УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-82-90

ТЕОРИЯ ИСПАРЕНИЯ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Хасанов А.С.
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация

Аннотация. В данной статье задача об испарении двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель в диффузионном режиме решена операторными методами. Для времени полного испарения двух капель приведены точная и приближенная формулы.

Ключевые слова: аэрозольная капля, испарение капель, взаимодействующие капли.

EVAPORATION THEORY FOR TWO IDENTICAL INTERACTING AEROSOL DROPS ON THE BASIS OF THEORY OF LINEAR OPERATORS

A. Khasanov
Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny per. 36, 11799 7Moscow, Russian Federation

Abstract. The problem of evaporation of two identical interacting aerosol drops in diffusion mode is solved by operator methods. The exact and approximate formulas are given for the complete evaporation time of two drops.

Key words: aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops.

Введение

Задачи об испарении капель с учётом различных факторов рассматривались в целом ряде работ [1–5]. В случае твёрдых аэрозольных частиц задачи об их сублимации также рассматривались с учётом различных факторов [7; 8]. Решение задачи об испарении двух взаимодействующих аэрозольных капель с использованием бисферической системы координат приведено в работе [6]. Этот метод является достаточно сложным и имеет ограниченную область применения. Например, он неприменим для решения различных задач о двух взаимодействующих двухслойных частицах. С нашей точки зрения, более простыми методами для решения задач о двух взаимодействующих аэрозольных частицах являются операторные методы [7]. Целью данной работы является решение задачи об испарении двух взаимодействующих аэрозольных капель операторными методами и получение точных и приближенных формул для поправочного коэффициента к формуле для времени полного испарения одиночной аэрозольной частицы, характеризующего влияние фактора взаимодействия двух частиц. Для простоты в данной работе мы рассматриваем испарение двух одинаковых взаимодействующих частиц.

Методы

Пусть две одинаковые неподвижные капли чистого вещества находятся в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси состоит из молекул летучего вещества капли, а второй компонент – из молекул несущего газа. Молекулы газа на поверхностях капель не испытывают фазового перехода. Пусть a – радиус капель, λ – средняя длина свободного пробега молекул газовой смеси. Будем считать, что $\lambda/a \ll 1$. Пусть n_1 и n_2 – численные концентрации молекул первого и второго компонентов смеси, $n_0 = n_1 + n_2$, $c_1 = n_1/n_0$. Будем считать, что $c_1 \ll 1$ (процесс испарения протекает в диффузионном режиме). Пусть T_e – распределение температуры в газовой смеси. Будем считать, что на большом расстоянии от капель температура T_e и относительная концентрация c_1 постоянны и равны соответственно значениям $T_{e\infty}$ и $c_{1\infty}$. Поле температуры T_e характеризуется малыми перепадами: $|(T_e - T_{e\infty})/T_{e\infty}| \ll 1$. Пусть $T_i^{(j)}$ – поле температуры внутри j-й капли, где $j \in \{1, 2\}$. Поля T_e, $T_i^{(j)}$ и c_1 описываются следующей системой уравнений:

$$\Delta T_e = 0, \Delta T_i^{(j)} = 0, \Delta c_1 = 0. \quad (1)$$

Перейдём к граничным условиям на поверхностях капель. Для полей температур выполняется следующее условие:

$$T_e = T_i^{(j)} \text{ на поверхности } j\text{-й капли.} \quad (2)$$

Пусть $c_{1s}(T)$ – относительная концентрация молекул насыщенных паров вещества капель при температуре T. Будем считать, что

$$c_1 = c_{1s}\left(T_i^{(j)}\right) \text{ на поверхности } j\text{-й капли.} \quad (3)$$

Пусть T_{i0} – невозмущённое значение температуры поверхности одиночной капли, то есть значение температуры поверхности одиночной капли, когда вторая капля находится на достаточно большом расстоянии от неё. Решение задачи об испарении одиночной капли приводит к следующему уравнению относительно T_{i0} [6]:

$$\kappa_e\left(T_{i0} - T_{e\infty}\right) + L_1 m_1 n_0 D_{12}\left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right) = 0,$$

где κ_e и D_{12} – коэффициент теплопроводности и коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси, L_1 и m_1 – удельное тепло фазового перехода и масса молекул первого компонента. Для величин $c_{1s}\left(T_i^{(j)}\right)$ на поверхностях капель используются следующие линеаризованные соотношения:

$$c_{1s}\left(T_i^{(j)}\right) = c_{1s}\left(T_{i0}\right) + \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}\left(T_{i0}\right)\left(T_i^{(j)} - T_{i0}\right) \text{ на поверхности } j\text{-й капли.}$$

Для радиальных потоков тепла через поверхности капель выполняются следующие условия:

$$-\kappa_e\left(\nabla T_e,\vec{e}_j\right)-L_1 m_1 n_0 D_{12}\left(\nabla c_1,\vec{e}_j\right)=-\kappa_i\left(\nabla T_i^{(j)},\vec{e}_j\right), \qquad (4)$$

где $\vec{e}_j$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности j-й капли, запись $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ означает скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, κ_i – коэффициент теплопроводности вещества капель.

Перейдём к решению системы уравнений (1). Пусть O_1 и O_2 – центры капель, O – середина отрезка O_1O_2, l – расстояние между центрами капель. Выберем декартову систему координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена от центра первой к центру второй капли. Везде далее r, θ, φ – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O. Путём параллельного переноса системы $Oxyz$ в точки O_1 и O_2 получим ещё две системы координат. Везде далее r_j, θ_j, φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j, где $j\in\{1, 2\}$. Поля T_e, $T_i^{(j)}$ и c_1 обладают свойством осевой симметрии относительно оси Oz. Пусть P_n – многочлен Лагранжа, $P_n^{(j)}=P_n\left(\cos\theta_j\right)$, $H_n^{(j)}=r_j^n P_n\left(\cos\theta_j\right)$, $H_{-n-1}^{(j)}=r_j^{-n-1}P_n\left(\cos\theta_j\right)$. Поле T_e представляется в виде $T_e=T_{e\infty}+\varepsilon^{(1)}+\varepsilon^{(2)}$, где $\varepsilon^{(j)}$ – возмущение значения $T_{e\infty}$, вызванное j-й каплей и удовлетворяющее условиям $\Delta\varepsilon^{(j)}=0$ и $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon^{(j)}=0$. Записав каждое возмущение в виде разложения по объёмно-сферическим функциям в своей системе координат [7], получим разложение:

$$T_e=T_{e\infty}+\sum_{s=0}^{\infty}A_{es}^{(1)}H_{-s-1}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}A_{en}^{(2)}H_{-n-1}^{(2)},$$

где $A_{es}^{(1)}$, $A_{en}^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты.

Аналогично разлагается c_1:

$$c_1=c_{1\infty}+\sum_{s=0}^{\infty}A_{cs}^{(1)}H_{-s-1}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}A_{cn}^{(2)}H_{-n-1}^{(2)},$$

где $A_{cs}^{(1)}$, $A_{cn}^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты.

Так как поля $T_i^{(j)}$ ограничены при $r_j\to 0$, то они представляются в следующем виде:

$$T_i^{(j)}=T_{i0}+\sum_{s=0}^{\infty}A_{is}^{(j)}H_s^{(j)},$$

где $A_{is}^{(j)}$ – неопределённые коэффициенты.

Перейдём к поиску неопределённых коэффициентов из граничных условий на поверхностях частиц. Пусть $A_{en}^{(1)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right) a^{n+1} x_{en}^{(1)}$, $A_{en}^{(2)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right)\left(-1\right)^n a^{n+1} x_{en}^{(2)}$, $A_{cn}^{(1)} = \left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right) a^{n+1} x_{cn}^{(1)}$, $A_{cn}^{(2)} = \left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)\left(-1\right)^n a^{n+1} x_{cn}^{(2)}$, $A_{in}^{(1)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right) a^{-n} x_{in}^{(1)}$, $A_{in}^{(2)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right)\left(-1\right)^n a^{-n} x_{in}^{(2)}$, где $x_{en}^{(j)}, x_{cn}^{(j)}, x_{in}^{(j)}$ – неопределённые коэффициенты. При учёте граничных условий на поверхности одной капли, вблизи этой капли объёмно-сферические функции, записанные в сферической системе координат с началом в центре другой капли, разлагаются [7] по объёмно-сферическим функциям, записанным в сферической системе координат с началом в центре рассматриваемой капли по формулам

$$H_{-n-1}^{(2)} = \left(-1\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} l^{-n-s-1} C_{n+s}^{n} H_s^{(1)},$$

$$H_{-n-1}^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} l^{-n-s-1} C_{n+s}^{n} \left(-1\right)^s H_s^{(2)},$$

а в получившихся двойных суммах меняется порядок суммирования. Пусть $X_e^{(j)} = \left(x_{e0}^{(j)}, x_{e1}^{(j)}, \ldots\right)^T$, $X_c^{(j)} = \left(x_{c0}^{(j)}, x_{c1}^{(j)}, \ldots\right)^T$, $X_i^{(j)} = \left(x_{i0}^{(j)}, x_{i1}^{(j)}, \ldots\right)^T$ – бесконечномерные векторы. В случае двух одинаковых капель картина симметрична относительно плоскости Oxy. Поэтому $X_e^{(1)} = X_e^{(2)} = X_e$, $X_c^{(1)} = X_c^{(2)} = X_c$, $X_i^{(1)} = X_i^{(2)} = X_i$, а граничные условия будем учитывать только на поверхности первой капли.

Поиск трёх векторов X_e, X_c, X_i будем вести в пространстве [7] $l_1 = \left\{ X \middle| X = \left(x_1, x_2, \ldots\right)^T,\ \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\right| < +\infty \right\}$ операторными методами. Пространство l_1 является линейным нормированным пространством с нормой $\left\|X\right\| = \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\right|$. Пусть $L_1^{(M)}$ – линейное пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов, элементы a_{sn} которых удовлетворяют условию $\sup_n \sum_{s=1}^{\infty} \left|a_{sn}\right| < +\infty$. Это пространство является линейным нормированным пространством с нормой $\left\|A\right\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} \left|a_{sn}\right|$. В пространстве l_1 рассмотрим линейный оператор, действующий из l_1 в l_1 по формуле $Y = AX$, где $A \in L_1^{(M)}$, $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X. Для матрицы и порождённого ею матричного оператора будем использовать одно и тоже обозначение. Можно показать, что $AX \in l_1$, если $A \in L_1^{(M)}$, $X \in l_1$, а норма матричного оператора A, согласованная с нормой вектора X, совпадает с числом $\|A\| = \sup\limits_{n} \sum\limits_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Далее наряду с обозначением a_{sn} для элемента с индексами s и n матрицы A будем использовать и другое обозначение $(A)_{sn}$.

Граничные условия (2), (3) и (4) приводят к следующим уравнениям:

$$X_e + MX_e - X_i = E_1, \tag{5}$$

$$X_c + MX_c - \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0}) \frac{T_{io} - T_{e\infty}}{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}} X_i = E_1, \tag{6}$$

$$-X_e + \Lambda_1 MX_e + X_c - \Lambda_1 MX_c = \frac{\kappa_i}{\kappa_e} X_i, \tag{7}$$

где $E_1 = (1, 0, 0, ...)^T \in l_1$, а элементы матриц $\Lambda_1 \in L_1^{(M)}$ и $M \in L_1^{(M)}$ определяются по формулам $(M)_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1} \tau^{n+s-1}$, $(\Lambda_1)_{sn} = \dfrac{s-1}{s} \delta_{sn}$, $s \geq 1, n \geq 1, \tau = a/l$, δ_{sn} – символ Кронекера.

Можно показать, что $\|M\| < 1$ при $0 \leq \tau < 0{,}5$ и $\|\Lambda_1\| = 1$, а решением системы (5) – (7) являются векторы $X_i = 0$, $X_e = X_c = (E + M)^{-1} E_1$, где элементы матрицы E определяются по формуле $(E)_{sn} = \delta_{sn}$. Отсюда следует, что $T_i^{(1)} = T_i^{(2)} = T_{io}$. Поля T_e и c_1 могут быть записаны с использованием ограниченных линейных операторов и линейных функционалов, определённых в l_1. Так как нашей целью является нахождение времени полного испарения капель, приведём формулу только для величины $\dfrac{\partial c_1}{\partial r_1}$ на поверхности первой капли:

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_1} = \frac{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}}{a} P(\theta_1)(\Lambda_3 M - \Lambda_2)(E + M)^{-1} E_1, \tag{8}$$

где элементы матриц Λ_2 и Λ_3 определяются по формулам $(\Lambda_2)_{sn} = s\delta_{sn}$, $(\Lambda_3)_{sn} = (s - 1)\delta_{sn}$, (можно показать, что $(\Lambda_3 M - \Lambda_2)(E + M)^{-1} E_1 \in l_1$), а $P(\theta_1)$ – ограниченный линейный функционал, определённый в l_1 и равный для любого $X = (x_1, x_2, ...)^T \in l_1$ скалярному произведению векторов $(P_0(\cos\theta_1), P_1(\cos\theta_1), P_2(\cos\theta_1), ...)$ и $(x_1, x_2, ...)$.

Используя формулу (8), мы сможем найти в сферической системе координат с началом в центре первой капли величину потока первого компонента через бесконечно малый элемент её поверхности:

$$dQ_1 = -n_0 D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial r_1} a^2 sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \tag{9}$$

Проинтегрировав обе части равенства (9) по поверхности первой капли, на основании равенств $(\Lambda_2)_{11} = 1$, $(\Lambda_3)_{11} = 0$ и свойств многочленов Лежандра найдём поток Q_1 первого компонента бинарной смеси через поверхность первой капли:

$$Q_1 = 4\pi n_0 D_{12} a(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right) E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1. \tag{10}$$

Зная Q_1, можно перейти к изучению зависимости переменного радиуса a испаряющихся капель от времени t, считая при этом, что расстояние между центрами частиц l остаётся постоянным. Так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_i\right) = -m_1 Q_1,$$

где ρ_i – плотность вещества капель, $a = l\tau$, то при постоянном значении l получим дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$dt = -\frac{\rho_i l^2}{m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)} \cdot \frac{\tau d\tau}{E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1}. \tag{11}$$

Пусть $t_e^{(s)}$ – время полного испарения одиночной аэрозольной капли с начальным радиусом a_0, а $t_e^{(d)}$ – время полного испарения дублета из двух аэрозольных капель с начальным радиусом a_0. Проинтегрировав обе части этого уравнения (11) от 0 до $t_e^{(d)}$, получим

$$t_e^{(d)} = \frac{\rho_i a_0^2}{2m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)} \cdot \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1}, \tag{12}$$

где a_0 – начальное значение радиуса капель, $\tau_0 = a_0/l$.

Из формулы (12) можно вывести формулу для времени полного испарения одиночной аэрозольной капли с начальным радиусом a_0. Переход к одиночной аэрозольной капле равносилен переходу в формуле (12) к пределу при $l \to +\infty$ при постоянном значении a_0. Так как $\tau_0 = a_0/l$, то предельный переход при $l \to +\infty$ равносилен предельному переходу в равенстве (12) при $\tau_0 \to 0$. Так как $\lim\limits_{\tau \to 0} E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1 = 1$, то по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\tau_0 \to 0} \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1} = 1. \tag{13}$$

Так как $\lim\limits_{\tau_0 \to 0} t_e^{(d)} = \lim\limits_{l \to +\infty} t_e^{(d)} = t_e^{(s)}$, то из формул (12) и (13) получим:

$$t_e^{(s)} = \frac{\rho_i a_0^2}{2m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)}. \tag{14}$$

Таким образом, величина

$$f = \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1} \tag{15}$$

играет роль поправочного коэффициента, характеризующего влияние фактора взаимодействия капель на их время полного испарения:

$$t_e^{(d)} = f \cdot t_e^{(s)}. \tag{16}$$

Анализ полученного результата

Для приближенных вычислений коэффициента f по формуле (15) достаточно возможностей программы Excel. Если оставить в матрицах E и M первые 52 строки и 52 столбца, то получим очень высокую точность вычислений. Величина $E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1$ расположена в левом верхнем углу матрицы $(E + M)^{-1}$. Так как $0 \le \tau < 0{,}5$, то пусть, для определённости, величина $\tau_0 = a_0/l$ не превосходит 0,49, что соответствует условию $l \ge 2{,}04a_0$. При вычислении значения поправочного коэффициента f по формуле (15) для конкретных значений $\tau_0 \le 0{,}49$ определённый интеграл можно найти с большой точностью по приближенной формуле Симпсона. Полученные значения поправочного коэффициента f близки к значениям, вычисленным с применением бисферической системы координат.

Если при нахождении матрицы $(E + M)^{-1}$ не учитывать степени τ^n, где $n > 7$, то формула $\left(E+M\right)^{-1} = E + \sum_{i=1}^{\infty}\left(-1\right)^i M^i$ приобретает вид:

$$\left(E+M\right)^{-1} = E - M + M^2 - M^3 + M^4 - M^5 + M^6 - M^7,$$

так как $M^n = 0$ при $n > 7$. Отсюда следует, что:

$$E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1 = 1 - \tau + \tau^2 - \tau^3 + 2\tau^4 - 3\tau^5 + 5\tau^6 - 9\tau^7.$$

Если теперь выражение $\dfrac{1}{E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1}$ разложить по степеням τ^n, не учитывая также степени τ^n, где $n > 7$, то получим выражение:

$$\frac{1}{E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1} = 1 + \tau - \tau^4 - \tau^6 + 2\tau^7.$$

Отсюда

$$\frac{2}{\tau_0^2}\int_0^{\tau_0}\frac{\tau d\tau}{E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1} = 1 + \frac{2}{3}\tau_0 - \frac{1}{3}\tau_0^4 - \frac{1}{4}\tau_0^6 + \frac{4}{9}\tau_0^7.$$

В результате получим приближенные формулы:

$$f = 1 + \frac{2}{3}\frac{a_0}{l} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_0}{l}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{l}\right)^6 + \frac{4}{9}\left(\frac{a_0}{l}\right)^7, \tag{17}$$

$$t_e^{(d)} = t_e^{(s)}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{a_0}{l} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_0}{l}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{l}\right)^6 + \frac{4}{9}\left(\frac{a_0}{l}\right)^7\right]. \tag{18}$$

Если значения поправочного коэффициента f находить по точной формуле (15) и по приближенной формуле (17) при a_0 / $l \leq 0{,}49$, то есть при $l \geq 2{,}04a_0$, то относительная погрешность не превосходит 0,5%.

Статья поступила в редакцию 20.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
2. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Испарение капель воды в высокотемпературной газовой среде // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 133–142.
3. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учётом зависимости давления насыщенного пара от кривизны её поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2012. № 3. С. 39–49.
4. Кузьмин М.К. Анализ формул для вычисления времени полного испарения одиночных капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2015. № 1. С. 56–63.
5. Кузьмин М.К., Хасанов А.С. Формула для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель с учётом коэффициентов испарения и поверхностного натяжения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2017. № 3. С. 68–75.
6. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: Учебное пособие. М.: МПУ, 1992. 297 с.
7. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твёрдых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях. Монография. М.: МГОУ, 2006. 221 с.
8. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2005. Т. 44. № 2. С. 293–297.

REFERENCES

1. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Prognosticheskoe opredelenie integral'nykh kharakteristik ispareniya kapel' vody v gazovykh sredakh s razlichnoi temperaturoi [Prognostic determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gaseous media at different temperatures]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
2. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Isparenie kapel' vody v vysokotemperaturnoi gazovoi srede [Evaporation of water droplets in high temperature gas environment]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 1, pp. 133–142.
3. Kuz'min M.K. Teoriya nestatsionarnogo protsessa ispareniya sfericheskoi aerozol'noi kapli s uchetom zavisimosti davleniya nasyshchennogo para ot krivizny ee poverkhnosti [Theory of a nonstationary process of evaporation of a spherical aerosol droplet with allowance for the dependence of the vapor pressure on the curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletein of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.

4. Kuz'min M.K. Analiz formul dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya odinochnykh kapel' vody [Analysis of formulas for calculating time of complete evaporation of single water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletein of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 56–63.
5. Kuz'min M.K., Khasanov A.S. Formula dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya aerozol'nykh kapel' s uchotom koeffitsientov ispareniya i poverkhnostnogo natyazheniya [Formula for calculating time of complete evaporation of the aerosol droplets with allowance for the coefficients of evaporation and surface tension]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletein of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 3, pp. 68–75.
6. Shchukin E.R., Yalamov Yu.I., Shulimanova Z.L. *Izbrannye voprosy fiziki aerozolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, MPU Publ., 1992. 297 p.
7. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeistvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerozol'nykh chastits vo vneshnikh polyakh* [The theory of movement and the sublimation of interacting rigid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2006. 221 p.
8. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. Fotoforez krupnykh sublimiruyushchikh aerozol'nykh chastits [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2005, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А.С. Теория испарения двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель на основе теории линейных операторов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 82–90.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-82-90.

FOR CITATION

Khasanov A.S. Evaporation theory for two identical interacting aerosol drops on the basis of theory of linear operators. In: *Bulletein of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 82–90.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-82-90.