УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-155-166

ОБОБЩЁННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАДИУСОВ КРУПНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ В ПРОЦЕССЕ ИХ ИСПАРЕНИЯ И КОНДЕНСАЦИИ

М.К. Кузьмин
Московский государственный областной университет
141014, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Московская область, Российская Федерация

Аннотация. Довольно общей постановкой задачи с целью изучения нестационарного процесса испарения (роста) аэрозольной капли сферической формы получены обобщения известных для скорости изменения радиуса капли формул, применяемых для квазистационарного и нестационарного процессов испарения (роста) капли. Полученные формулы по сравнению с названными формулами позволяют учитывать ряд дополнительных факторов, влияющих на скорость изменения радиуса капли. В их числе: кривизна поверхности капли, коэффициент поверхностного натяжения, начальная разница температур у поверхности капли, коэффициенты теплопроводности и температуропроводности парогазовой смеси, удельная теплота фазового перехода вещества капли, скачки концентрации и температуры, следовательно, и коэффициент испарения вещества капли. Проведён численный анализ полученных формул рассмотрением нестационарного процесса испарения капель воды. В частности, при этом сделан вывод о том, что границы применимости скачков концентрации и температуры при определённых значениях коэффициента испарения могут быть расширены на более крупные капли воды, чем это было до сих пор.

Ключевые слова: аэрозольная капля, нестационарное испарение, скачки концентрации и температуры, обобщение формул скорости изменения радиуса.

GENERALIZED FORMULAE FOR THE RATE OF CHANGE IN THE RADII OF LARGE AEROSOL DROPLETS IN THE PROCESS OF EVAPORATION AND CONDENSATION

M. Kuzmin
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Annotation. A rather general formulation of the problem in the study of the unsteady evaporation (growth) of a spherical aerosol droplet has been used to obtain generalizations of the formulae known for the rate of change in the droplet radius, used for quasi-stationary and non-stationary evaporation (growth) of the droplet. In comparison with the mentioned formulae, the formulae obtained make it possible to take into account a number of additional factors affecting the rate of change in the droplet radius. These factors include the curvature of the droplet surface,

© CC BY М.К. Кузьмин, 2018.

the surface tension coefficient, the initial temperature difference at the droplet surface, the thermal conductivity and thermal diffusivity of the vapor-gas mixture, the specific heat of the phase transition of the droplet substance, the concentration and temperature jumps, and the evaporation coefficient of the droplet substance. The formulae obtained are analyzed numerically by considering the unsteady process of evaporation of water droplets. In particular, it is concluded that the limits of applicability of concentration and temperature jumps at certain values of the evaporation coefficient can be extended to larger water droplets than it has been so far.

Key words: aerosol droplet, unsteady evaporation, concentration and temperature jumps, generalization of formulae for the radius change rate.

Введение

Изучение процессов испарения и конденсации имеют значительный теоретический и практический интерес. При этом не меньший интерес у исследователей вызывают процессы испарения и конденсационного роста аэрозольных капель. Это подтверждается большим числом публикуемых теоретических и экспериментальных работ [1–6]. Как отмечал Н.А. Фукс в своей работе [7], изданной ещё в 1958 г., что теория этого явления очень сложна. Это объясняется тем, что в реальных условиях эти процессы являются нестационарными, и скорость их протекания зависит от большого числа факторов.

Основоположником теории испарения капель в газообразной среде был Максвелл [7]. Он рассмотрел простейший случай стационарного испарения сферической капли, неподвижной по отношению к бесконечно протяжённой однородной среде. При этом Максвелл принял, что концентрация пара у поверхности капли равна концентрации насыщенного при температуре капли пара. Это предположение справедливо при радиусе капли, значительно превышающем длину свободного пути молекул пара, то есть для «крупных капель». Максвелл получил формулу для скорости испарения капель, согласно которой эта скорость полностью определяется скоростью диффузии пара в окружающей среде. Это, так называемый, диффузионный режим испарения. Следствием из формулы Максвелла является формула для скорости изменения радиуса капли в квазистационарном режиме испарения (или роста) капли [7]. Как сказано в работе Н.А. Фукса [7], в последующем в эти формулы вносились поправки, учитывающие влияние различных первоначально исключённых факторов. В этой же работе решением нестационарного уравнения диффузии получена формула для скорости изменения радиуса капли в нестационарном режиме испарения [7].

В настоящей статье рассматривается иной путь обобщения указанных формул для скорости изменения радиуса капли. С самого начала выбирается довольно общий подход к постановке задачи, которая включает в себя систему нестационарных уравнений диффузии и теплопроводности среды с надлежащими начальными и граничными условиями. С помощью последних учитываются, например, скачки концентрации и температуры вблизи поверхности капли. Поскольку некоторые из коэффициентов скачков концентрации и температуры зависят от коэффициента испарения вещества капли, то при этом происходит учёт и коэффициента испарения. Также с самого начала вводятся в рассмотрение уравнения, позволяющие учитывать влияние кривизны поверхности капли и коэффициентов поверхностного натяжения и удельной теплоты фазового перехода.

Постановка задачи

Рассмотрим нестационарный процесс диффузионного режима испарения (концентрационного роста) неподвижной аэрозольной капли сферической формы радиуса R, находящейся в бинарной (парогазовой) смеси, первый компонент которой образован молекулами вещества капли, а второй компонент – молекулами несущего газа, неиспытывающего фазового перехода в рассматриваемом интервале температур.

Пусть распределение (относительной) концентрации пара c_1 и температура парогазовой смеси T удовлетворяют следующей системе уравнений с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial c_1}{\partial r}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{2}$$

$$c_1\left(r,t\right)\Big|_{t=0} = c_{10},\ c_1\left(r,t\right)\Big|_{r\to\infty} = c_{1\infty} = c_{10}, \tag{3}$$

$$T\left(r,t\right)\Big|_{t=0} = T_0,\ T\left(r,t\right)\Big|_{r\to\infty} = T_\infty = T_0, \tag{4}$$

$$Dnm_1q\frac{\partial c_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}, \tag{5}$$

где r – радиальная координата сферической системы координат с началом в центре капли, t – время. В нестационарные уравнения диффузии и теплопроводности, то есть в уравнения (1), (2) соответственно, входят: $D = nm_2D_{12}/\rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси; $n = n_1 + n_2$; n_1, m_1 и n_2, m_2 – концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно; ρ_e и a – соответственно плотность и температуропроводность бинарной смеси.

Отметим, что соотношение (5) выражает условие непрерывности радиального потока тепла через поверхность капли. В левой части его учитывается теплота, идущая на фазовый переход, пропорциональная величине q – удельной теплоте испарения вещества капли, в правую часть входит κ – коэффициент теплопроводности парогазовой смеси.

Пусть $T_s = T_s(t)$ – температура поверхности капли, $n_1(T_s)$ – концентрация насыщенных паров вещества капли у её поверхности при указанной температуре. Введём ещё обозначения

$$c_{1s}(t) = c_1(T_s) = n_1(T_s)/n,$$

$$T_s(t)\big|_{t=0} = T_{s0},\ c_{1s}(t)\big|_{t=0} = c_{1s0}. \tag{6}$$

Для того чтобы получить выражение, определяющее концентрацию насыщенных паров вещества капли над сферической поверхностью, используем приближенные уравнения Кельвина (Томсона)

$$c_{1s}(t) = \overline{c}_{1s}(t)(1 + k_\sigma / R) \tag{7}$$

и Клапейрона – Клаузиуса

$$\overline{c}_{1s}(t) = \overline{c}_{1s0}\left\{1 + k_q\left[T_s(t) - T_{s0}\right]\right\}, \tag{8}$$

соответственно. Следует отметить, что последнее уравнение справедливо лишь при малом изменении температуры поверхности капли. В уравнениях (7), (8) черта над буквой означает концентрацию насыщенных паров вещества капли над поверхностью, имеющей пренебрежимо малую кривизну при её температуре, то есть

$$\overline{c}_{1s}(t) = c_1(T_s),\ \overline{c}_{1s0} = \overline{c}_{1s}(t)\big|_{t=0}.$$

Исключив из уравнений (7), (8) функцию $\overline{c}_{1s}(t)$, получим искомую формулу

$$c_{1s}(t) = \overline{c}_{1s0}(1 + k_\sigma / R)\left\{1 + k_q\left[T_s(t) - T_{s0}\right]\right\}, \tag{9}$$

где

$$k_\sigma = \frac{2m_1\sigma}{kT_{s0}\rho_i},\quad k_q = \frac{qm_1 - kT_{s0}}{kT_{s0}^2},$$

σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ_i – плотность вещества капли, k – постоянная Больцмана.

Отметим, что

$$c_{1s0} = \overline{c}_{1s0}(1 + k_\sigma / R). \tag{10}$$

Из выражения для k_σ следует, что концентрация насыщенных паров над поверхностью сферической капли существенно зависит от отношения σ/R, поэтому важность учета коэффициента поверхностного натяжения возрастает с уменьшением радиуса капли.

На скорость испарения (конденсационного роста) аэрозольных капель определённых размеров может оказывать существенное влияние слой Кнудсена вокруг капли [7]. Это влияние можно учитывать с помощью следующих граничных условий [8]

$$\left[c_1(r,t) - c_{1s}(t)\right]_{|r=R} = \left(K_c^{(c)}\frac{\partial c_1}{\partial r} + K_c^{(T)}\frac{1}{T_{s0}}\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{|r=R}, \tag{11a}$$

$$\left[T(r,t)-T_s(t)\right]_{|r=R}=\left(K_T^{(T)}\frac{\partial T}{\partial r}+K_T^{(c)}T_{s0}\frac{\partial c_1}{\partial r}\right)_{|r=R}. \qquad (11б)$$

Разности $\left[c_1(r,t)-c_{1s}(t)\right]_{|r=R}, \left[T(r,t)-T_s(t)\right]_{|r=R}$ называются соответственно скачками концентрации и температуры. Входящие в (11а), (11б) выражения $c_1(r, t)$ и $T(r, t)$ дают значения относительной концентрации первого компонента бинарной смеси и температуру вне слоя Кнудсена.

Коэффициенты $K_c^{(c)}$, $K_c^{(T)}$, $K_T^{(T)}$, $K_T^{(c)}$ называют газокинетическими коэффициентами скачков концентрации и температуры. Заметим, что часто вместо этих коэффициентов скачков концентрации и температуры удобнее использовать их составные коэффициенты

$$\chi_c=K_c^{(c)}-\frac{\gamma}{\kappa T_{s0}}K_c^{(T)},\ \ \chi_T=K_T^{(T)}-\frac{\kappa T_{s0}}{\gamma}K_T^{(c)},$$

где $\gamma = Dnm_1q$. Обращение в нуль составного коэффициента χ_c, или χ_T означает отсутствие соответствующего скачка.

При проведении численного анализа физических величин, зависящих от коэффициентов скачков концентрации и температуры, будем использовать выражения для коэффициентов скачков концентрации и температуры, приведённые в монографии [8], где они получены для случая бинарной газовой смеси обобщением подхода Лоялки, предложенного в работе [9] для однокомпонентного газа.

Отметим что газокинетические коэффициенты $K_c^{(c)}$, $K_T^{(c)}$ зависят от коэффициента испарения вещества капли, а коэффициенты $K_c^{(T)}$, $K_T^{(T)}$ не зависят от него.

Итак, соотношениями (1) – (6), (9) (11а) – (11б) выписаны все основные уравнения, начальные и граничные условия задачи.

Метод решения задачи. Выражения для скорости изменения радиуса капли при больших значениях времени

Для того чтобы получить выражение для скорости изменения радиуса капли, согласно работе [7], надо иметь выражение $(\partial c_1/\partial r)_{|r=R}$. Тогда

$$\frac{dR}{dt}=\frac{Dnm_1}{\rho_i}\frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R}. \qquad (12)$$

При решении систем нестационарных уравнений вида (1) и (2), обычно применяют интегральное преобразование Лапласа [10]. Как известно, преобразование Лапласа L устанавливает следующую связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$, где p – комплексный параметр:

$$F(p)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

В нашем случае от неизвестных функций-оригиналов мы должны перейти к следующим функциям-изображениям:

$$S(r,p)=L\{c_1(r,t)\},\ \Theta(r,p)=L\{T(r,t)\},$$

$$S_s(p)=L\{c_{1s}(t)\},\ \Theta_s(p)=L\{T_s(t)\}.$$

В настоящей статье нас интересует первая из этих функций, то есть функция-изображение $S(r, p)$. Следуя изложенной в работе [11] процедуре отыскания изображений и учитывая вид формул (9) и (10), имеем

$$S(r,p)=\frac{c_{10}}{p}-\frac{\varepsilon_{cT}\kappa p_2}{k_{q\sigma}p_1+\kappa p_2+g_\chi p_1 p_2}\frac{R}{r}\exp\left(-r_c\sqrt{p}\right), \tag{13}$$

где

$$\varepsilon_{cT}=\varepsilon_c-c_{1s0}k_q\varepsilon_T,\ \varepsilon_c=c_{10}-\overline{c}_{1s0}\left(1+k_\sigma/R\right),\ \varepsilon_T=T_0-T_{s0},$$

$$k_{q\sigma}=\gamma k_q\overline{c}_{1s0}\left(1+k_\sigma/R\right),\quad g_\chi=k_{q\sigma}\chi_T+\kappa\chi_c$$

$$p_1=\sqrt{p/D}+1/R,\ p_2=\sqrt{p/a}+1/R,\ r_c=(r-R)/\sqrt{D},$$

ε_T будем называть начальной разницей температур у поверхности капли (разность температур внешней и внутренней сторон слоя Кнудсена).)

Нужное нам выражение $(\partial c_1/\partial r)_{|r=R}$ можно найти с помощью обратного преобразования Лапласа. Так как

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R}=L^{-1}\left\{\frac{\partial S}{\partial r}_{|r=R}\right\},$$

то необходимо иметь выражение для изображения $(\partial S/\partial r)_{|r=R}$. По выражению (13) находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_{|r=R}=\frac{\varepsilon_{cT}\kappa p_1 p_2}{p\left(k_{q\sigma}p_1+\kappa p_2+g_\chi p_1 p_2\right)}. \tag{14}$$

Выбор формул для отыскания оригинала дроби (14) зависит от вида простейших дробей, на которые разлагается эта дробь. Рассмотрим выражение в скобках знаменателя дроби (14). Обозначив $\sqrt{p}$ через z, приходим к квадратному трёхчлену

$$g_\chi z^2+\left(k_{q\sigma}\sqrt{a}+\kappa\sqrt{D}+g_\chi\left(\sqrt{D}+\sqrt{a}\right)/R\right)z+\left(k_{q\sigma}+\kappa+g_\chi/R\right)\sqrt{Da}/R.$$

Корни z_1, z_2 этого трёхчлена действительны и различны, ибо для большинства жидкостей (вода, спирты, эфиры) при температурах поверхности капли ниже температуры их кипения дискриминант больше нуля. Таким образом, знаменатель выражения (14) можно представить в виде

$$\frac{g_\chi}{\sqrt{Da}}p\left(\sqrt{p}-\beta_1\right)\left(\sqrt{p}-\beta_2\right),$$

где $\beta_1 = -z_1$, $\beta_2 = -z_2$. В таком случае, разложив (14) на сумму соответствующих простейших дробей, для нахождения оригинала можно воспользоваться надлежащими формулами из таблицы обратных преобразований Лапласа [10] и получить

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R} = \varepsilon_{cT}\kappa\left[\frac{1}{R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi}+\sum_{j=1}^{2}C\left(\beta_j\right)\varphi\left(\beta_j,t\right)\right],$$

где

$$C\left(\beta_j\right)=\frac{R^2\beta_j^2-R\left(\sqrt{D}+\sqrt{a}\right)\beta_j+\sqrt{Da}}{R^2g_\chi\beta_j^2-\sqrt{Da}\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]},$$

$$\varphi\left(\beta_j,t\right)=\exp\left(\beta_j^2t\right)\cdot erfc\left(\beta_j\sqrt{t}\right).$$

Асимптотическое разложение функции $\varphi(\beta_j, t)$ при больших значениях t можно представить в виде

$$\varphi\left(\beta_j,t\right)=\frac{1}{\beta_{j\sqrt{\pi t}}}\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\left(-1\right)^l\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(2l-1\right)}{\left(2\beta_j^2t\right)^l}\right].$$

Взяв приближение $\varphi\left(\beta_j,t\right)\approx1/\left(\beta_j\sqrt{t}\right)$, получим соответствующее приближение

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}_{|r=R}\approx\frac{\varepsilon_{cT}\kappa}{R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi}\left\{1+\frac{R^2\left(k_{q\sigma}\sqrt{D}+\kappa\sqrt{a}\right)}{\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]\sqrt{\pi Dat}}\right\} \qquad (15)$$

при больших значениях t.

Мы рассматриваем процесс медленного испарения капли, то есть масса капли значительно больше массы вещества, испарившегося с поверхности капли за время исследуемого процесса. В таком случае допустимо в постановке задачи и в проведённых до сих пор выкладках радиус капли считать постоянной величиной. В реальном процессе испарения радиус капли изменяется со временем и $dR/dt < 0$.

Из соотношений (12), (15) получаем приближенные выражения для скорости изменения радиуса капли при больших значениях времени:

$$\frac{dR}{dt}\approx\frac{\varepsilon_{cT}Dnm_1\kappa}{\rho_i\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]}\left\{1+\frac{R^2\left(k_{q\sigma}\sqrt{D}+\kappa\sqrt{a}\right)}{\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]\sqrt{\pi Dat}}\right\}. \qquad (16)$$

Из (16) выделяются следующие формулы для скорости изменения радиуса капли

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\infty 0}=\frac{\varepsilon_{cT}Dnm_1\kappa}{\rho_i\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]},\tag{17}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\infty 1}=\frac{\varepsilon_{cT}Dnm_1\kappa}{\rho_i\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]}\left\{1+\frac{R^2\left(k_{q\sigma}\sqrt{D}+\kappa\sqrt{a}\right)}{\left[R\left(k_{q\sigma}+\kappa\right)+g_\chi\right]\sqrt{\pi Dat}}\right\}.\tag{18}$$

Анализ формул для скорости изменения радиуса капли

Проведём анализ выражений, находящихся в правых частях формул (17) и (18).

Формулы (17) и (18) являются обобщениями хорошо известных в теории квазистационарного и нестационарного процессов испарения (конденсационного роста) крупных аэрозольных капель формул [7]. В наших обозначениях их можно представить так:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(qs)}=\frac{\left(c_{10}-\overline{c}_{1s0}\right)Dnm_1}{\rho_i R},\tag{19}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(ns)}=\frac{\left(c_{10}-\overline{c}_{1s0}\right)Dnm_1}{\rho_i R}\left(1+\frac{R}{\sqrt{\pi Dat}}\right).\tag{20}$$

Формула (17) по сравнению с формулой (19) позволяет учитывать ряд дополнительных факторов, влияющих на скорость изменения радиуса капли. Перечислим их: кривизна поверхности капли, коэффициент поверхностного натяжения, начальная разница температур у поверхности капли, коэффициент теплопроводности парогазовой смеси, удельная теплота фазового перехода вещества капли, скачки концентрации и температуры, следовательно, и коэффициент испарения капли. Кроме перечисленных факторов в формуле (18) в отличие от формулы (20) учитывается ещё коэффициент температуропроводности среды.

Как уже было сказано, формулы (19), (20) были выведены для крупных капель. Поэтому при сравнении формул из пары (17), (18) с соответствующей формулой из пары (19), (20) следует выяснить значимость определённых выражений из последней пары формул при различных размерах капель.

Проведём численный анализ некоторых величин, входящих в формулы (17) и (18). Для этого будем рассматривать нестационарный процесс испарения одиночных капель воды разных размеров в воздушную среду 50% влажности (наиболее реальный случай) при двух значениях температуры 293 *К*, 323 *К*, когда давление среды $P = 0{,}1$ *МПа*. При этом, основываясь на данных, приведённых в книге [12], для коэффициента испарения воды α при указанных выше температурах среды полагаем соответственно 0,034 и 0,026. Заметим, что эти значения коэффициента испарения воды сильно отличаются от единицы, поэтому численные значения зависящих от α коэффициентов скачков концентрации и температуры $K_c^{(c)}$, $K_T^{(c)}$, вычисленные при указанных здесь значениях α будут отличаться от значений коэффициентов скачков концентрации и температуры, вычисляемых часто при $\alpha = 1$. Повышение порядка величин $K_c^{(c)}$, $K_T^{(c)}$ должно привести к некоторому расширению границ применимости теории нестационарного процесса испарения аэрозольных капель, в которой учитываются скачки концентрации и температуры, на более крупные капли воды, чем до сих пор предполагалось.

Для процесса испарения капель необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_c = c_{10} - \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right) < 0.$$

Из соотношений (17), (18) видно, что для процесса испарения должно выполняться ещё условие $\varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0} k_q \varepsilon_T < 0$.

Приведём таблицу значений интересующих нас величин, не зависящих от радиуса капли при двух значениях температуры (см. табл. 1).

Таблица 1.
Зависимость величин k_q, σ, k_σ, κ, α, χ_c, χ_T от температуры

T, K	$k_q \cdot 10^1$, K^{-1}	$\sigma \cdot 10^1$, Н/м	$k_\sigma \cdot 10^9$, м	$\kappa \cdot 10^1$, Вт/(мК)	$\alpha \cdot 10^1$	$\chi_c \cdot 10^6$, м	$\chi_T \cdot 10^6$, м
293	0,59	0,73	1,08	0,26	0,34	4,85	2,09
323	0,47	0,68	0,92	0,28	0,26	8,45	2,32

Проведём численный анализ величин, составляющих выражение $R(k_{q\sigma} + \kappa) + g_\chi$, где $k_{q\sigma} = \gamma k_q \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right)$. Для этого приведём таблицу значений величин, зависящих от радиуса капли (см. табл. 2).

Таблица 2.
Зависимость величин $k_{q\sigma}$, g_χ от радиуса капли
при двух различных значениях температуры

T, K	R, м	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
293	$k_{q\sigma} \cdot 10^1$, Вт/(мК)	0,6977	0,6365	0,6304	0,62971	0,62970
	$g_\chi \cdot 10^7$, Вт/К	1,3931	1,3802	1,3789	1,37881	1,37880
323	$k_{q\sigma} \cdot 10^1$, Вт/(мК)	3,1223	2,8853	2,8616	2,8593	2,8590
	$g_\chi \cdot 10^7$, Вт/К	3,1316	3,0765	3,0710	3,07044	3,07039

Так как k_σ/R значительно меньше единицы при $R \gg 10^{-7}$ м, то учет кривизны поверхности капли и поверхностного натяжения может оказывать влияние на скорость испарения капель воды только для капель, радиусы которых $R < 10^{-7}$ м, то есть для мелких капель. Разница значений величины k_σ при рассматриваемых значениях температуры незначительна, на ее значение существенное влияние оказывает обратно пропорциональная зависимость от плотности вещества капли. Если же $R \geq 10^{-7}$ м, то замена величины $k_{q\sigma}$ на произведение $\gamma k_q \overline{c}_{1s0}$ не приведет к большой ошибке.

Пользуясь численными значениями величин, представленных таблицами 1 и 2, можно убедиться в том, что $R(k_{q\sigma} + \kappa) \approx g_\chi$ при $R \approx 10^{-7}$ м. Капля воды радиуса $R = 0{,}7 \cdot 10^{-5}$ м относится к крупным. Для такой капли при $T = 293$ K имеем $R(k_{q\sigma} + \kappa) \approx 6{,}23 \cdot 10^{-6}$ Вт/К. Это значение всего в 4,5 раза превышает соответствующее значение величины g_χ, и пренебрегать при этом значением последней величины не следует. Этот пример показывает, что учёт скачков концентрации и температуры получает расширение границы применимости при определённых значениях коэффициента испарения.

С учётом выше сказанного, для крупных частиц можно использовать следующие обобщённые формулы для скорости изменения радиуса капли в процессе испарении (роста):

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\infty 0}^{(qs)} = \frac{\overline{\varepsilon}_{cT} D n m_1 \kappa}{\rho_i \left[R\left(\overline{\gamma}_q + \kappa\right) + g_\chi \right]}, \tag{21}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\infty 1}^{(ns)} = \frac{\overline{\varepsilon}_{cT} D n m_1 \kappa}{\rho_i \left[R\left(\overline{\gamma}_q + \kappa\right) + g_\chi \right]} \left\{ 1 + \frac{R^2 \left(\overline{\gamma}_q \sqrt{D} + \kappa \sqrt{a} \right)}{\left[R\left(\overline{\gamma}_q + \kappa\right) + g_\chi \right] \sqrt{\pi D a t}} \right\}, \tag{22}$$

где $\overline{\varepsilon}_{cT} = c_{10} - \overline{c}_{1s0}\left[1 + k_q\left(T_0 - T_{s0}\right)\right]$, $\overline{\gamma}_q = \gamma k_q \overline{c}_{1s0}$.

Если не учитывать теплоту фазового перехода вещества капли, то есть положить $q = 0$, то $\overline{\gamma}_q = 0$. Если совсем не учитывать влияние слоя Кнудсена вокруг капли в виде скачков концентрации и температуры, то $g_\chi = 0$ и $T_0 - T_{s0} = 0$. Таким образом, из формул (21) и (22) получим соответственно формулы (19) и (20).

Статья поступила в редакцию 30.08.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
2. Захаревич А.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Экспериментальное исследование изменения температуры в центре капли воды в процессе ее испарения в разогретом воздухе // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 3. С. 537–541.
3. Кузнецов Г.В., Куйбин П.А., Стрижак П.А. Оценка численных значений констант испарения капель воды, движущихся в потоке высокотемпературных газов // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. Вып. 2. С. 264–269.
4. Пискунов М.В., Стрижак П.А. Отличие условий и характеристик испарения неоднородных капель воды в высотемпературной газовой среде // Журнал технической физики. 2016. № 9. С. 24–31.
5. Хасанов А.С. Решение задачи об испарении двух капель операторными методами для любых радиусов капель и любых расстояний между ними // Вестник Московского

государственного областного университета. Серия Физика-Математика. 2018. № 2. С. 51–60.
6. О диффузионном испарении (сублимации) крупной аэрозольной частицы при значительных перепадах температуры в ее окрестности / Щукин Е.Р., Малай Н.В., Шулиманова З.Л., Уварова Л.А. // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. Вып. 4. С. 561–568.
7. Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Издательство АН СССР, 1958. 91 с.
8. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
9. Loyalka S.K. Approximate method in the kinetic theory // The Physics of Fluids. 1971. Vol. 14. No. 11. P. 2291–2294.
10. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
11. Яламов Ю.И., Кузьмин М.К. Скорость нестационарного испарения сферической капли с учетом скачков концентрации и температуры вблизи ее поверхности // Журнал технической физики, 2005. Т. 75/ Вып. 3. С. 30–35.
12. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. М.: Химия, 1972. 304 с.

REFERENCES

1. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Prognostic determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gaseous media with different temperatures]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
2. Zakharevich A.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Experimental study of the temperature change in the center of a drop of water during its evaporation in heated air]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 3, pp. 537–541.
3. Kuznetsov G.V., Kuibin P.A., Strizhak P.A. [Estimation of the numerical values of the evaporation constants of water droplets moving in a flow of high-temperature gases]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 2, pp. 264–269.
4. Piskunov M.V., Strizhak P.A. [Difference in the conditions and characteristics of evaporation of inhomogeneous water drops in a high-temperature gaseous medium]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2016, no. 9, pp. 24–31.
5. Khasanov A.S. [The solution of the evaporation problem of two drops by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 2, pp. 51–60.
6. Shchukin E.R., Malai N.V., Shulimanova Z.L., Uvarova L.A. [Diffuse vaporization (sublimation) of a large aerosol particle under precipitous changes in the ambient temperature]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 4, pp. 561–568.
7. Fuks N.A. Evaporation and droplet growth in gaseous medium. Oxford, Pergamon Press, 1959.
8. Galoyan V.S., Yalamov Yu.I. *Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh* [Dynamics of droplets in an inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis Publ., 1985. 208 p.

9. Loyalka S.K. Approximate method in the kinetic theory. In: *The Physics of Fluids*, 1971, vol. 14, no. 11, pp. 2291–2294.
10. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniya* [Handbook on the practical use of Laplace transforms and Z-transforms]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 288 p.
11. Yalamov Yu.I., Kuz'min M.K. [Rate of unsteady of a spherical drop with regard to concentration and temperature discontinuities at its surface]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2005, vol. 75, no. 3, pp. 30–35.
12. Amelin A.G. *Teoreticheskie osnovy obrazovaniya tumana pri kondensatsii para* [The theoretical basis for the formation of fog in the condensation of vapor]. Moscow, Khimiya Publ., 1972. 304 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: lesir179@infoline.su

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Mikhail K. Kuzmin – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: lesir179@infoline.su

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузьмин М.К. Обобщённые формулы для скорости изменения радиусов крупных аэрозольных капель в процессе их испарения и конденсации // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 4. С. 155–166.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-155-166

FOR CITATION

Kuzmin M.K. Generalized formulae for the rate of change in the radii of large aerosol droplets in the process of evaporation and condensation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 155-166.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-155-166