

УДК 517.55

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ЯДРАМИ ПУАССОНА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Антоненкова О.Е., Часова Н.А.

*Брянский государственный инженерно-технологический университет
241037, г. Брянск, проспект Станке Димитрова, 3, Российская Федерация*

Аннотация. Пространства Харди играют огромную роль в комплексном анализе и его многочисленных приложениях. Однако, в отличие от одномерного случая, пространства типа Харди в поликруге исследованы сравнительно мало. В данной работе получены интегральные представления классов n -гармонических в поликруге U^n функций. В частности, даётся характеристика n -гармонических в поликруге функций, допускающих представление в виде кратного интеграла Пуассона от измеримых на остоле поликруга функций из класса $L^{\vec{p}}(T^n)$, где $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$. При доказательстве основного результата используются общие методы комплексного и функционального анализа, теории классов Харди.

Ключевые слова: интегральный оператор, ядро Пуассона, n -гармоническая функция, поликруг.

ABOUT INTEGRAL OPERATORS WITH POISSON KERNELS IN HARDY-TYPE SPACES IN POLYDISC WITH MIXED NORM

O. Antonenkova, N. Chasova

*Bryansk State Technological University of Engineering
3 prospect Stanke Dimitrova, Bryansk 241037, Russian Federation*

Abstract. Hardy spaces play an important role in the complex analysis and its numerous applications. However, unlike a one-dimensional case, the Hardy-type spaces in a polydisc are investigated a little. In this paper, the integral representations of the classes of n -harmonic in a polydisc U^n functions are received, in particular the characterization of n -harmonic functions in a polydisc which can be represented as a multiple Poisson integral from functions, measurable on a skeleton of a polydisc, from a $L^{\vec{p}}(T^n)$, class where $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$. is given. At the proof of the main result the general methods of the complex and functional analysis, theory of Hardy classes is used.

Key words: integral operator, Poisson kernel, n -harmonic function, polydisc.

Как известно, интегральные представления играют важнейшую роль в комплексном анализе и его многочисленных приложениях. Для примера напомним классические формулы Коши, Шварца, Пуассона и интегральные представления с воспроизводящими ядрами [1–3]. Они выражают значения функции, голоморфной в некоторой области, через её значения на границе или на осто́ве этой области, что позволяет упростить исследование различных пространств голоморфных функций.

Исследование структуры этих пространств посредством интегральных представлений служит мощным толчком к развитию целого ряда важных направлений как в теории голоморфных функций (граничные свойства, задачи аппроксимации и интерполяции, вопросы факторизации и т.д.), так и в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных интегральных операторов и в других вопросах комплексного и гармонического анализа. Следует отметить, что в одномерном случае указанные вопросы изучены довольно полно [1; 3]. В тоже время интегральные представления в различных многомерных областях комплексного пространства исследованы сравнительно мало, несмотря на то, что эти представления имеют важные приложения в теории кратных тригонометрических рядов, в теории функций нескольких комплексных переменных и в многомерном гармоническом анализе.

В последнее время ряд учёных занимается изучением широкого круга задач, связанных с интегральными представлениями как в единичном круге [4; 5], так и в различных областях пространств R^n и C^n [6–9]. Это и описание сопряжённых пространств, и построение линейных непрерывных функционалов на этих пространствах, и исследование ограниченности теплицевых операторов и др.; для примера укажем на работы [10; 11].

В данной работе получены интегральные представления классов n -гармонических в поликруге U^n функций с граничными значениями из классов измеримых на осто́ве поликруга функций со смешанной нормой. Аналогичные результаты в различных областях комплексного пространства рассматриваются и в работах других авторов, например, интегральные представления с ядрами Пуассона и Пуассона-Бергмана для гармонических в шаре функций с конечной смешанной нормой рассмотрены в работе [12].

Введём обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_i| < 1, i = \overline{1, n}\}$ – единичный поликруг в n -мерном комплексном пространстве C^n , $T^n = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : |\zeta_i| = 1, i = \overline{1, n}\}$ – его осто́в. Пусть $Q_n = [-\pi, \pi] \times \dots \times [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]^n$ – декартово произведение n экземпляров отрезка $[-\pi, \pi]$; $I^n = [0, 1) \times \dots \times [0, 1) = [0, 1)^n$.

Через $\bar{L}^p(T^n)$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$ будем обозначать пространство измеримых на T^n функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(T^n)} = \|f\|_{\vec{p}} = \left\| \cdots \left\| \|f\|_{p_1} \right\|_{p_2} \cdots \right\|_{p_n} =$$

$$= \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{p_2/p_1} dm_1(\zeta_2) \right)^{p_3/p_2} \cdots dm_1(\zeta_n) \right)^{1/p_n},$$

где $T = T^1$, dm_1 – линейная мера Лебега на T .

Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $0 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, тогда обобщённые пространства Харди $H^{\vec{p}}(U^n)$ со смешанными нормами определим как пространства голоморфных в U^n функций, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(r\zeta)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{p_2/p_1} dm_1(\zeta_2) \right)^{p_3/p_2} \cdots dm_1(\zeta_n) \right)^{1/p_n} < \infty,$$

где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$. Соответствующие пространства n -гармонических в U^n функций обозначим через $h^{\vec{p}}(U^n)$. Изучение основных свойств обобщённых пространств Харди в поликруге со смешанной нормой впервые начато в работах [13–16].

Функция $u(z_1, \dots, z_n)$, определённая на открытом множестве в C^n , называется n -гармонической, если u – гармоническая по каждому переменному в отдельности, то есть если $z_k = x_k + iy_k$, $k = \overline{1, n}$, то $u(z_1, \dots, z_n)$ удовлетворяет n уравнениям

$$\Delta_k u = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{где } \Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

Ядром Пуассона $P(z, \zeta)$ в поликруге, где $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$, $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$, $\zeta_k = e^{i\varphi_k}$, $k = \overline{1, n}$, назовём произведение:

$$P(z, \zeta) = P_{n_1}(\theta_1 - \varphi_1) \cdots P_{n_n}(\theta_n - \varphi_n),$$

здесь $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$ – обычное ядро Пуассона для единичного круга.

Каждую функцию $f \in L^{\vec{p}}(T^n)$ можно n -гармонически продолжить в единичный поликруг следующим образом:

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P(z, \zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n. \quad (1)$$

Возникает вопрос, как охарактеризовать те n -гармонические в U^n функции, которые допускают представление вида (1). В частном случае, когда

$p_1 = \dots = p_n = p$, $1 < p < +\infty$, такая задача была решена У. Рудиным (см. [2; 17]). Обобщим эти результаты на случай $L^{\bar{p}}(T^n)$ -пространств.

При доказательстве основной теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Теорема А (см. [3]). Если V – окрестность нуля в сепарабельном топологическом векторном пространстве X , а $\{\Lambda_n\}$ – такая последовательность в сопряжённом пространстве X^* , что $|\Lambda_n x| \leq 1$, ($x \in V$, $n = 1, 2, 3, \dots$), то найдётся такая подпоследовательность $\{\Lambda_{n_i}\} \subset \{\Lambda_n\}$ и такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda x = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{n_i} x$ для всех $x \in X$.

Теорема Б (см. [18]). Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i < +\infty$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$,

$i = \overline{1, n}$. $J(f)$ является непрерывным линейным функционалом на нормированном пространстве $L^{\bar{p}}$ тогда и только тогда, когда существует единственная функция $g(x) \in L^{\bar{q}}$, такая что $J(f) = \int g(x)f(x)d\mu(x)$ и $\|J\| = \|g\|_{L^{\bar{q}}}$.

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема. Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) n -гармоническая в U^n функция и допускает представление:

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P(z, \zeta) f(\zeta) d\mu_n(\zeta), \text{ где } f \in L^{\bar{p}}(T^n), z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n;$$

2) $u \in h^{\bar{p}}(U^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^{\bar{p}}(T^n)$. Для данного r в силу свойства $P_r(\varphi + 2\pi) = P_r(\varphi)$ и 2π -периодичности функции f по каждой переменной можно записать:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\theta - s) P_r(s) ds, \quad (2)$$

где $re^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})$, $ds = ds_1 \dots ds_n$.

Для любого u справедливо равенство $\|u\|_{\bar{p}} = \sup_{\|g\|_{\bar{q}}=1} \int u(\zeta) g(\zeta) |d\zeta|$,

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $|d\zeta| = |d\zeta_1| \dots |d\zeta_n|$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$ (см. [5]).

Подберём функцию $g \in L^{\bar{q}}(T^n)$ такую, что $\|g\|_{\bar{q}} = 1$ и

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) g(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Используя (2) и применяя теорему Фубини, будем иметь:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \left(\int_{Q^n} f(\theta - s) P_r(s) ds \right) g(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} P_r(s) f(\theta - s) g(\theta) d\theta ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} P_r(s) \left(\int_{Q^n} f(\theta - s) g(\theta) d\theta \right) ds.$$

Применяя к внутреннему интегралу обобщённое неравенство Гельдера и используя то, что $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(s) ds = 1$, $\|g\|_{\bar{q}} = 1$, получим:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(s) \|f\|_{\bar{p}} \|g\|_{\bar{q}} ds = \|f\|_{\bar{p}}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть u – n -гармоническая в U^n и такая, что

$$\sup_{r \in I^n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty.$$

Докажем, что существует функция $f \in \bar{L}^{\bar{p}}(T^n)$ такая, что

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Поскольку $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, то из результатов работы [18]

следует, что $(\bar{L}^{\bar{p}})^* = L^{\bar{q}}$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Положим

$$u_m(\theta) = u\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)e^{i\theta}\right), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (3)$$

По условию теоремы имеем: $\|u_m\|_{L^{\bar{p}}} \leq c$. Рассмотрим на пространствах $L^{\bar{q}}(T^n)$ последовательность линейных непрерывных функционалов $\Phi_m(g) = \int_{T^n} g(\zeta) u_m(\zeta) |d\zeta|$, где $\zeta_j = e^{i\theta_j}$, $j = \overline{1, n}$ и $g \in L^{\bar{q}}(T^n)$ в шаре радиуса 1, т.е.

$\|g\|_{L^{\bar{q}}} \leq 1$. Тогда $|\Phi_m(G)| \leq \|g\|_{L^{\bar{q}}} \|u_m\|_{L^{\bar{p}}} \leq c \|g\|_{L^{\bar{q}}} \leq c$, т.е. последовательность функционалов $\{\Phi_m\}$ ограничена по совокупности на шаре радиуса 1. По теореме А найдётся такая подпоследовательность $\{\Phi_{m_k}\} \subset \{\Phi_m\}$ и такой функционал $\Phi \in (\bar{L}^{\bar{p}})^*$, что для всех $g \in L^{\bar{q}}(T^n)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{m_k}(g) = \Phi(g)$, где Φ – линейный непрерывный функционал на $L^{\bar{q}}(T^n)$. Следовательно, так как $(\bar{L}^{\bar{p}})^* = L^{\bar{q}}$, то по теореме Б существует $f \in \bar{L}^{\bar{p}}(T^n)$ такая, что $\Phi(g) = \int_{T^n} f(\zeta) g(\zeta) |d\zeta|$, где $\zeta_j = e^{i\theta_j}$, $j = \overline{1, n}$. Для любого m

функция $u_m(\theta) = u\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)e^{i\theta}\right)$ – n -гармоническая в $\left\{ |z| < \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \right\}$. Так что, если

$r_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, то, используя (3), имеем:

$$u_{m_k}(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) u_{m_k}(e^{it}) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) u_{m_k}(t) dt.$$

Так как $g(t) = P_r(\theta) \in L^{\bar{q}}$, тогда

$$\lim_{\rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) u_m(t) dt = \Phi(g) = \int_{T^n} g(t) f(t) dt = \int_{T^n} P_r(\theta) P_r(\theta) f(t) dt.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi u_{m_k}(re^{i\theta}) = 2\pi u(re^{i\theta})$, то получаем:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные результаты можно установить и в других областях n -мерного комплексного пространства C^n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О.И., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974. 160 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 475 с.
4. Андрейчик М.Н., Коптенко Е.В., Орлова А.А. Интегральные операторы в весовых пространствах измеримых функций // Молодой учёный. 2013. № 11. С. 1–5.
5. Смирнова И.Ю., Карапетянц А.Н. О связи весовых пространств Бергмана со смешанной нормой на верхней полуплоскости и единичном диске с пространствами Харди // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 4. С. 19–21.
6. Аветисян К., Гапоян Н. Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из C^n // Известия Национальной Академии наук Республики Армения. Математика. 2016. Т 51. № 5. С. 3–12.
7. Махина Н.М. О сопряжённых пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.
8. Petrosyan A.I., Avetisyan K.L. Weighted spaces of functions harmonic in the unit ball // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences 2017. no. 51(1). pp. 3–7.
9. Petrosyan A.I., Mkrtchyan E.S. Duality in Spaces of Functions Harmonic in the Unit Ball // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2013. no. 3. pp. 29–36.
10. Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Теплицевы операторы и вопросы деления в некоторых классах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 3. С. 341–345.
11. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. Брянск: РИО БГУ, 2014. 250 с.
12. Аветисян К, Тоноян Е. Об операторе дробного интегродифференцирования в R^n // Известия Национальной академии наук Армении. Математика. 2015. Т 50. № 5. С. 3–16.

13. Часова Н.А., Шамоян Ф.А. Диагональное отображение в обобщённых пространствах Харди в поликруге // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2003. Т. 303. № 31. С. 218–222.
14. Часова Н.А., Шамоян Ф.А. Диагональные отображения в пространствах Харди со смешанной нормой // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань. 2003. Т. 19. С. 226–227.
15. Шамоян Ф.А., Часова Н.А. Описание линейных непрерывных функционалов в пространствах Харди со смешанными нормами в поликруге // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2001. С. 285–286.
16. Chasova N.A., Shamoyan F.A. The diagonal mapping in generalized hardy spaces in the polydisk // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2005. Vol. 129. Iss. 4. P. 4049–4052.
17. Rudin W., Stout E.L. Boundary properties of functions of several complex variable // Journal of Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 14. P. 991–1006.
18. Benedek A., Panzone R., The spaces L^p with mixed norm // Duke Mathematical Journal. 1961. Vol. 28. № 3. P. 301–324.

REFERENCES

1. Besov O.I., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. *Integral'nye predstavleniya funktsii i teoremy vloženiya* [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 480 p.
2. Rudin U. *Teoriya funktsii v polikrugu* [The theory of functions in policrome]. Moscow, Mir Publ., 1974. 160 p.
3. Rudin U. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Mir Publ., 1975. 475 p.
4. Andreichik M.N., Koptenok E.V., Orlova A.A. [Integral operators in weighted spaces of measurable functions]. In: *Molodoi uchenyi* [Young Scientist], 2013, no. 11, pp. 1–5.
5. Smirnov I.Yu., Karapetyants A.N. [About the relationship weight Bergman spaces with mixed norm in the upper half plane and unit disk hardy spaces]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki* [Scientific-educational and applied journal. University News North-Caucasian Region. Natural Sciences Series], 2012, no. 4, pp. 19–21.
6. Avetisyan K., Gapoyan N. [Operators of Bergman type on spaces with mixed norm in a ball from C^n]. In: *Izvestiya Natsional'noi Akademii nauk Respubliki Armeniya. Matematika* [Proceedings of NAS RA. Mathematics], 2016, vol. 51, no. 5, pp. 3–12.
7. Makhina N.M. [Connected spaces to some weighted spaces of analytic functions]. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Herald], 2015, no. 2. pp. 420–423.
8. Petrosyan A.I., Avetisyan K.L. [Weighted spaces of functions harmonic in the unit ball]. In: *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, no. 51(1), pp. 3–7.
9. Petrosyan A.I., Mkrtchyan E.S. [Duality in Spaces of Functions Harmonic in the Unit Ball]. In: *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, no. 3, pp. 29–36.

10. Antonenkova O.E., Chasova N.A. [Teplitzky operators and division questions in some classes in polichrome holomorphic functions with mixed norm]. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Herald], 2015, no. 3, pp. 341–345.
11. Shamoyan F.A. *Vesovye prostranstva analiticheskikh funktsii so smeshannoi normoi* [The weight space of analytic functions with mixed norm], Bryansk, RIO BGU Publ., 2014. 250 p.
12. Avetisyan K., Tonoyan E. [Operator of fractional integro-differentiation in R^n]/ In: *Izvestiya Natsional'noi Akademii nauk Respubliki Armeniya. Matematika* [Proceedings of NAS RA. Mathematics], 2015, vol. 50, no. 5, pp. 3–16.
13. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [Diagonal mapping in generalized hardy spaces in polichrome]. In: *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN* [Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI], 2003, vol. 303, no. 31, pp. 218–222.
14. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [Diagonal display in Hardy's spaces with a mixed norm]. In: *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo*. [Works of mathematical center named after N.I. Lobachevsky], Kazan, 2003, vol. 19, pp. 226–227.
15. Shamoyan F.A., Chasova N.A. [Description of continuous linear functionals in Hardy's spaces with mixed norms in polichrome]. In: *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy: tezisy dokladov Voronezhskoi zimnei matematicheskoi shkoly* [Modern methods of the theory of functions and related problems: abstracts of the Voronezh Winter Mathematical School]. Voronezh, 2001. pp. 285–286.
16. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [The diagonal mapping in generalized hardy spaces in the polydisk]. In: *Journal of Mathematical Sciences*, New York, 2005, vol. 129, iss. 4, pp. 4049–4052.
17. Rudin W., Stout E.L. [Boundary properties of functions of several complex variable]. In: *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 14, pp. 991–1006.
18. Benedek A., Panzone R. [The spaces with mixed norm]. In: *Duke Mathematical Journal*, 1961, vol. 28, no. 3, pp. 301–324.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Антоненкова Ольга Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета;
e-mail: anto-olga@yandex.ru;

Часова Наталья Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета;
e-mail: chasnat@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga E. Antonenkova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics, Bryansk State Technological University of Engineering;
e-mail: anto-olga@yandex.ru;

Nataliya A. Chasova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics, Bryansk State Technological University of Engineering;
e-mail: chasnat@bk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Об интегральных операторах с ядрами Пуассона в пространствах типа Харди в поликруге со смешанной нормой // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 14–23. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

FOR CITATION

Antonenkova O.E., Chasova N.A. About integral operators with Poisson kernels in Hardy-type spaces in polydisc with mixed norm. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 14–23. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 535-3

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-24-38

СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ИСТОЧНИКОВ УФ-ИЗЛУЧЕНИЯ БАКТЕРИЦИДНОГО ДИАПАЗОНА

**Бугаев А.С.¹, Шешин Е.П.¹, Озол Д.И.¹, Мье М.М.¹, Данилкин М.И.²,
Верещагина Н.Ю.²**

¹ *Московский физико-технический институт*

141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Российская Федерация

² *Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН*

119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53, Российская Федерация

Аннотация. В последние десятилетия стремительно расширяется область применения ультрафиолетовых источников излучения. Они находят многочисленные бытовые, медицинские и промышленные применения, в особенности для обеззараживания воздуха, воды и поверхностей. Для этих целей наиболее эффективно УФ-излучение так называемого бактерицидного диапазона. Наибольшее распространение получили ртутные лампы низкого и среднего давления. Однако в настоящее время усилились тенденции к исключению ртути не только из бытового, но и промышленного оборота. Этим вызвана необходимость развития не содержащих ртути УФ-источников. Такими являются эксимерные лампы, УФ-излучающие светодиоды, а также представители нового направления – катодолюминесцентные УФ-источники, в особенности с автоэмиссионным катодом.

Ключевые слова: ультрафиолет, обеззараживание, бактерицидный диапазон, катодолюминесценция, автоэмиссия

MODERN TRENDS IN THE DEVELOPMENT OF UV-SOURCES OF GERMICIDAL RANGE

A. Bugaev¹, E. Sheshin¹, D. Ozol¹, M. Myo¹, M. Danilkin², N. Vereschagina²

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*

Institutskii pereulok 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

² *P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences*

Leninsky prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

© Бугаев А.С., Шешин Е.П., Озол Д.И., Мье М.М., Данилкин М.И., Верещагина Н.Ю., 2017.