

УДК: 535.016

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-23-37

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИМПЕДАНСЫ ПЛОСКОГО СЛОЯ СРЕДЫ С ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

Зверев Н.В.

Московский государственный областной университет,
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрено электромагнитное поле плоской монохроматической волны внутри плоского слоя однородной среды, обладающей пространственной дисперсией и имеющей зеркально-симметричную функцию ди

электрического отклика. Использован метод разложения в ряд Фурье для вычисления поверхностных импедансов данного слоя среды в случаях Р- и S-волны. Полученные формулы для поверхностных импедансов совпадают с формулами в работах Кливера и Фукса для плоского слоя электронной плазмы, а также правильно описывают поверхностные импедансы плоского слоя среды без пространственной дисперсии.

Ключевые слова: электромагнитное поле, диэлектрическая проницаемость, поверхностный импеданс

SURFACE IMPEDANCES OF A FLAT LAYER OF A MEDIUM WITH A MIRROR-SYMMETRIC DIELECTRIC RESPONSE FUNCTION

N. Zverev

Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 100500 Moscow, Russian Federation

Abstract. The electromagnetic field of a plane monochromatic wave inside a flat layer of a uniform medium possessing a spatial dispersion and having a mirror-symmetric dielectric response function is considered. The method of Fourier series decomposition is used to evaluate the surface impedance of the layer in the cases of P- and S-waves. The obtained equations for the surface impedances coincide with those from works of Kliewer and Fuchs for a flat layer of electron plasma and describe correctly the surface impedances of a flat layer of a medium without spatial dispersion.

Key words: electromagnetic field, dielectric permittivity, surface impedance.

Введение

В настоящее время в связи с бурным развитием био- и нанотехнологий большое внимание уделяется исследованиям материалов и систем, имеющих размеры порядка от одного до нескольких сот нанометров. Одним из таких исследований

является изучение взаимодействия электромагнитного излучения с веществами, размеры которых меньше или сопоставимы с длиной волны излучения (см. [1–6]).

В случае веществ обычных размеров часто не учитывают пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости среды, то есть зависимость диэлектрической проницаемости от волнового вектора [7]. Это обусловлено тем, что отклик среды на электромагнитные волны отличен от нуля только на расстояниях порядка размеров атомов или молекул. Однако при исследовании объектов достаточно малых размеров, таких как тонкие металлические плёнки (см. [3; 5; 6; 8–10]), а также при изучении оптически активных веществ [7], пространственная дисперсия может играть важную роль. Поэтому в случае данных объектов необходимо принимать во внимание пространственную дисперсию.

В настоящей работе рассматривается плоская монохроматическая электромагнитная волна внутри плоского слоя однородной изотропной среды, имеющей пространственную дисперсию. При этом предполагаем, что функция диэлектрического отклика данной среды обладает зеркальной симметрией. Целью данной работы является вычисление поверхностных импедансов рассматриваемой волны для указанного слоя среды. Для вычисления этих импедансов используем метод разложения величин электромагнитного поля в ряд Фурье. Следует отметить, что поверхностные импедансы играют важную роль при изучении взаимодействия излучения с разными средами и распространения излучения в этих средах [1; 8–11].

Функция отклика и диэлектрическая проницаемость среды

Рассмотрим плоский слой однородной изотропной немагнитной среды толщиной d , к тому же не обладающей оптической активностью. Выберем правую прямоугольную систему координат таким образом, что слой занимает область $0 < z < d$ (рис. 1). При этом координатные оси X и Y оказываются параллельными границам слоя.

Уравнения Максвелла и материальное уравнение для магнитного поля внутри рассматриваемого слоя среды имеют вид (в системе СИ):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1)$$

Здесь ток проводимости учтён в электрическом смещении \mathbf{D} . При этом материальное уравнение для электрического поля внутри слоя в координатном виде выглядит следующим образом (ср. с [7]):

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(x, y, z, t) = & \epsilon_0 E_{\alpha}(x, y, z, t) + \\ & + \epsilon_0 \int_0^d \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\beta} f_{\alpha\beta}(x-x', y-y'; z, z'; t-t') \times \\ & \times E_{\beta}(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt'. \end{aligned} \quad (2)$$

В данной формуле $f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t)$ – функция диэлектрического отклика среды, расположенной в плоском слое $0 < z < d$. Интегрирование по координатам x' и y' выполняется от $-\infty$ до $+\infty$, а индексы $\alpha, \beta = x, y, z$.

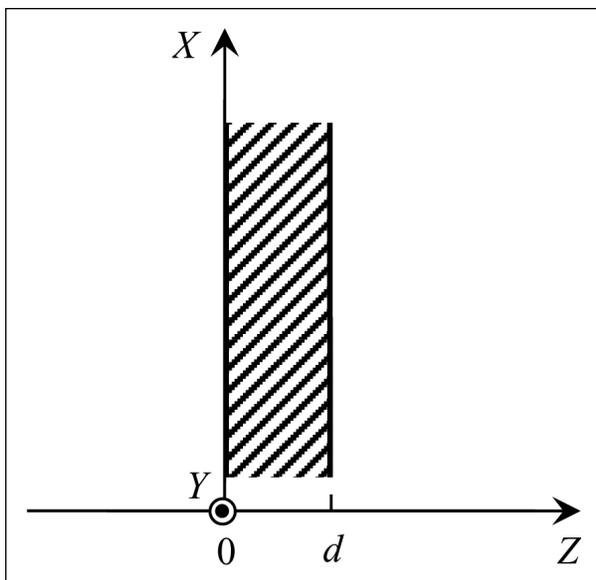


Рис. 1. Схема расположения слоя среды

Пусть диэлектрический отклик среды внутри рассматриваемого слоя обладает зеркальной симметрией относительно границ слоя $z = 0$ и $z = d$, то есть функция отклика имеет следующий вид:

$$f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{g_{\alpha\beta}(x, y, z - z' + 2md, t) + g_{\alpha\beta}(x, y, z + z' + 2md, t)\}. \quad (3)$$

В формуле (3) функция $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$ есть функция диэлектрического отклика среды, заполняющей всё пространство. Однородность рассматриваемой среды отражена в зависимости функции отклика от одной точки с координатами x, y, z и одного момента времени t . Далее, точки с координатами $\pm z' - 2md$ есть результат всевозможных отражений точки с координатой z' относительно плоскостей $z = 0$ и $z = d$. Свойство зеркальной симметрии функции диэлектрического отклика (3) может быть обусловлено зеркальным отражением электронов или ионов среды (см. [1; 8–11]), а также упругих волн или возбуждений атомов, от границ слоя.

Фактически мы заменяем слой бесконечным набором параллельных слоёв одинаковой толщины d . При этом поле в точке z' совпадает с полем в точке $\pm z' - 2md$. Если предположить, что физической границы между слоями нет, то есть электроны пересекают границы слоёв без рассеяния, то движение электро-

нов в такой среде будет совпадать с движением электронов в слое толщиной d с зеркальными граничными условиями на границе.

Фурье-образ функции $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$, соответствующий монохроматической волне с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , даёт тензор диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ (см. [7]):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \iiint_0^{+\infty} \int g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} dx dy dz dt. \quad (4)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера. Данный тензор в случае изотропной и не оптически активной среды выглядит следующим образом [7; 11]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \varepsilon_{tr}(\omega, k) + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \varepsilon_l(\omega, k). \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $k = |\mathbf{k}|$, а интегрирование по координатам x, y, z выполняется от $-\infty$ до $+\infty$. Функции $\varepsilon_l(\omega, k)$ и $\varepsilon_{tr}(\omega, k)$ – продольная и поперечная диэлектрические проницаемости среды, соответственно. Зависимость тензора диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{\alpha\beta}$ от волнового вектора \mathbf{k} есть пространственная дисперсия среды.

Плоская монохроматическая волна внутри слоя среды

Предположим, что электромагнитная волна вне среды является плоской монохроматической и распространяется в плоскости XZ . Тогда в случае P -волны, когда напряжённость электрического поля \mathbf{E} волны лежит в плоскости распространения XZ , а напряжённость магнитного поля \mathbf{H} параллельна оси Y , внутри слоя $0 < z < d$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} E_x &= e^{i(k_x x - \omega t)} E_x^{(j)}(z), \\ E_z &= e^{i(k_x x - \omega t)} E_z^{(j)}(z), \\ H_y &= e^{i(k_x x - \omega t)} H_y^{(j)}(z), \end{aligned} \quad (6)$$

где индекс j обозначает чётную или нечётную моду, которые будут описаны ниже. В этом случае из уравнений (1) следует, что электрическое смещение \mathbf{D} волны лежит в плоскости распространения волны XZ . И тогда из (2) и (6) следуют соотношения:

$$D_x = e^{i(k_x x - \omega t)} D_x^{(j)}(z), \quad D_z = e^{i(k_x x - \omega t)} D_z^{(j)}(z), \quad (7)$$

где

$$D_\alpha^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_\alpha^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_0^d \sum_{\beta=x,z} F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') E_\beta^{(j)}(z') dz', \quad (8)$$

и $\alpha = x, z$.

В случае же S-волны, когда составляющая \mathbf{H} лежит в плоскости распространения XZ , а составляющая \mathbf{E} параллельна оси Y , внутри рассматриваемого слоя среды $0 < z < d$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned} H_x &= e^{i(k_x x - \omega t)} H_x^{(j)}(z), \\ H_z &= e^{i(k_x x - \omega t)} H_z^{(j)}(z), \\ E_y &= e^{i(k_x x - \omega t)} E_y^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда из (1) следует, что смещение \mathbf{D} параллельно оси Y , а из (2) и (9) следует формула:

$$D_y = e^{i(k_x x - \omega t)} D_y^{(j)}(z), \quad (10)$$

где

$$D_y^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_y^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_0^d F_{yy}(\omega, k_x, z, z') E_y^{(j)}(z') dz'. \quad (11)$$

В формулах (8) и (11) введено обозначение:

$$F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') = \iiint_0^{+\infty} f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) e^{i(\omega t - k_x x)} dx dy dt. \quad (12)$$

Здесь и далее интегрирование по x и y выполняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда из (3) и (12) следует формула:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' + 2md) + \right. \\ &\quad \left. + L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z + z' + 2md) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z) = \iiint_0^{+\infty} g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) e^{i(\omega t - k_x x)} dx dy dt. \quad (14)$$

Для P-волны внутри слоя в области $0 < z < d$ из (1), (6) и (7) следует система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dE_x^{(j)}}{dz} - ik_x E_z^{(j)} = i\omega\mu_0 H_y^{(j)}, \\ ik_x H_y^{(j)} = -i\omega D_z^{(j)}, \\ -\frac{dH_y^{(j)}}{dz} = -i\omega D_x^{(j)}. \end{cases} \quad (15)$$

А в случае S-волны в рассматриваемой области формулы (1); (9) и (10) приводят к системе:

$$\begin{cases} ik_x E_y^{(j)} = i\omega\mu_0 H_z^{(j)}, \\ \frac{dE_y^{(j)}}{dz} = -i\omega\mu_0 H_x^{(j)}, \\ \frac{dH_x^{(j)}}{dz} - ik_x H_z^{(j)} = -i\omega D_y^{(j)}. \end{cases} \quad (16)$$

Ряды Фурье для электромагнитного поля

Для дальнейшего исследования величин электромагнитного поля внутри рассматриваемого слоя среды удобно продолжить функции $E_\alpha^{(j)}(z)$ на область $-d < z < 0$ следующим образом:

$$E_\alpha^{(j)}(-z) = E_\alpha^{(j)}(z), \quad (0 < z < d), \quad (17)$$

где $\alpha = x$, z в случае Р-волны и $\alpha = y$ в случае S-волны. Отсюда следует, что данные функции являются непрерывными в области $-d < z < d$. Тогда функции $H_\alpha^{(j)}(z)$ также продолжены на область $-d < z < 0$ согласно первому уравнению системы (15) в случае Р-волны, а в случае S-волны – первому и второму уравнениям системы (16). Однако, как видно из этих уравнений, функции $H_y^{(j)}(z)$ и $H_x^{(j)}(z)$ в случае Р-волны и S-волны соответственно имеют разрыв 1-го рода в точке $z = 0$.

Условие (17), на самом деле, необходимо для выполнения формулы (3). Это составная часть свойств зеркальной симметрии функции диэлектрического отклика.

Тогда с учётом (17) формулы (8) и (11) вместе с (13) приобретают в случае Р-волны следующий вид:

$$D_\alpha^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_\alpha^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=x,z} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' + 2md) E_\beta^{(j)}(z') dz', \quad (18)$$

где $\alpha = x$, z , а в случае S-волны:

$$D_y^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_y^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_{yy}(\omega, k_x, z - z' + 2md) E_y^{(j)}(z') dz'. \quad (19)$$

С помощью этих формул функции $D_\alpha^{(j)}(z)$ являются продолженными на область $-d < z < 0$.

После продолжения функций $E_\alpha^{(j)}(z)$, $H_\alpha^{(j)}(z)$ и $D_\alpha^{(j)}(z)$ на область $-d < z < 0$ рассмотрим разложение этих функций в ряд Фурье в области $-d < z < d$ ($\alpha = x, y, z$):

$$A_\alpha^{(j)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_{\alpha n}^{(j)} e^{intz/d}, \quad (20)$$

где коэффициенты Фурье:

$$\tilde{A}_{\alpha n}^{(j)} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d A_{\alpha}^{(j)}(z) e^{-i\pi n z/d} dz, \quad (21)$$

а символ A обозначает функции E , D или H . Подставим (20) для E в правую часть (18) или (19), а затем левые части этих формул – в (21) для D . В результате получим для Р-волны:

$$\tilde{D}_{\alpha n}^{(j)} = \varepsilon_0 \tilde{E}_{\alpha n}^{(j)} + \varepsilon_0 \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=x,z} W_{\alpha\beta,nn'} \tilde{E}_{\beta n'}^{(j)}, \quad (\alpha = x, z), \quad (22)$$

и для S-волны:

$$\tilde{D}_{yn}^{(j)} = \varepsilon_0 \tilde{E}_{yn}^{(j)} + \varepsilon_0 \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} W_{yy,nn'} \tilde{E}_{yn'}^{(j)}. \quad (23)$$

В (22) обозначено:

$$W_{\alpha\beta,nn'} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' + 2md) e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz'.$$

Вычислим последнее выражение, используя формулы (4) и (14):

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta,nn'} &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-d}^d L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' - 2md) e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz' = \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{(2m-1)d}^{(2m+1)d} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z') e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz' = \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z') e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz' = \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d e^{i\pi(n' - n)z/d} dz \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z') e^{-i\pi n'z'/d} dz' = \\ &= \delta_{nn'} [\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k_x, 0, \pi n/d) - \delta_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22) и (23), получим соотношения для Р-волны:

$$\tilde{D}_{\alpha n}^{(j)} = \varepsilon_0 \sum_{\beta=x,z} \varepsilon_{\alpha\beta n} \tilde{E}_{\beta n}^{(j)}, \quad (\alpha = x, z), \quad (25)$$

и для S-волны:

$$\tilde{D}_{yn}^{(j)} = \varepsilon_0 \varepsilon_{yyn} \tilde{E}_{yn}^{(j)}, \quad (26)$$

где обозначено:

$$\varepsilon_{\alpha\beta n} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k_x, 0, \pi n/d). \quad (27)$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая формулы (15)–(17), получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz} e^{-i\pi n z/d} dz &= \frac{i\pi n}{d} \tilde{E}_{\alpha n}^{(j)}, \\ \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{dH_{\beta}^{(j)}}{dz} e^{-i\pi n z/d} dz &= \frac{i\pi n}{d} \tilde{H}_{\beta n}^{(j)} - \frac{1}{2d} [H_{\beta}^{(j)}(+0) - H_{\beta}^{(j)}(-0)] + \\ &+ \frac{(-1)^n}{2d} [H_{\beta}^{(j)}(d-0) - H_{\beta}^{(j)}(-d+0)], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} H_{\beta}^{(j)}(d-0) - H_{\beta}^{(j)}(-d+0) &= \frac{2\xi_{\alpha}}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(d-0), \\ H_{\beta}^{(j)}(+0) - H_{\beta}^{(j)}(-0) &= \frac{2\xi_{\alpha}}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(+0). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь для Р-волны $\alpha = x$, $\beta = y$, $\xi_{\alpha} = 1$, а для S-волны $\alpha = y$, $\beta = x$, $\xi_{\alpha} = -1$.

Моды электромагнитного поля внутри слоя среды

Теперь рассмотрим чётную и нечётную моды электромагнитного поля внутри слоя среды в области $0 < z < d$, обозначаемые индексом j . Для Р-волны эти моды, согласующиеся с первым уравнением системы (15), имеют следующий вид ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} E_x^{(j)}(d-z) &= (-1)^j E_x^{(j)}(z), \\ E_z^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} E_z^{(j)}(z), \\ H_y^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} H_y^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (30)$$

А для S-волны данные моды, согласующиеся с первыми двумя уравнениями системы (16), выглядят так ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} E_y^{(j)}(d-z) &= (-1)^j E_y^{(j)}(z), \\ H_x^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} H_x^{(j)}(z), \\ H_z^{(j)}(d-z) &= (-1)^j H_z^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда из (30) и (31) следует:

$$\frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(d-0) = (-1)^{j+1} \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(+0), \quad (32)$$

где $\alpha = x$ для Р-волны и $\alpha = y$ для S-волны.

Запишем теперь уравнения систем (15) и (16) в коэффициентах Фурье по формуле (21). В результате, используя соотношения (28), (29) и (32), получим систему для Р-волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{i\pi n}{d} \tilde{E}_{xn}^{(j)} - ik_x \tilde{E}_{zn}^{(j)} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_{yn}^{(j)}, \\ ik_x \tilde{H}_{yn}^{(j)} = -i\omega \tilde{D}_{zn}^{(j)}, \\ -\frac{i\pi n}{d} \tilde{H}_{yn}^{(j)} + \frac{(-1)^{n+j} + 1}{i\omega\mu_0 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0) = -i\omega \tilde{D}_{xn}^{(j)}, \end{array} \right. \quad (33)$$

и для S-волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_x \tilde{E}_{yn}^{(j)} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_{zn}^{(j)}, \\ \frac{i\pi n}{d} \tilde{E}_{yn}^{(j)} = -i\omega\mu_0 \tilde{H}_{xn}^{(j)}, \\ \frac{i\pi n}{d} \tilde{H}_{xn}^{(j)} - ik_x \tilde{H}_{zn}^{(j)} + \frac{(-1)^{n+j} + 1}{i\omega\mu_0 d} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0) = -i\omega \tilde{D}_{yn}^{(j)}. \end{array} \right. \quad (34)$$

Поверхностный импеданс Р-волны

Рассмотрим сначала случай Р-волны. Из первых двух уравнений (33) и соотношения (25) для $\tilde{D}_{zn}^{(j)}$ следует формула:

$$\tilde{E}_{zn}^{(j)} = \frac{\varepsilon_{zxn} + (\pi n / d) k_x c^2 / \omega^2}{(k_x c / \omega)^2 - \varepsilon_{zxn}} \tilde{E}_{xn}^{(j)}, \quad (35)$$

где c – скорость света в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (36)$$

Далее, из первого и третьего уравнений (33) и соотношения (25) для $\tilde{D}_{xn}^{(j)}$ получаем уравнение:

$$\left[\varepsilon_{xxn} - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 \right] \tilde{E}_{xn}^{(j)} + \left[\varepsilon_{zxn} + \frac{c^2 k_x}{\omega^2} \frac{\pi n}{d} \right] \tilde{E}_{zn}^{(j)} = \left[(-1)^{n+j} + 1 \right] \frac{c^2}{\omega^2 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0). \quad (37)$$

Из (27) и (5) следуют формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zzn} &= \frac{(\pi n / d)^2 \varepsilon_{tr,n} + k_x^2 \varepsilon_{l,n}}{k_x^2 + (\pi n / d)^2}, \\ \varepsilon_{zzn} &= \frac{k_x^2 \varepsilon_{tr,n} + (\pi n / d)^2 \varepsilon_{l,n}}{k_x^2 + (\pi n / d)^2}, \\ \varepsilon_{xzn} = \varepsilon_{zxn} &= \frac{(\pi n / d) k_x}{k_x^2 + (\pi n / d)^2} (\varepsilon_{l,n} - \varepsilon_{tr,n}),\end{aligned}\quad (38)$$

где обозначено:

$$\varepsilon_{l,n} = \varepsilon_l(\omega, k_n), \varepsilon_{tr,n} = \varepsilon_{tr}(\omega, k_n), k_n = \sqrt{k_x^2 + \left(\frac{\pi n}{d}\right)^2}. \quad (39)$$

Подставляя (35) в (37) и используя формулы (38), после преобразований найдём:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{xn}^{(j)} &= \frac{(-1)^{n+j} + 1}{k_x^2 + (\pi n / d)^2} \cdot \frac{c^2}{\omega^2 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0) \times \\ &\times \left\{ \frac{k_x^2}{\varepsilon_{l,n}} - \frac{(\pi n / d)^2}{[k_x^2 + (\pi n / d)^2] c^2 / \omega^2 - \varepsilon_{tr,n}} \right\}.\end{aligned}\quad (40)$$

Из этой формулы с учётом обозначений (39) видно, что $\tilde{E}_{x,-n}^{(j)} = \tilde{E}_{xn}^{(j)}$. Тогда из (35) с учётом нижней формулы (38) следует соотношение $\tilde{E}_{z,-n}^{(j)} = -\tilde{E}_{zn}^{(j)}$. Отсюда с использованием разложения Фурье (20) получим:

$$E_z^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{zn}^{(j)} = 0.$$

Используя это соотношение, из первой формулы системы (15) найдём:

$$H_y^{(j)}(+0) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0). \quad (41)$$

Определим теперь поверхностный импеданс моды плоской гармонической Р-волны на поверхности $z = 0$ слоя, считаемой нами поверхностью падения волны:

$$Z_p^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_x^{(j)}(+0)}{H_y^{(j)}(+0)}, \quad (42)$$

где Z_0 – импеданс вакуума в системе СИ:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (43)$$

Подставляем выражение (40) в разложение Фурье (20) для $E_x^{(j)}(+0)$:

$$E_x^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{xn}^{(j)},$$

а затем полученное выражение и формулу (41) – в определение (42). В результате, учитывая формулы (36), (39) и (43), получим формулу для поверхностного импеданса Р-волны:

$$Z_p^{(j)} = \frac{2ic\omega}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+j} + 1]/2}{k_n^2} \left\{ \frac{k_x^2}{\omega^2 \varepsilon_l(\omega, k_n)} + \frac{(\pi n/d)^2}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k_n) - c^2 k_n^2} \right\}, \quad (44)$$

где $j=1, 2$ и $k_n = \sqrt{k_x^2 + (\pi n/d)^2}$.

Данная формула совпадает с формулой, полученной Кливером и Фуксом [8–10] в случае плоского слоя электронной плазмы при зеркальном отражении электронов от поверхностей слоя. Из (44) видно, что в случае нечётной моды ($j=1$) суммирование ведётся по всем нечётным $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, а в случае чётной моды ($j=2$) – по всем чётным $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$.

Формула (44) справедлива и в случае однородной изотропной среды без пространственной дисперсии, когда функция отклика $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$ имеет структуру:

$$g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \delta_{\alpha\beta} g(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad (45)$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака. Действительно, подставляя (45) в (3), получим, что при $0 < z, z' < d$ функция отклика слоя среды равна:

$$f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) = g_{\alpha\beta}(x, y, z - z', t).$$

Тогда, подставляя (45) в (4) и учитывая (5), получим, что продольная и поперечная диэлектрические проницаемости среды равны:

$$\varepsilon_l(\omega, k) = \varepsilon_{tr}(\omega, k) = \varepsilon(\omega), \quad (46)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя (46) в (44) и выполняя суммирование с использованием формул [12]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - \xi^2} = \frac{\pi}{2\xi} \operatorname{tg} \frac{\pi\xi}{2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2 - \xi^2} = -\frac{\pi}{2\xi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\xi}{2}, \quad (47)$$

получим формулу для поверхностного импеданса Р-волны в случае среды без пространственной дисперсии ($j=1, 2$):

$$Z_p^{(j)} = i^{2j-3} \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2}}{\varepsilon(\omega)} \operatorname{tg}^{3-2j} \left(\frac{\omega d}{2c} \sqrt{\varepsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2} \right).$$

Эта формула может быть получена другим, более простым способом, из рассмотрения мод плоской монохроматической Р-волны внутри слоя среды без пространственной дисперсии.

Поверхностный импеданс S-волны

Теперь обратимся к случаю S-волны. Из (27) и (5) с учётом (39) следует, что

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{tr,n}.$$

Подставляя данное соотношение в (26), а затем (26) и выражения для $\tilde{H}_{xn}^{(j)}$ и $\tilde{H}_{zn}^{(j)}$ из первых двух уравнений системы (34) в третье уравнение этой системы, с учётом (36) получим:

$$\tilde{E}_{yn}^{(j)} = \frac{c^2}{\omega^2 d} \cdot \frac{(-1)^{n+j} + 1}{\varepsilon_{tr,n} - c^2[k_x^2 + (\pi n/d)^2]/\omega^2} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0). \quad (48)$$

Далее, из второго уравнения (16) найдём:

$$H_x^{(j)}(+0) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0). \quad (49)$$

Поверхностный импеданс моды плоской гармонической S-волны на поверхности $z = 0$ слоя определяем аналогично импедансу Р-волны следующим образом:

$$Z_S^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_y^{(j)}(+0)}{H_x^{(j)}(+0)}. \quad (50)$$

Подставляя (48) в разложение Фурье (20) для $E_y^{(j)}(+0)$:

$$E_y^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{yn}^{(j)},$$

затем полученное выражение и соотношение (49) – в (50), учитывая (36), (39) и (43), получим формулу для поверхностного импеданса S-волны:

$$Z_S^{(j)} = -\frac{2ic\omega}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+j} + 1]/2}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k_n) - c^2 k_n^2}. \quad (51)$$

где $j=1, 2$ и $k_n = \sqrt{k_x^2 + (\pi n/d)^2}$.

Как и в случае Р-волны, эта формула совпадает с формулой из работ [8–10] в случае зеркального отражения электронов от поверхностей слоя электронной плазмы. Для нечётной моды ($j = 1$) суммирование ведётся по всем нечётным $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, а в случае чётной моды ($j = 2$) – по всем чётным $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

В случае однородной изотропной среды без пространственной дисперсии подставим поперечную диэлектрическую проницаемость (46) в формулу (51) и выполним суммирование с учётом формул (47). В результате получим

поверхностный импеданс S-волны для слоя среды без пространственной дисперсии ($j = 1, 2$):

$$Z_S^{(j)} = \frac{i^{3-2j}}{\sqrt{\epsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2}} \operatorname{tg}^{3-2j} \left(\frac{\omega d}{2c} \sqrt{\epsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2} \right).$$

К этой формуле можно прийти другим способом, рассматривая моды S-волны внутри слоя среды без пространственной дисперсии.

Заключение

В данной работе исследованы плоские монохроматические электромагнитные P- и S-волны внутри плоского слоя однородной изотропной немагнитной среды, обладающей пространственной дисперсией. При этом диэлектрическая функция отклика слоя среды обладает зеркальной симметрией относительно границ слоя. Для случаев чётной и нечётной моды электромагнитного поля внутри слоя среды с помощью разложения величин поля в ряд Фурье вычислены поверхностные импедансы данного слоя. Полученные формулы для поверхностных импедансов совпадают с формулами для импедансов, найденными ранее Кливером и Фуксом для плоского слоя электронной плазмы при зеркальном отражении электронов от поверхностей слоя. Отмечено, что полученные формулы для поверхностных импедансов пригодны также и в случае среды без пространственной дисперсии.

Полученные формулы для поверхностных импедансов целесообразно использовать при исследовании взаимодействия электромагнитного излучения с плоскими тонкими слоями веществ, обладающих пространственной дисперсией и имеющих зеркально-симметричную относительно границ слоя диэлектрическую функцию отклика. Кроме того, данные формулы пригодны также и для изучения проблем возникновения и распространения излучения в таких слоях.

БЛАГОДАРНОСТИ / ACKNOWLEDGMENTS

Автор выражает благодарность профессору Юшканову А.А. за плодотворные обсуждения и активную поддержку. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-7359-2016-9, а также грантов РФФИ № 14-07-90009 Бел_a и № 14-47-03608 p_центр_a.

The author is grateful to Professor Yushkanov A.A for fruitful discussions and active support. This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation МК-7359-2016-9, as well as RFBR grants No. 14-07-90009 Bel_a and No. 14-47-03608 p_centra.

Статья поступила в редакцию 31.01.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелокальные эффекты в электродинамике металлических пластин / Парадес-Хуарес А., Диас-Монхе С., Макаров М.Н., Перес-Родригес Ф. // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 90. Вып. 9. С. 687–692.

2. Электромагнитные экраны инфракрасного диапазона на основе наноразмерных слоёв металла, SiO₂ и SiO / Давидович М.В., Яфаров Р.К., Доронин Д.М., Шиловский П.А. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 2. С. 19–21.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Взаимодействие электромагнитной E-волны с металлической плёнкой, расположенной между двумя диэлектрическими средами // Оптика и спектроскопия. 2012. Т. 112. № 1. С. 139–146.
4. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Influence of Specularity Coefficients on the Interaction of Electromagnetic H-Wave with the Thin Metal Film is Disposed on the Dielectric Substrate // International Journal of Mathematics and Computational Science. 2015. V. 1. No. 2. P. 21–24.
5. Зверев Н.В., Юшканов А.А. Квантовая электронная плазма, металлическая плёнка и электромагнитное излучение // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 18–29.
6. Yushkanov A.A., Zverev N.V. Quantum electron plasma, visible and ultraviolet P-wave and thin metallic film // Physic Letters A. 2017. Vol. 381. Iss. 6. P. 679–684.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Учебное пособие // Теоретическая физика в 10 томах. 4-е изд., стереотипное. М.: Физматлит, 2005. Том 8. 652 с.
8. Kliewer K.L., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence // Physical Review. 1968. Vol. 172. Iss. 3. P. 607–624.
9. Jones W.E., Kliewer K.L., Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films // Physical Review. 1969. Vol. 178. Iss. 3. P. 1201–1203.
10. Kliewer K.L., Fuchs R. Surface Plasmon in a Semi-Infinite Free Electron Gas // Physical Review B. 1971. Vol. 3. Iss. 7. P. 2270–2278.
11. Кондраченко А.Н. Проникновение поля в плазму. М.: Атомиздат, 1979. 232 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд., перераб. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

REFERENCES

1. Parades-Jubrez A., Dñaz-Monche S., Makarov M.N, Pñrez-Rodrñguez F. Nelokal'nye efekty v elektrodinamike metallicheskih plastin [Nonlocal effects in the electrodynamics of metal plates]. In: *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Letters to Journal of experimental and theoretical physics], 2009, vol. 90, iss. 9, pp. 687–692.
2. Davidovich M.V., Yafarov R.K., Doronin D.M., Shilovskii P.A. Elektromagnitnye ek-rany infrakrasnogo diapazona na osnove nanorazmernykh sloev metalla, SiO₂ i SiO [Electromagnetic IR screens based on nanolayers of metal, SiO₂ and SiO] In: *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of Wave Processes and Radio Systems], 2012, vol. 15, no. 2, pp. 19–21.
3. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Vzaimodeystvie elektromagnitnoi E-volny s metallicheskoj pl'enkoi, raspolozhennoi mezhdvu dvumya dielektricheskimi sredami [Interaction of electromagnetic E-waves with a metal film sandwiched between two dielectric media] In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2012, vol. 112, no. 1, pp. 139–146.
4. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Influence of Specularity Coefficients on the Interaction of Electromagnetic H-Wave with the Thin Metal Film is Disposed on the Dielectric Substrate. In: *International Journal of Mathematics and Computational Science*, 2015, vol. 1, no. 2, pp. 21–24.
5. Zverev N.V., Yushkanov A.A. Kvantovaya elektronnaya plazma, metallicheskaya pl'enka i elektromagnitnoe izluchenie [Quantum electron plasma, metal film and electromagnetic

- radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 18–29.
6. Yushkanov A.A., Zverev N.V. Quantum electron plasma, ultraviolet and visible P-wave and thin metallic film. In: *Physic Letters A*, 2017, vol. 381, iss. 6, pp. 679–684.
 7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Electrodynamics of Continuous Media* (Volume 8 of A Course of Theoretical Physics) Oxford, Pergamon Press 1960.
 8. Kliewer K.L., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence. In: *Physical Review*, 1968, vol. 172, iss. 3, pp. 607–624.
 9. Jones W.E., Kliewer K.L., Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films. In: *Physical Review*, 1969, vol. 178, iss. 3, pp. 1201–1203.
 10. Kliewer K.L., Fuchs R. Surface Plasmon in a Semi-Infinite Free Electron Gas. In: *Physical Review B*, 1971, vol. 3, iss. 7, pp. 2270–2278.
 11. Kondratenko A.N. *Proniknovenie polya v plazmu* [The penetration of the field into the plasma]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979. 232 p.
 12. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Table of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 1100 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Зверев Николай Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nikolai V. Zverev – PhD in Physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зверев Н.В. Поверхностные импедансы плоского слоя среды с зеркально-симметричной функцией диэлектрического отклика // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 23–37.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-23-37.

FOR CITATION

Zverev N.V. Surface Impedances of a Flat Layer of a Medium with a Mirror-Symmetric Dielectric Response Function. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 23–37.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-23-37.