды в процессе ее испарения в разогретом воздухе // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 3. С. 537–541.

6. Кузнецов Г.В., Куйбин П.А., Стрижак П.А. Оценка численных значений констант испарения капель воды, движущихся в потоке высокотемпературных газов // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. Вып. 2. С. 264–269.
7. Пискунов М.В., Стрижак П.А. Отличие условий и характеристик испарения неоднородных капель воды в высотемпературной газовой среде // Журнал технической физики. 2016. № 9. С. 24–31.
8. Хасанов А.С. Решение задачи об испарении двух капель операторными методами для любых радиусов капель и любых расстояний между ними // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 51–60.
9. О диффузионном испарении (сублимации) крупной аэрозольной частицы при значительных перепадах температуры в ее окрестности / Щукин Е.Р., Малай Н.В., Шулиманова З.Л., Уварова Л.А. // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. Вып. 4. С. 561–568.
10. Giorgiutti-Dauphinй F., Pauchard L. Drying drops // The European Physical Journal E. 2018. Vol. 41. No. 3. P. 32/1–32/15.
11. On the predictions for diffusion-driven evaporation of sessile / Tran Ha V., Nguyen Tuan A.H., Biggs Simon R., Nguyen Anh V. // Chemical Engineering Science. 2018. Vol. 177. P. 417–421.
12. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны ее поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2012. № 3. С. 39–49.
13. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
14. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
15. Яламов Ю.И., Кузьмин М.К. Скорость нестационарного испарения сферической капли с учетом скачков концентрации и температуры вблизи ее поверхности // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 30–35.
16. Nix N., Fukuta N. Nonsteady-state theory of droplet growth // Journal of Chemical Physics. 1973. Vol. 58. No. 4. P. 1735–1740.
17. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. М.: Химия, 1972. 304 с.
18. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

REFERENCES

1. Fuks N.A. Evaporation and droplet growth in gaseous medium. Oxford, Pergamon Press, 1959.
2. Shchukin E.R., Yalamov Yu.I., Shulimanova Z.L. *Izbrannye voprosy fiziki aerozolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
3. Azanov G.M., Osiptsov A.N. [The effect of fine evaporating droplets on the adiabatic-wall temperature in a compressible two-phase boundary layer]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2016, no. 4, pp. 67–76.
4. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Prognostic determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gaseous media at different

temperatures]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
5. Zakharevich A.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Experimental study of the temperature change in the center of a drop of water in the process of its evaporation in heated air]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 3, pp. 537–541.
6. Kuznetsov G.V., Kuibin P.A., Strizhak P.A. [Estimation of the numerical values of the evaporation constants of water droplets moving in a flow of high-temperature gases]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 2, pp. 264–269.
7. Piskunov M.V., Strizhak P.A. [Difference in the conditions and characteristics of evaporation of inhomogeneous water drops in a high-temperature gaseous medium]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2016, no. 9, pp. 24–31.
8. Khasanov A.S. [The solution of the evaporation problem of two drops by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 2, pp. 51–60.
9. Shchukin E.R., Malai N.V., Shulimanova Z.L., Uvarova L.A. [Diffuse vaporization (sublimation) of a large aerosol particle under precipitous changes in the ambient temperature]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 4, pp. 561–568.
10. Giorgiutti-Dauphinй F., Pauchard L. Drying drops. In: *The European Physical Journal E*, 2018, vol. 41, no. 3, pp. 32/1–32/15.
11. Tran Ha V., Nguyen Tuan A.H., Biggs Simon R., Nguyen Anh V. On the predictions for diffusion-driven evaporation of sessile. In: *Chemical Engineering Science*, 2018, vol. 177, pp. 417–421.
12. Kuz'min M.K. [The theory of nonstationary evaporation of spherical aerosol drop in view of dependence of saturated steam pressure from curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.
13. Galoyan V.S., Yalamov Yu.I. *Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh* [Dynamics of droplets in an inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis Publ., 1985. 208 p.
14. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniya* [Handbook on the practical use of Laplace transforms and Z-transforms]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 288 p.
15. Yalamov Yu.I., Kuz'min M.K. [Rate of unsteady of a spherical drop with regard to concentration and temperature discontinuities at its surface]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2005, vol. 7, no. 3, pp. 30–35.
16. Nix N., Fukuta N. Nonsteady-state theory of droplet growth. In: *Journal of Chemical Physics*, 1973, vol. 58, no. 4, pp. 1735–1740.
17. Amelin A.G. *Teoreticheskie osnovy obrazovaniya tumana pri kondensatsii para* [The theoretical basis for the formation of fog in the condensation of vapor]. Moscow, Khimiya Publ., 1972. 304 p.
18. Vargaftik N.B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i zhidkostei* [Handbook on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Корнеева Елена Евгеньевна – аспирант кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: ee-korneeva@yandex.ru;

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: lesir179@infoline.su.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena E. Korneeva – post-graduate student of the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: ee-korneeva@yandex.ru;

Mikhail K. Kuzmin – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Regional State University;
e-mail: lesir179@infoline.su.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Корнеева Е.Е., Кузьмин М.К. Начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся аэрозольной капли // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 4. С. 167–177.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177

FOR CITATION

Korneeva E.E., Kuzmin M.K. Initial and finite limit expression for the rate of change in the radius of an unsteady evaporating aerosol droplet. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 167–177.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177