УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-140-149

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКРОПАРАМЕТРОВ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ КУЭТТА МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ СКОРОСТЕЙ

Попов В.Н., Латухина Е.А.
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
163002, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, д. 17, Российская Федерация

Аннотация. С использованием аналитического метода дискретных скоростей построено решение задачи о течении Куэтта. Эволюция газа описана с использованием Бхатнагар, Гросс, Крук модели уравнения Больцмана. Описание взаимодействия молекул газа со стенками канала выполнено с использованием модели зеркально-диффузного отражения Максвелла. Предложен алгоритм для нахождения макропараметров газа и приведены полученные на его основе результаты. Проведена верификация полученных результатов

Ключевые слова: течение Куэтта, метод дискретных скоростей, модели уравнения Больцмана

THE CALCULATION OF THE MACROPARAMETERS OF A RAREFIED GAS IN THE PROBLEM OF COUETTE FLOW BY THE DISCRETE VELOCITY METHOD

V. Popov, E. Latukhina
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Naberezhnaya Severnoi Dvini 17, 163002 Arkhangelsk, Russian Federation

Abstract. By the using the analytical method of discrete velocities, the solution of the Couette flow problem is constructed. Gas evolution is described using the Bhatnagar–Gross–Krook model of the Boltzmann equation. The interaction of gas molecules with the channel walls is described using the Maxwell mirror-diffuse reflection model. The algorithm for finding the macroparameters of the gas is proposed. The results obtained on its basis are presented. The obtained results are verified.

Key words: Couette flow, discrete velocity method, model kinetic equations, models of Boltzmann equation.

Введение

Разработка и применение микро и наноразмерных устройств, а также их комплектующих, таких как микрокулеры, микронасосы, микротурбины и т.д., потребовали проведения фундаментальных исследований, направленных на выявление особенностей протекающих в них процессов [5; 8]. В силу миниатюрности исследуемых устройств, применение экспериментальных исследований в данной предметной области крайне затруднено, а чаще всего невозможно. Учитывая это обстоятельство, особое значение приобретают методы математического моделирования. Сложность применения методов математического моделирования к описанию процессов переноса в микро- и наноканалах технических устройств обусловлена широким диапазоном степени разреженности газа, в котором работает большая часть такого рода устройств. Это обстоятельство приводит к необходимости использования различных моделей течения газа для различных режимов течения с последующим их согласованием или к применению универсальных подходов, способных описать все режимы течения [5]. К таким универсальным подходам относится моделирование течений газа на основе уравнения Больцмана или модельных кинетических уравнений. Их численному решению посвящено значительное число работ, ссылки на которые можно найти в [1; 2; 4]. Среди предложенных методов можно выделить метод дискретных скоростей [9]. Суть этого метода заключается в построении дискретного аналога исходного уравнения в пространстве скоростей. При этом вычисление интеграла столкновений в узлах выбранной сетки сводится к его замене соответствующим образом выбранной квадратурной формулы [1]. Модификация метода дискретных скоростей, так называемый аналитический метод дискретных скоростей, представляющий собой дискретный аналог метода Кейза [3], представлен в [7; 10–12]. Цель представленной работы заключается в разработке алгоритма реализации аналитического метода дискретных скоростей и его использования в задаче о течении Куэтта.

Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим течение разреженного газа в канале, стенки которого движутся со скоростями **u** и $-$**u** в плоскостях $x' = \pm a'$ декартовой системы координат. Предположим, что ось Oz' направлена в сторону движения верхней стенки канала. Тогда исходная модель уравнения Больцмана записывается в виде [6]

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathrm{v}_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta}(f_{eq} - f). \tag{1}$$

В случае, когда $|\mathbf{u}/\mathbf{c}| \ll 1$, где $\mathbf{c}$ – скорость звука в газе, задачу можно рассмотреть в линеаризованном виде, представив функцию распределения в виде

$$f(x', y', \mathbf{v}) = n_0(\beta/\pi)^{3/2}[1 + C_z Z(x; C_x)]. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$, $x = x'/l_g$, $z = z'/l_g$, $\beta = m/2k_BT_0$, $l_g = \beta\eta/p$. Принимая во внимание вид граничного условия Максвелла

$$f^+(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) = (1-\alpha) f^-(\mathbf{r}_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{nv})) + \alpha f(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) \tag{3}$$

и подставляя (2) в (1) и (3), приходим к уравнению для нахождения $Z(x;\, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\tau) Z(x, \tau) d\tau, \tag{4}$$

$$Z(\pm a, \mp\mu) = (1-\alpha)Z(\pm a, \pm\mu) \pm \alpha, \ \ \mu > 0. \tag{5}$$

Здесь $x \in [-a; a]$, $\mu \in (-\infty; +\infty)$, $\Psi(\tau) = \exp(-\tau^2)/\sqrt{\pi}$. Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\tau) Y(x,\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0} \Psi(\tau) \underset{\tau\to-\tau}{Y(x,\tau)} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \Psi(\tau) Y(x,\tau) d\tau =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \Psi(\tau) Y(x,-\tau) d\tau + \int_{0}^{+\infty} \Psi(\tau) Y(x,\tau) d\tau = \int_{0}^{+\infty} \Psi(\tau) [Y(x,\tau) + Y(x,-\tau)] d\tau,$$

уравнение (4) может быть переписано в виде

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} Z(x,\mu) + Z(x,\mu) = \int_{0}^{+\infty} \Psi(\tau) \big[Z(x,\tau) + Z(x,-\tau) \big] d\tau. \tag{6}$$

Если в уравнении (6) поменять μ на $-\mu$, приходим к уравнению

$$-\mu \frac{\partial}{\partial x} Z(x,-\mu) + Z(x,-\mu) = \int_{0}^{+\infty} \Psi(\tau) \big[Z(x,\tau) + Z(x,-\tau) \big] d\tau. \tag{7}$$

Перейдём от (6), (7) к конечно разностным уравнениям в пространстве скоростей

$$\mu_i \frac{d}{dx} Z(x,\mu_i) + Z(x,\mu_i) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \Psi(\mu_k) \big[Z(x,\mu_k) + Z(x,-\mu_k) \big]. \tag{8}$$

$$-\mu_i \frac{d}{dx} Z(x,-\mu_i) + Z(x,-\mu_i) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \Psi(\mu_k) \big[Z(x,\mu_k) + Z(x,-\mu_k) \big]. \tag{9}$$

Здесь ω_k – весовые коэффициенты квадратурной формулы, используемой при вычислении интегралов в правых частях (8) и (9). В представленной работе в качестве квадратурной формулы использовалась квадратурная формула Ньютона-Котеса по шести узлам. В этом случае,
$\omega_{m+1} = \omega_{m+6} = 19/288$, $\omega_{m+2} = \omega_{m+5} = 75/288$, $\omega_{m+3} = \omega_{m+4} = 50/288$, n, $N = 6n + 1$, $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, ..., N$. Решение (8), (9) ищем в виде

$$Y(x, \pm\mu_i) = \varphi(\nu, \pm\mu_i) \exp(-x/\nu). \tag{10}$$

Здесь ν – спектральный параметр. Подставляя (10) в (8) и (9), приходим к системе из двух матричных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\nu} \mathbf{M\Phi}_+ = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{\Phi}_+ - \mathbf{W\Phi}_- \\ -\dfrac{1}{\nu} \mathbf{M\Phi}_- = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{\Phi}_- - \mathbf{W\Phi}_+ . \end{cases}$$

Здесь $\pm = [\varphi(\nu, \pm\mu_1), \varphi(\nu, \pm\mu_2), ..., \varphi(\nu, \pm\mu_N)]^T$, символ T означает транспонирование, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{M} = \mathrm{diag}\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N\}$, $W_{ij} = \varphi_i \Psi(\mu_i)$. Складывая и вычитая уравнения полученной системы, перепишем её в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\nu}\mathbf{M}(\Phi_+ - \Phi_-) = (\mathbf{I} - 2\mathbf{W})(\Phi_+ + \Phi_-) \\ \qquad \dfrac{1}{\nu}\mathbf{M}(\Phi_+ + \Phi_-) = \Phi_+ - \Phi_- \end{cases}$$

Подставляя левую часть второго уравнения в правую часть первого, приходим к матричному уравнению

$$\frac{1}{\nu^2}\mathbf{M}^2\mathbf{U} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{W})\mathbf{U},$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_+ + \mathbf{\Phi}_-$.

Умножим обе части полученного равенства слева на $\mathbf{M}^{-1}$ и перепишем его в виде

$$\frac{1}{\nu^2}\mathbf{MU} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I} - 2\mathbf{W})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MU},$$

или

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{MU} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{MU}.$$

Здесь $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\mu_1^{-2}, \mu_2^{-2}, ..., \mu_N^{-2}\}$. Преобразуем полученное уравнение таким образом, чтобы матрица, стоящая в скобках слева, была симметричной. С этой целью умножим полученное уравнение слева на некоторую диагональную матрицу $\mathbf{T}$ и запишем его в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{D} - 2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{TMU} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{TMU},$$

или, учитывая коммутативность диагональных матриц,

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{V})\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{TWT}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{X} = \mathbf{TMU}$, $\lambda = 1/\nu^2$. Непосредственные выкладки показывают, что за счет выбора матрицы $\mathbf{T}$ можно получить

$$\mathbf{V} = \mathbf{z}\mathbf{z}^T,$$

где

$$\mathbf{z}^T = \left[\frac{\sqrt{\omega_1\Psi(\mu_1)}}{\mu_1},\ \frac{\sqrt{\omega_2\Psi(\mu_2)}}{\mu_2},\ \dots,\ \frac{\sqrt{\omega_N\Psi(\mu_N)}}{\mu_N}\right].$$

Таким образом, отыскание значений спектрального параметра ν, входящего в выражение (10), сведено к нахождению собственных значений матрицы системы уравнений (11). Так как матрица системы уравнений (11) симметрична, то её собственные значения действительны и различны. Для их нахождения в работе использован алгоритм Хаусхолдера, который позволил перейти от симметричной матрицы к трёхдиагональной. Отыскание собственных значений последней было выполнено с использованием *QL*-алгоритма с неявными сдвигами.

Для нахождения функций $Z(x, \pm\mu_k)$ в уравнениях (8) и (9) воспользуемся условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\tau) Z(x,\tau) \mathrm{d}\tau = 1,$$

или, с учётом выбора квадратурной формулы, используемой в (8) и (9)

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_k \Psi(\mu_k)[Z(x,\mu_k) + Z(x,-\mu_k)] = 1. \tag{12}$$

Подставляя (10) в (8) и (9) с учётом (12), находим

$$\varphi(\nu,\mu_i) = \frac{\nu}{\nu-\mu_i},\ \ \varphi(\nu,-\mu_i) = \frac{\nu}{\nu+\mu_i}.$$

Решения уравнений (8) и (9) запишем в виде линейной комбинации построенных решений

$$Z(x,\pm\mu_i) = \sum_{j=1}^{N}\left[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \mu_i} \exp\left(-\frac{x+a}{\nu_j}\right) + B_j \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \mu_i} \exp\left(-\frac{x-a}{\nu_j}\right)\right]. \tag{13}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что константа A и функции $B(x\mp\mu_i)$ также являются решениями уравнений (8) and (9). Таким образом, общие решения уравнений (8) и (9) записываются в виде

$$Z(x,\pm\mu_i) = A + B(x \mp \mu_i) +$$
$$+\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \mu_i} \exp\left(-\frac{x+a}{\nu_j}\right) + B_j \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \mu_i} \exp\left(-\frac{x-a}{\nu_j}\right)\right]. \tag{14}$$

В силу условия (12) значения спектрального параметра ν стремятся к нулю при бесконечном возрастании N и, как следствие, отвечающие им частные решения в (14) и не вносят вклада в $Z(x, \pm\mu_k)$. С учётом этого при записи (14) исключили частные решения, которые отвечают минимальному из найденных значений спектрального параметра. Подставляя построенное решение в граничные условия (5), приходим к системе линейных уравнений, из которой находим коэффициенты A, B, A_j и B_j

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\{M_{ij}A_j + N_{ij}B_j \exp(-2a/\nu_j\right\} + \alpha A - B[\alpha a + \mu_i(2-\alpha)] = \alpha,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\{M_{ij}B_j + N_{ij}A_j \exp(-2a/\nu_j\right\} + \alpha A + B[\alpha a + \mu_i(2-\alpha)] = -\alpha.$$

Здесь $i = 1, 2, ..., N$, $M_{ij} = \nu_j \dfrac{\alpha\nu_j + \mu_i(2-\alpha)}{\nu_j^2 - \mu_i^2}$, $N_{ij} = \nu_j \dfrac{\alpha\nu_j - \mu_i(2-\alpha)}{\nu_j^2 - \mu_i^2}$.

Решение построенной системы уравнений получено с использованием метод Гаусса с перестановкой строк. Нахождение неизвестных коэффициентов A, B, A_j и B_j завершает построение функции распределения.

Вычисление макропараметров газа в канале

Профили среднемассовой скорости газа $U(x)$ и ненулевые компоненты вектора потока тепла в направлении оси канала $q(x)$ и компоненты тензора вязких напряжений p_{xz} построим, исходя из статистического смысла функции распределения [3]

$$U(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mu^2)Z(x,\mu)\mathrm{d}\mu, \tag{17}$$

$$q(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mu^2)\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)Z(x,\mu)\mathrm{d}\mu, \tag{18}$$

$$p_{xz}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mu^2)\mu Z(x,\mu)\mathrm{d}\mu, \tag{19}$$

С учётом (14) выражения (17)-(19) примут вид:

$$U(x)=A+Bx+\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j\exp(-(a+x)/\nu_j)+B_j\exp(-(a-x)/\nu_j)\right], \tag{20}$$

$$q(x)=-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j\exp(-(a+x)/\nu_j)+B_j\exp(-(a-x)/\nu_j)\right], \tag{21}$$

$$p_{xz}=-\frac{B}{4}. \tag{22}$$

Далее, используя соотношения

$$J_M=-\frac{1}{2a^2}\int_0^a U(x)\,\mathrm{d}x,\quad J_Q=\frac{1}{2a^2}\int_0^a q(x)\,\mathrm{d}x,$$

вычисляем величину потока массы газа через половину толщины канала J_M и величину потока тепла J_Q

$$J_M=\frac{1}{2a^2}\left[Aa+\frac{Ba^2}{2}+\sum_{j=1}^{N-1}\nu_j\left(A_j\exp\left(-\frac{a}{\nu_j}\right)+B_j\right)\left[1-\exp\left(-\frac{a}{\nu_j}\right)\right]\right], \tag{23}$$

$$J_Q=-\frac{1}{4a^2}\sum_{j=1}^{N-1}\nu_j\left(A_j\exp\left(-\frac{a}{\nu_j}\right)+B_j\right)\left[1-\exp\left(-\frac{a}{\nu_j}\right)\right]. \tag{24}$$

Программная реализация для вычисления значений J_M, J_Q и p_{xz} выполнена с использованием языка программирования C++. Результаты вычислений представлены в приведённых ниже таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1.
Значения потока массы в зависимости от D и α

D	J_M (23)	BGK [11]	LBE [12]	CES [11]
$\alpha = 0.1$				
0.1	0.0481000	0.0481420	0.053191	0.0541084
1.0	0.0234597	0.0234756	0.023115	0.0231248
10.0	0.0117006	0.0117090	0.011584	0.0115560
$\alpha = 0.5$				
0.1	0.274701	0.274926		0.304586
1.0	0.1160550	0.116120		0.113676
10.0	0.0326531	0.032663		0.032447
$\alpha = 1.0$				
0.1	0.6852760	0.685750	0.72929	0.741991
1.0	0.2320940	0.232188	0.22737	0.226777
10.0	0.0422752	0.042281	0.04219	0.042142

Таблица 2.
Значения потока тепла в зависимости от D и α

D	J_Q (24)	BGK [11]	LBE [12]	CES [11]
$\alpha = 0.1$				
0.1	0.016667	0.0166805	0.0093667	0.0112938
1.0	0.004588	0.0045895	0.0032993	0.0043489
10.0	0.000199	0.0001989	0.0001773	0.00017913
$\alpha = 0.5$				
0.1	0.0916496	0.0917172		0.0622276
1.0	0.0199709	0.0199715		0.0181577
10.0	0.0004304	0.0004299		0.0003641
$\alpha = 1.0$				
0.1	0.212179	0.212309	0.11892	0.144794
1.0	0.0313699	0.0313629	0.022451	0.0269864
10.0	0.0003630	0.0003625	0.000307	0.0002860

Таблица 3.
Значения тензора вязких напряжений в зависимости от D и α

D	p_{xz} (22)	BGK [11]	LBE [12]	CES [11]
$\alpha = 0.1$				
0.1	0.029532	0.0295618	0.0295533	0.0295505
1.0	0.0285651	0.0285930	0.028527	0.0285847
10.0	0.0226044	0.0226221	0.0226781	0.0226813

D	p_{xz} (22)	BGK [11]	LBE [12]	CES [11]
$\alpha = 0.5$				
0.1	0.182804	0.182984		0.182618
1.0	0.152227	0.152354		0.152351
10.0	0.0635846	0.063608		0.063975
$\alpha = 1.0$				
0.1	0.521835	0.522325	0.520868	0.520156
1.0	0.338708	0.338925	0.340502	0.339977
10.0	0.830982	0.083112	0.083510	0.083523

Как видно из приведённых таблиц, предложенная в работе модификация использованного в [8] подхода приводит к корректным значениям макропараметров газа в широком диапазоне значений толщины канала и коэффициента аккомодации. Полученные в работе результаты отличаются от аналогичных, приведённых в [11] для БГК (BGK) модели, не более, чем на 0,1%. Отличие от результатов, вычисленных в [11] и [12] с применением линеаризованного уравнения Больцмана (LBE) и модели с синтетическим ядром (CES), объясняется существенной зависимостью макропараметров газа от выбора модели интеграла столкновений [6].

Заключение

Итак, в работе на основе БГК модели кинетического уравнения Больцмана с использованием аналитического метода дискретных скоростей построено решение задачи о течении Куэтта. Описание взаимодействия молекул газа со стенками канала выполнено с использованием модели зеркально-диффузного отражения Максвелла. Выполненное сравнение полученных в работе результатов показало, что они хорошо согласуются с аналогичными результатами, представленными в открытой печати.

Статья поступила в редакцию 04.09.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Потапов А.П. Моделирование течений разреженного газа на основе решения кинетического уравнения Больцмана консервативным проекционным методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 6. С. 1008–1024.
2. Кудряшова Т.А., Подрыга В.О., Поляков С.В. Моделирование течений газовых смесей в микроканалах // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2014. № 3. 154–163.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: Московский государственный областной университет, 2004. 286 с.
4. Подрыга В.О. Многомасштабный подход к трёхмерному расчёту течений газов и их смесей в микроканалах технических систем // Доклады Академии наук. 2016. Т. 469. № 6. С. 656–658.

5. Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий: доклады V Всероссийской конференции, Новосибирск, 15–18 июня 2015 г.: в 2 т. / под ред. В.Я. Рудяка; Вып. 5. Т. 1. Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 2015. 276 с.
6. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 2008. 230 с.
7. Barichello L.B., Siewert C.E. A Discrete-Ordinates Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 1999. Vol. 50. P. 972–981.
8. Bharat B. Springer Handbook of Nanotechnology. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2017. 1500 p.
9. Nordsieck A., Hicks B.L. Monte Carlo evaluation of the Boltzmann collision integral // Rarefied Gas Dynamics, Proceedings of 5-th International Symposium. New York-London: Plenum Press, 1967. P. 695–710.
10. Siewert C.E., Garcia R.D.M., Granjean P.A Concise and Accurate Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel // Journal of Mathematical Physics. 1980. Vol. 21. P. 2760–2763.
11. Siewert C.E. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 2002. Vol. 21. P. 579–597.
12. Siewert C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. Vol. 54. P. 273–303.

REFERENCES

1. Dodulad O.I., Kloss Yu.Yu., Potapov A.P. [Simulation of rarefied gas flows on the basis of the Boltzmann kinetic equation solved by applying a conservative projection method]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1008–1024.
2. Kudryashova T.A., Podryga V.O., Polyakov S.V. [Simulation of Gas Mixture Flows in Microchannels]. In: *Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika* [RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics], 2014, no. 3, pp. 154–163.
3. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Analiticheskie resheniya granichnykh zadach dlya kineticheskikh uravnenii* [Analytical solutions of boundary-value problems for kinetic equations]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2004. 286 p.
4. Podryga V.O. [Multiscale approach to computation of three-dimensional gas mixture flows in engineering microchannels]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2016, vol. 469, no. 6, pp. 656–658.
5. Rudyak V.Ya., ed. *Fundamental'nye osnovy MEMS- i nanotekhnologii: doklady V Vserossiiskoi konferentsii, Novosibirsk, 15–18 iyunya 2015 g.: v 2 t. Vyp. 5. T. 1* [The fundamental basis of MEMS and nanotechnology: reports of the V all-Russian conference, Novosibirsk, 15-18 June 2015: in 2 volumes. Issue 5. Vol. 1]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of architecture and Civil Engineering (Sibstrin) Publ., 2015. 276 p.
6. Sharipov F.M., Seleznev V.D. *Dvizhenie razrezhennykh gazov v kanalakh i mikrokanalakh* [The motion of rarefied gases in channels and microchannels]. Yekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2008. 230 p.
7. Barichello L.B., Siewert C.E. A Discrete-Ordinates Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel. In: *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, 1999, vol. 50, pp. 972–981.
8. Bharat B. Springer Handbook of Nanotechnology. Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 2017. 1500 p.

9. Nordsieck A., Hicks B.L. Monte Carlo evaluation of the Boltzmann collision integral. In: *Rarefied Gas Dynamics, Proceedings of 5-th International Symposium*. New York, London, Plenum Press Publ., 1967. pp. 695–710.
10. Siewert C.E., Garcia R.D.M., Granjean P.A Concise and Accurate Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel. In: *Journal of Mathematical Physics*, 1980, vol. 21, pp. 2760–2763.
11. Siewert C.E. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation. In: *European Journal of Mechanics. B/Fluids,* 2002, vol. 21, pp. 579–597.
12. Siewert C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems. In: *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, 2003, vol. 54, pp. 273–303.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Попов Василий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова;
e-mail: v.popov@narfu.ru;

Латухина Екатерина Александровна – аспирант кафедры математики Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова;
e-mail: e.latukhina@narfu.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vasily N. Popov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov;
e-mail: v.popov@narfu.ru.

Ekaterina A. Latukhina – post-graduate student of the Department of Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov;
e-mail: e.latukhina@narfu.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Попов В.Н., Латухина Е.А. Вычисление макропараметров разреженного газа в задаче о течении Куэтта методом дискретных скоростей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 4. С. 140–149.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-140-149

FOR CITATION

Popov V.N., Latukhina E.A. The calculation of the macroparameters of a rarefied gas in the problem of Couette flow by the discrete velocity method. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 140–149.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-140-149