

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-63-72

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОНКОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ

Завитаев Э.В.¹, Русаков О.В.¹, Чухлеб Е.П.²

¹ Государственный гуманитарно-технологический университет
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22, Российская
Федерация

² Муниципальное учреждение дополнительного образования
Центр дополнительного образования «Малая академия наук Импульс»
142432, Московская обл., г. Черноголовка, Школьный бульвар, д. 1, Российская
Федерация

Аннотация. В статье приведён расчёт магнитной индукции при произвольном отношении длины свободного пробега электронов к толщине слоя. В качестве граничных условий задачи приняты условия зеркально-диффузного отражения электронов. Рассмотрена макроскопическая асимптотика и проведён анализ полученных результатов.

Ключевые слова: тонкий слой, плотность тока, магнитная индукция.

MAGNETIC FIELD OF A THIN METAL LAYER

E. Zavitaev¹, O. Rusakov¹, E. Chukhleb²

¹ State University of Humanities and Technologies
ul. Zelenaya 22, 164010 Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, Russian Federation

² Municipal Institution of Additional Education, The Center of Additional Education ‘
Junior Academy of Sciences Impulse’
Shkol’nyi bulv. 1, 142432 Chernogolovka, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. The paper presents the calculation of the magnetic induction at an arbitrary ratio of the free path length of electrons to the thickness of the layer. As boundary conditions of the problem the conditions of mirror-diffuse reflection of electrons are accepted. The macroscopic asymptotics is considered and the analysis of the obtained results is carried out.

Key words: thin layer, current density, magnetic induction.

Введение

В современной микроэлектронике наиболее востребовано исследование электромагнитных свойств малых проводящих объектов [1]. Такие объекты широко применяются при создании интегральных микросхем, изготовлении защитных покрытий и экранов. В частности, это имеет прямое отношение к расчёту электромагнитных характеристик тонкого проводящего слоя [2–6].

В работе [4] была построена модель локальной электрической проводимости плоского слоя из металла с учётом различных коэффициентов зеркальности его поверхностей и проанализирована зависимость действительной и мнимой части функции проводимости от частоты объёмных и поверхностных столкновений электронов.

Однако изучение электромагнитных свойств тонкого металлического слоя будет неполным, если не рассмотреть распределение в пространстве создаваемого им магнитного поля.

В данной работе на основе кинетического подхода выполнен расчет индукции магнитного поля внутри тонкого слоя из металла, как функции текущего расстояния, отсчитываемого от центральной плоскости слоя. Поскольку толщина такого слоя может быть сравнимой со средней длиной свободного пробега Λ , то следует подробно изучить влияние поверхностного рассеяния электронов на распределение магнитного поля.

Заметим, что в публикуемой статье не учитывается проявление скин-эффекта и отклонение от закона Видемана-Франца (это является темой отдельного исследования).

Также не принимаются во внимание квантовые эффекты, которые существенны, если характерный линейный размер проводящего объекта будет одного порядка с длиной волны де Бройля для электронов. Электромагнитные свойства квантового слоя в диэлектрической среде изучались в работе [7].

Математическая модель и расчёт

Пусть имеется тонкий металлический слой толщиной a , к концам которого приложено переменное электрическое напряжение частоты ω . Будем считать, что электрическое поле параллельно слою и направлено вдоль координатной оси X , координатная ось Z направлена вглубь слоя. Напряжённость электрического поля изменяется с течением времени по закону:

$$E = E_0 \exp(-i\omega t).$$

В отсутствии внешнего электрического поля равновесное распределение электронов слоя по энергиям описывается с помощью функции Ферми-Дирака:

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{(\varepsilon - \mu)}{kT}\right) + 1},$$

где ε – кинетическая энергия, μ – химический потенциал, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

Мы считаем зависимость кинетической энергии электронов от скорости v квадратичной:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2},$$

где m – эффективная масса электрона.

При любой температуре, когда металл является твёрдым телом, его электроны можно рассматривать как вырожденный ферми-газ (при этом формально $T \rightarrow 0$). Поэтому для равновесной функции $f_0(\epsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация:

$$f_0 = \Theta(\epsilon_F - \epsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_F, \\ 0, & \epsilon_F < \epsilon \end{cases}$$

где $\epsilon_F = \frac{m v_F^2}{2}$ – энергия Ферми (v_F – скорость Ферми). Причём длина среднего свободного пробега электронов Λ и электронное время релаксации τ связаны соотношением: $\Lambda = v_F \tau$.

Также для функции $f_0(\epsilon)$ имеем:

$$f_0 = \eta(\epsilon_F - \epsilon),$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial v_x} = -\delta(\epsilon_F - \epsilon) m v_x$$

(здесь δ – дельта-функция Дирака).

При наличии внешнего электрического поля функция распределения электронов по скоростям $f(z, \mathbf{v})$ подчиняется кинетическому уравнению Больцмана [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (1)$$

где e – заряд электрона, v_z и v_x – соответственно, проекции скорости электронов проводимости на координатные оси Z и X .

Линеаризуем (1) по внешнему полю E . При этом функция f может быть записана в виде:

$$f(z, \mathbf{v}) = f_0(\epsilon) + f_1(z, \mathbf{v}),$$

где $f_1(z, \mathbf{v})$ – малое отклонение $f(z, \mathbf{v})$ от $f_0(\epsilon)$.

Тогда уравнение Больцмана в приближении времени релаксации электронов имеет вид:

$$v_z = \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - i\omega f_1 = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2):

$$f_1(z, \mathbf{v}) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + \varphi(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{z}{v_z} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\right) \right\}.$$

Зададим следующие граничные условия с учётом того, что q_1 и q_2 – коэффициенты зеркальности верхней и нижней поверхностей слоя:

$$f_1(v_z, z = a) = q_1 f_1(-v_z, z = a), v_z > 0$$

$$f_1(v_z, z = 0) = q_2 f_1(-v_z, z = 0), v_z < 0.$$

Функция $f_1(z, \mathbf{v})$ распадается на две функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^+(z, \mathbf{v}) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + \varphi^+(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{z}{v_z} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\right) \right\}, v_z > 0, \\ f_1^-(z, \mathbf{v}) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + \varphi^-(\mathbf{v}) \exp\left(\frac{a-z}{v_z} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\right) \right\}, v_z < 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Для удобства введём обозначения:

$$\Omega = \frac{a}{v_F} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = \Delta - i\Psi,$$

$$A = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x}.$$

При

$$z = 0, \quad f^+ = q_2 f_1^-(-v_z),$$

$$z = a, \quad f^- = q_1 f_1^+(-v_z).$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \varphi^+(v_z) = q_2 (1 + \varphi^-(-v_z) \exp(-\Omega)), \\ 1 + \varphi^-(v_z) = q_1 (1 + \varphi^+(-v_z) \exp(\Omega)). \end{array} \right. \quad (4)$$

Из выражения (4) находим:

$$\varphi^+(v_z) = \frac{q_2 (1 + q_1 \exp(-\Omega)) - (1 + q_2 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega)},$$

$$\varphi^-(v_z) = \frac{q_1 (1 + q_2 \exp(-\Omega)) - (1 + q_1 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega)}.$$

При этом выражение (3) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^+(z, \mathbf{v}) = A \left\{ 1 + \frac{q_2(1 + q_1 \exp(-\Omega)) - (1 + q_2 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega a)} \exp(-\Omega z) \right\}, v_z > 0, \\ f_1^-(z, \mathbf{v}) = A \left\{ 1 + \frac{q_1(1 + q_2 \exp(-\Omega)) - (1 + q_1 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega)} \exp\left(\Omega \left(1 - \frac{z}{a}\right)\right) \right\}, v_z < 0. \end{array} \right.$$

Для расчёта плотности тока будем использовать формулу:

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = en \left[\int f_0 d^3 \mathbf{v} \right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3 \mathbf{v},$$

где n – концентрация электронов проводимости, которая определяется стандартным образом, исходя из свойств распределения Ферми–Дирака,

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3 v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3},$$

где h – постоянная Планка.

Для нахождения плотности тока $j(z)$ удобно перейти в сферическую систему координат (v, Θ, Φ) , с учётом того, что $v_z = v \cdot \cos(\Theta) = v_F \cdot \cos(\Theta)$:

$$\begin{aligned} j(z) = & \frac{2e^2 m^2 E}{h^3} \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\Phi \tau v^3 \cos^2(\Phi) \frac{\partial f_0}{\partial v} \times \\ & \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta) \left(1 + \varphi^+(v_z) \exp(-\Omega z / \cos(\theta)) \right) d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^3(\theta) \left(1 + \varphi^-(v_z) \exp\left(\Omega \left(1 - \frac{z}{a}\right) / \cos(\theta)\right) \right) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразовав (5), можно получить аналитическое выражение для плотности тока внутри слоя как функции безразмерного расстояния до его верхней поверхности $\xi = z/a$:

$$\begin{aligned} j_x = & \frac{3ne^2 a}{4m v_F \Omega} E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \times \\ & \times \left[2 + \frac{q_2(1 - \exp(-\Omega / \cos \theta) + q_1 \exp(-\Omega / \cos \theta)) - 1}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega / \cos \theta)} \times \exp\left(\frac{-\Omega \xi}{\cos \theta}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{q_1(1 - \exp(-\Omega / \cos \theta) + q_2 \exp(-\Omega / \cos \theta)) - 1}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega / \cos \theta)} \times \exp\left(\frac{-\Omega(1 - \xi)}{\cos \theta}\right) \right] d\theta. \end{aligned}$$

Вектор магнитной индукции \mathbf{B} внутри тонкого металлического слоя рассчитаем с помощью теоремы о циркуляции. При её применении мы будем исходить из того, что распределение тока по сечению слоя является неоднородным:

$$\oint_L B_y dl = \mu_0 \int_s j_x dS$$

(μ_0 – магнитная постоянная вакуума).

Применив теорему к замкнутому контуру в виде прямоугольника, который лежит в плоскости YZ , получим:

$$B_y = \frac{\mu_0}{2} \int_{\frac{a}{2}-z_B}^{\frac{a}{2}+z_B} j_x dz,$$

где новая координата z_B , через которую задаются пределы интегрирования, отсчитывается от центральной плоскости XY слоя.

Для дальнейших вычислений и анализа результатов удобно ввести «безразмерную координату индукции» $\delta = z_B/a$. Используя такое обозначение, мы получаем следующую формулу для расчёта магнитной индукции внутри слоя в рамках кинетического подхода:

$$B_k = \frac{\mu_0}{2} a \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} j_x d\xi. \quad (7)$$

В случае $a \gg \Lambda$ ($\Delta \rightarrow \infty$) из (7) можно получить макроскопическую асимптотику магнитной индукции. После проведения несложных вычислений имеем:

$$B_m = \frac{\mu_0 n e^2 a^2 E \delta}{v_F m \Omega}.$$

Анализ результатов

Проведём численный расчёт магнитной индукции тонкого металлического слоя. Для этого удобно предварительно выполнить стандартную процедуру записи формулы (7) в безразмерном виде.

На рис. 1 представлена зависимость отношения D модуля магнитной индукции тонкого слоя B_k к модулю магнитной индукции макроскопического слоя B_m от «безразмерной координаты индукции» δ при различных значениях параметров Δ , ψ , q_1 и q_2 . Для всех кривых на рисунке $\psi = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. Причём для кривой 1 – $\Delta_1 = 1$, для кривой 2 – $\Delta_2 = 2$, для кривой 3 – $\Delta_3 = 3$.

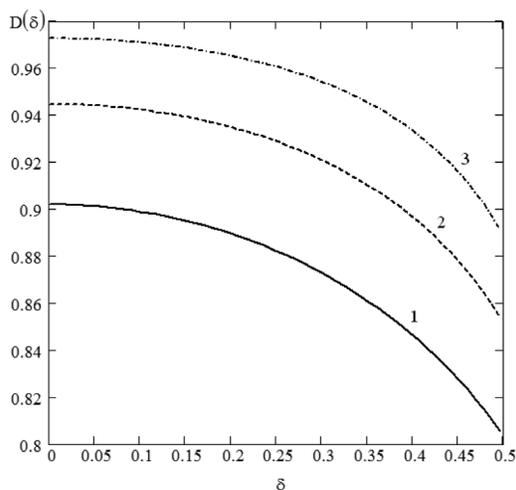


Рис. 1. Зависимость отношения D модуля магнитной индукции тонкого слоя к модулю магнитной индукции макроскопического слоя от «безразмерной координаты индукции» δ .

Из рис. 1 видна тенденция уменьшения модуля магнитной индукции тонкого металлического слоя по отношению к индукции макроскопического слоя при переходе от его центральной плоскости к периферии. Данная тенденция имеет место при произвольных значениях параметра Δ , который выражает собой степень различия толщины слоя a и средней длины свободного пробега электронов Λ внутри него. Такое поведение кривых объясняется учётом рассеяния электронов на нижней и верхней поверхностях слоя.

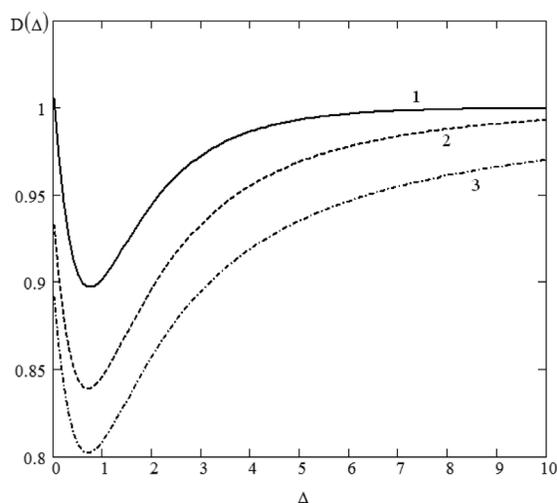


Рис. 2. Зависимость отношения D модуля магнитной индукции тонкого слоя к модулю магнитной индукции макроскопического слоя от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов Δ .

На рис. 2 приведено отношение модуля магнитной индукции тонкого слоя B_k к модулю магнитной индукции макроскопического слоя B_m как функции параметра Δ . Для всех кривых на рисунке $\psi = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. Причём для кривой 1 – $\delta_1 = 0$, для кривой 2 – $\delta_2 = 0,4$, для кривой 3 – $\delta_3 = 0,49$.

Из анализа хода кривых можно сделать вывод об их нетривиальном поведении в области значений параметра Δ порядка единицы, то есть, когда толщина слоя сравнима со средней длиной свободного пробега электронов Λ в нём. Такое поведение кривых, по-видимому, связано с резонансными эффектами, которые наблюдаются при отражении электронов проводимости от поверхностей слоя. Заметим, что картина значительно усложняется, если коэффициенты зеркальности различны. В этом случае распределение магнитного поля внутри слоя становится несимметричным.

Статья поступила в редакцию 19.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. 360 с.
2. Уткин А.И., Юшканов А.А. Влияние коэффициентов зеркальности на взаимодействие Н-волны с тонкой металлической плёнкой // Оптика и спектроскопия. 2014. Т. 117. № 4. С. 650–653.
3. Уткин А.И., Юшканов А.А. Влияние коэффициентов зеркальности на проводимость тонкого металлического слоя в случае неоднородного, периодического по времени электрического поля // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 5. С. 386–395.
4. Уткин А.И., Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Расчёт электрической проводимости тонкого металлического слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2016. № 9. С. 85–91.
5. Уткин А.И., Юшканов А.А. Распределение электрического тока в тонком металлическом слое при различных коэффициентах зеркальности на поверхностях // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. № 10. С. 15–19.
6. Кузнецова И.А., Романов Д.Н., Савенко О.В., Юшканов А.А. Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого полупроводникового слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Микроэлектроника. 2017. Т. 46. № 4. С. 275–283.
7. Бабич А.В., Погосов В.В. Квантовая металлическая плёнка в диэлектрическом окружении // Физика твёрдого тела. 2013. Т. 55. Вып. 1. С. 177–185.
8. Абrikосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.

REFERENCES

1. Petrov Yu.I. *Fizika malykh chastits* [Physics of small particles]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 360 p.
2. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Vliyaniye koeffitsientov zerkal'nosti na vzaimodeystvie N-volny s tonkoi metallicheskoi plonkoi [Effect of reflection coefficients on the interaction of an N-wave with a thin metal film]. In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2014, vol. 117, no. 4, pp. 650–653.
3. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Vliyaniye koeffitsientov zerkal'nosti na provodimost' tonkogo metallicheskogo sloya v sluchae neodnorodnogo, periodicheskogo po vremeni elektricheskogo polya [Effect of reflection coefficients on the conductivity of a thin metal layer in

- the case of inhomogeneous, time-periodic electric field]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016. vol. 45, no. 5, pp. 386–395.
4. Utkin A.I., Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Raschet elektricheskoi provodimosti tonkogo metallicheskogo sloya v sluchae razlichnykh koeffitsientov zerkal'nosti ego poverkhnosti [Calculation of the electrical conductivity of a thin metal layer in the case of different coefficients of reflectivity of its surfaces]. In: *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnyye i neitronnyye issledovaniya* [The Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2016, no. 9, pp. 85–91.
 5. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Raspredelenie elektricheskogo toka v tonkom metallicheskom sloe pri razlichnykh koeffitsientakh zerkal'nosti na poverkhnostyakh [Distribution of the electric current in thin metal layers with different coefficients of reflectivity on the surfaces]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2016, vol. 86, no. 10, pp. 15–19.
 6. Kuznetsova I.A., Romanov D.N., Savenko O.V., Yushkanov A.A. Raschet vysokochastotnoi elektroprovodnosti tonkogo poluprovodnikovogo sloya v sluchae razlichnykh koeffitsientov zerkal'nosti ego poverkhnosti [Calculation of high-frequency conductivity of a thin semiconductor layer in the case of different coefficients of reflectivity of its surfaces]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2017, vol. 46, no. 4, pp. 275–283.
 7. Babich A.V., Pogosov V.V. Kvantovaya metallicheskaya plenka v dielektricheskom okruzhenii [A quantum metal film in a dielectric environment]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2013, vol. 55, no. 1, pp. 177–185.
 8. Abrikosov A.A. *Osnovy teorii metallov* [Fundamentals of the theory of metals]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 520 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Чухлеб Екатерина Петровна – педагог дополнительного образования Муниципального учреждения дополнительного образования Центр дополнительного образования «Малая академия наук Импульс»;
e-mail: e.chuhleb@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eduard V. Zavitaev – Doctor in Physical and Mathematical sciences, professor at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technologies;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Oleg V. Rusakov – PhD in Physical and Mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technologies;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Ekaterina P. Chukhleb – teacher of additional education, Municipal Institution of Additional Education, The Center of Additional Education ‘Junior Academy of Sciences Impulse’;
e-mail: e.chuhleb@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Чухлеб Е.П. Магнитное поле тонкого металлического слоя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 63–72.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-63-72.

FOR CITATION

Zavitaev E.V, Rusakov O.V., Chukhleb E.P. Magnetic field of a thin metal layer. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 63–72.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-63-72.