

УДК 534.232

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-72-81

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Неверов А.Н.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

125319, Москва, Ленинградский пр., 64, Российская Федерация

Аннотация. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование свойств сухого плоского акустического контакта. Показано, что контакт может быть генератором высших гармоник. Их экспериментальному наблюдению способствуют резонансные явления. При субгармоническом возбуждении удалось получить сигналы второй, третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник основного сигнала.

Ключевые слова: колебания, амплитуда, резонанс, высшие гармоники, контакт, соленоид, преобразователь.

GENERATION OF HIGHER HARMONICS IN COMPOSITE ROD VIBRATION SYSTEMS

A. Neverov

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)

Leningradsky prosp. 64, 125319 Moscow, Russian Federation

Abstract. The properties of a dry flat acoustic contact are studied theoretically and experimentally. It is shown that the contact can be a generator of higher harmonics. It is found that resonance phenomena contribute to their experimental observation. In the case of subharmonic excitation it is possible to obtain the signals of the second, third, fifth, seventh and ninth harmonics of the basic signal.

Key words: vibration, amplitude, resonance, higher harmonics, acoustic contact, solenoid, transducer.

Введение.

Постановка задачи

Факт зависимости параметров составных колебательных систем от усилия статического сжатия элементов известен достаточно давно [1–3]. Во всех этих работах поверхности акустического контакта считались абсолютно гладкими, геометрия же контактирующих поверхностей специально оговаривается лишь в работе [3] (в ней рассматривается контакт сферического наконечника стержневой колебательной системы с плоской поверхностью полупространства).

С другой стороны, авторами ряда теоретических и экспериментальных работ исследовались нелинейные эффекты при отражении упругих волн от поверхности сухого контакта двух полубесконечных твёрдых тел [4–8]. В фундаментальной работе [4] даётся анализ нелинейной динамики системы, которая представляет собой две упругие полубесконечные линейные среды, разделённые несвязанной плоской поверхностью. Эта несвязанная плоская поверхность – зазор, по определению, не может выдерживать растягивающие напряжения и поэтому раскрывается в фазе растяжения распространяющегося возмущения механического напряжения, если не был уже открыт. Открытие и закрытие зазора представляют собой источник нелинейности рассматриваемой системы. Это, по мнению автора, простейшая нелинейная задача, содержащая сплошную среду. В случае падающей синусоидальной волны эффективность генерации второй гармоники определяется как функция отношения постоянного гидростатического давления к амплитуде напряжения (механического) падающей волны. Эта работа объяснила экспериментальные результаты, полученные в [5].

В работе [6] контакт аппроксимируется ансамблем одинаковых пружинок различной длины. При этом, в отличие от [4], контакт может не раскрываться полностью.

Аналитические соотношения

В настоящей работе исследуется возможность генерации гармоник в составных ультразвуковых колебательных системах за счёт нелинейности, обусловленной шероховатостью поверхностей соединяемых элементов.

Расчет ведётся на основе стержневой модели. Такая модель приведена на рис. 1.

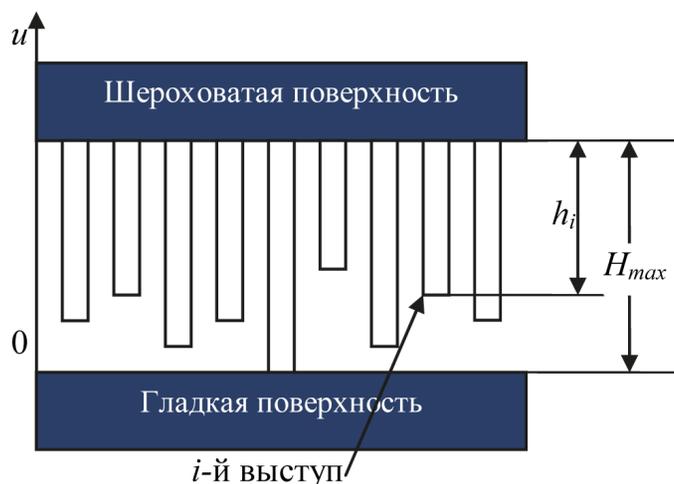


Рис. 1. Стержневая модель контакта

Контакт двух шероховатых поверхностей описывается как контакт гладкой поверхности с шероховатой, параметры опорной кривой которой b_s и v_s определяются по формулам:

$$b_S = k_{v1,2} b_{S1} b_{S2} \frac{(H \max_1 + H \max_2)^{v_{S1} + v_{S2}}}{H^{v_{S1}} \max_1 \cdot H^{v_{S2}} \max_2}; \quad v_S = v_{S1} + v_{S2},$$

где b_{S1} , v_{S1} , b_{S2} , v_{S2} – параметры опорных кривых контактирующих поверхностей, $H \max_1$, $H \max_2$ – максимальные высоты их неровностей,

$$k_{v1,2} = \frac{v_{S1} \cdot v_{S2}}{v_{S1} + v_{S2}} \cdot \frac{\Gamma(v_{S1})\Gamma(v_{S2})}{\Gamma(v_{S1} + v_{S2})}.$$

Шероховатая поверхность моделируется набором однородных стержней различной высоты. Эта модель физически вполне обоснована, так как, хотя площадь пятна касания каждого отдельного выступа увеличивается при сближении поверхностей, средняя площадь пятна касания остаётся практически неизменной из-за того, что в контакт вступают всё новые и новые выступы. Распределение выступов по длине задаётся функцией $n(\varepsilon)$.

Пусть гладкая поверхность сближается с линией впадин шероховатой поверхности на величину u (координата $u = 0$ соответствует линии выступов). При этом сила, воздействующая на i -й выступ высоты h_i в соответствии с законом Гука должна быть равна

$$F_i = ES_i \frac{h_i + u - H \max}{h_i}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, S_i – площадь сечения i -го выступа, $H \max$ – наибольшая высота неровностей профиля шероховатой поверхности.

Выражение (1) может быть приведено к виду:

$$F_i = ES_i \frac{x - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \tilde{I}(x - \varepsilon_i), \quad (2)$$

где $x = \frac{u}{H \max}$ – относительное сближение поверхностей, $\varepsilon_i = 1 - \frac{h_i}{H \max}$,

$\tilde{I}(x - \varepsilon_i)$ – единичная функция Хевисайда.

Сила, воздействующая на все выступы шероховатой поверхности, определится суммированием выражений (2) по всей поверхности:

$$F(x) = \sum ES_i \frac{-\varepsilon}{-\varepsilon} I(x - \varepsilon_i), \quad (3)$$

где N – число контактирующих выступов. Так как это число велико, сумма в (3) может быть заменена интегралом:

$$F(x) = ES \int_0^x \frac{x - \varepsilon}{1 - \varepsilon} n'(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4)$$

где $S(x) = \sum_{i=1}^{N(x)} S_i$ – номинальная площадь контакта, функция $n = n(\varepsilon)$ представля-

ет собой уравнение опорной кривой шероховатой поверхности, штрихом помечено дифференцирование по ε . На практике всегда выполняются соотношения $0 \leq \varepsilon \leq x \ll 1$. В этом случае начальный участок опорной кривой шероховатой поверхности может быть аппроксимирован степенной функцией

$$n(\varepsilon) = b\varepsilon^\nu, \quad (5)$$

где b и ν – параметры опорной кривой.

Подставляя (5) в (4), представляя знаменатель подынтегрального выражения в виде ряда и, интегрируя, получаем:

$$F(x) = ESbv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\nu+1}}{(n+\nu)(n+\nu+1)} \quad (6)$$

Пусть поверхности стянуты статической силой P_0 , а закон колебаний задан в виде $u_m \cos \omega t$, где t – время, u_m – амплитуда колебательного смещения в нём, ω – круговая частота колебаний. Тогда смещение в контакте u будет представлять собой сумму статического смещения u_0 и синусоидального колебания с частотой ω и амплитудой u_m и может быть записано в виде:

$$u = u_0 + u_m \cos \omega t, \text{ или } x = x_0 + x_m \cos \omega t \quad (7)$$

Акустический контакт не разрывается при $u_0 \geq u_m$. Для подсчёта амплитуд гармоник подставим (7) в (6) и разложим полученное выражение в ряд Тейлора, который должен сходиться. Ограничиваясь в разложении членами порядка x_m^5 , получаем:

$$F = F_0 + F_1 \cos \omega t + F_2 \cos 2\omega t + F_3 \cos 3\omega t + F_4 \cos 4\omega t + F_5 \cos 5\omega t + \dots, \quad (8)$$

где F_0 – постоянная составляющая силы, $F_1 \div F_5$ – амплитуды 1–5 гармоник силы, причём

$$F_0 = ESb \left[\frac{x_0^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\nu}{4} x_0^{\nu-1} x_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} x_0^{\nu-3} x_m^4 + \dots \right], \quad (9)$$

$$F_1 = ESb \left[x_0^\nu x_m + \frac{\nu(\nu-1)}{8} x_0^{\nu-2} x_m^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{64} x_0^{\nu-4} x_m^5 + \dots \right], \quad (10)$$

$$F_2 = ESb \left[\frac{\nu}{4} x_0^{\nu-1} x_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} x_0^{\nu-3} x_m^4 + \dots \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= ESb \left[\frac{v(v-1)}{24} \varepsilon_0^{v-2} \varepsilon_m^3 + \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)}{384} \varepsilon_0^{v-4} \varepsilon_m^5 + \dots \right] = \\
 &= ESb \frac{v(v-1)}{24} \varepsilon_0^{v-2} \varepsilon_m^3 \left(1 + \frac{(v-2)(v-3)}{16} \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 + \dots) \right), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$F_4 = ESb \frac{v(v-1)(v-2)}{192} \varepsilon_0^{v-3} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad (13)$$

$$F_5 = ESb \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)}{384} \varepsilon_0^{v-4} \varepsilon_m^5 + \dots \quad (14)$$

При $\varepsilon_m = 0$ постоянная составляющая силы F_0 равна статической силе P_0 . Тогда, ограничиваясь в (8) первым членом разложения, получаем:

$$x_0 = \left(\frac{P_0(v+1)}{ESb} \right)^{\frac{1}{v+1}}. \quad (15)$$

Для расчёта составных стержневых ультразвуковых колебательных систем необходимо знать величину эквивалентной податливости акустического контакта по первой гармонике C_{J1} . Её легко определить в линейном приближении при помощи (10):

$$C_{J1} = \frac{u}{F_1} = \frac{\varepsilon_m H \max}{F_1} \approx \frac{1}{ESb} \left(\frac{ESb}{(v+1)P_0} \right)^{\frac{v}{v+1}} = \left(\frac{ESb}{((v+1)P_0)^v} \right)^{\frac{1}{v+1}}.$$

Учитывая только первое слагаемое формулы (10), получаем связь между относительным смещением в контакте ε_m и первой гармоникой действующей силы F_1 :

$$\varepsilon_m = \frac{F_1}{ESb} \left(\frac{ESb}{(v+1)P_0} \right)^{\frac{v}{v+1}}. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в уравнения (8)–(13), получаем для амплитуды n -й гармоники:

$$F_2 = \frac{v}{4(v+1)} \frac{F_1}{P_0} F_1;$$

$$F_3 = \frac{v(v-1)}{24(v+1)^2} \left(\frac{F_1}{P_0} \right)^2 F_1;$$

$$F_4 = \frac{v(v-1)(v-2)}{192(v+1)^3} \left(\frac{F_1}{P_0} \right)^3 F_1;$$

$$F_5 = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1920(\nu+1)^4} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^4 F_1.$$

...

$$F_n = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{n-1}(\nu+1)^{n-1} \Gamma(n+1)\Gamma(\nu-n)} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^{n-1}$$

$$F_1 = \frac{1}{B(n+1, \nu-n)} \left(\frac{F_1}{2(\nu+1)P_0}\right)^{n-1} F_1, \quad (13)$$

где $B(n+1, \nu-n)$ – бета-функция, $\Gamma(n+1)$, $\Gamma(\nu-n)$, $\Gamma(\nu+1)$, – гамма-функции от соответствующих аргументов.

Эксперимент

Полученные соотношения проверялись на электромагнитном соединении волноводов, так как в этом случае предположения, при которых проводились вычисления, выполняются в максимальной степени.

Исследуемая колебательная система представляла собой два идентичных пакетных пьезопреобразователя, один из которых использовался как источник продольных упругих колебаний, а другой – в качестве их приёмника. Конструкция преобразователей подбиралась таким образом, чтобы они при расчёте могли аппроксимироваться однородными стержнями. Частотопонижающие накладки преобразователей изготавливались из ферромагнитного материала – стали 45.

Характеристические сопротивления преобразователей были равны. Собственные частоты преобразователей составляли $22,6 \pm 0,05$ кГц. Преобразователи подвешивались на длинных тонких нитях и помещались в соленоид. Преобразователь-источник возбуждался гармоническим сигналом от генератора звуковой частоты. Частота возбуждающего сигнала определялась при помощи частотомера.

При пропуске по обмотке соленоида постоянного тока оба преобразователя втягивались в него с постоянной силой, равной

$$P_0 = \frac{1}{2\mu_0} \int_S B^2 dS,$$

где B – индукция магнитного поля в соленоиде, μ_0 – магнитная постоянная, интегрирование ведётся по сечению обкладок преобразователей S .

Втягиваясь в соленоид, преобразователи сжимались и контактировали своими торцами. На преобразователь-источник подавалось электрическое напряжение, в нем возбуждались механические колебания. Из-за нелинейности контакта он становился источником колебаний высших частот, которые фиксировались преобразователем-приемником. Эти колебания легко наблюдать, если их частоты близки к одной из собственных частот составной системы, так как в этом

случае сигнал пропорционален добротности системы. Амплитуды гармоник определялись по показаниям анализатора спектра. Формы входного и выходного сигналов фиксировались на экране двухлучевого осциллографа.

Экспериментально снимались амплитудно-частотные характеристики системы при постоянных входном электрическом напряжении и токе соленоида. По этим характеристикам определялись резонансные частоты системы и амплитуды выходного сигнала системы на этих частотах, а также вычислялись эквивалентные добротности.

Нам удалось наблюдать при субгармоническом возбуждении второй, третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник.

На рис. 2 приведены осциллограммы второй, третьей и пятой гармоник при различных условиях.

При малых токах и большом входном напряжении на осциллограмме фиксируется только сигнал высшей гармоники (рис. 2а, в, д), при увеличении тока и уменьшении входного напряжения снижается амплитуда гармоник и увеличивается сигнал основной частоты (рис. 2б, г, е).

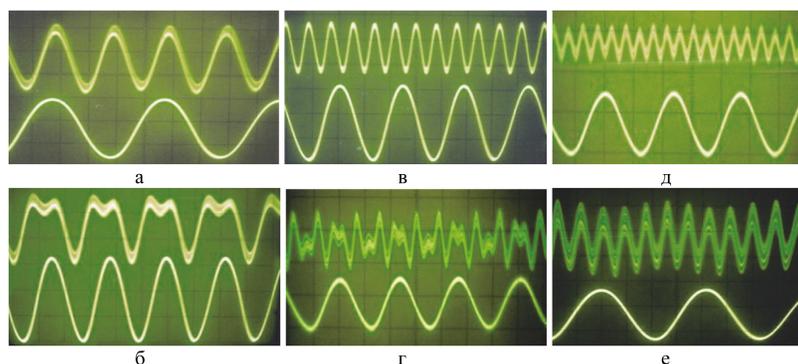


Рис. 2. Осциллограммы высших гармоник при различных условиях; а, б – 2-я, в, г – 3-я, д, е – 5-я гармоники; а, в, д – $U_{вх} = 50\text{В}$, $I = 0,5\text{А}$; б, г, е – $U_{вх} = 10\text{В}$, $I = 2\text{А}$. В нижней части осциллограмм – возбуждающее электрическое напряжение (основная частота)

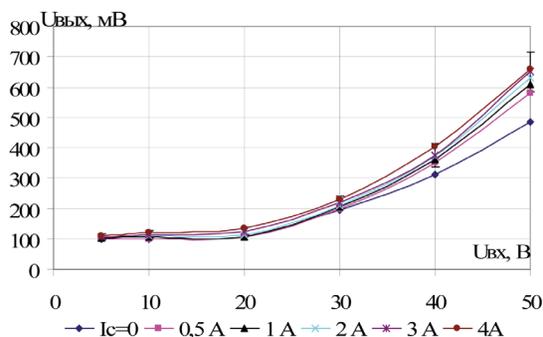


Рис. 3. Экспериментальная зависимость амплитуды второй гармоники от амплитуды входного сигнала

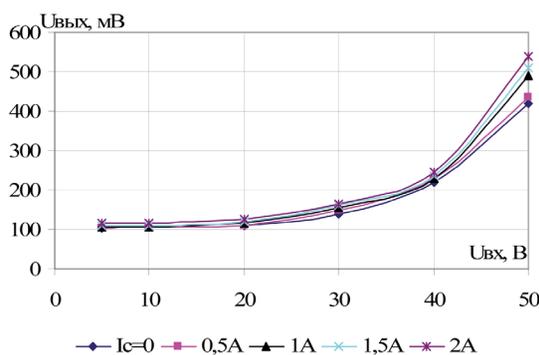


Рис. 4. Экспериментальная зависимость амплитуды третьей гармоники от амплитуды входного сигнала

На рис. 3 и 4 приведены соответственно экспериментальные зависимости амплитуд второй и третьей гармоник от амплитуды входного электрического сигнала.

Сигналы второй и третьей гармоник зависят от величины входного сигнала приблизительно по квадратичному и кубическому закону, соответственно. Зависимость же сигнала пятой гармоники от входного сигнала хуже соответствует теоретическим результатам.

Следует отметить аномальное увеличение амплитуды выходного сигнала на второй и третьей гармониках при амплитудах входного сигнала больше 40 В. Величина выходного сигнала при этом была очень неустойчива, отмечался характерный дребезжащий звук. Это может быть объяснено полным раскрытием акустического контакта.

Заключение

Результаты настоящей работы подтверждают заключение теоретической статьи о том, что акустический контакт в составных стержневых колебательных системах нелинеен и может быть источником высших гармоник. Подтверждена также возможность управления свойствами составной системы изменением тока соленоида.

Расхождение теоретических и экспериментальных зависимостей можно объяснить сильно нелинейной зависимостью между индукцией и напряженностью магнитного поля в соленоиде, а также тем, что при уменьшении усилия стягивания стержней резко падает добротность системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.И. Расчёт и конструирование элементов резьбовых соединений магнитоstrictionных преобразователей с настроенными колебательными системами // Применение ультразвука в технологии машиностроения: Труды НИТИ, вып. VIII, часть I. М., 1964. С. 39–48.
2. Мечетнер Б.Х. Концентраторы-инструменты для ультразвуковой обработки, способы их крепления. М.: НИИМАШ, 1965. 54 с.

3. Kazantsev V.F. Oscillation of rod pressed to elastic surface // Proc. Int. Congr. Acoust., Liege, 7–14 sept., 1965. L. 48–5.
4. Richardson J.M. Harmonic generation at unbounded interface. I. Planar interface between semi-infinite elastic media // Int. J. Eng. Sci. 1979, vol. 17, no. 1, pp. 73–85.
5. Buck O., Morris W.L., Richardson J.M. Acoustic harmonic generation at unbounded interface and fatigue cracks // Appl. Phys. Lett. 1978. v. 33. no. 5, pp. 371–373.
6. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. Нелинейные акустические свойства контактных поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей // Акустический журнал. 1994. Т. 40. № 4. С. 668–672.
7. Солодов И.Ю., Чин Ан Ву. «Хлопающая» нелинейность и хаос при колебаниях контактной границы твёрдых тел // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 5. С. 904–910.
8. Ко Сел Лен, Северин Ф.М., Солодов И.Ю. Экспериментальное наблюдение влияния контактной нелинейности на отражение объёмных и распространение поверхностных акустических волн // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 6. С. 1165–1169.
9. Крагельский И.А., Добычин М.Н., Комбалов В.А. Основы расчётов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 525 с.
10. Основы трибологии (трение, износ, смазка): учебник для технических вузов / Э.Д. Браун и др.; под ред. А.В. Чичинадзе. М.: Наука и техника, 1995. 778 с.

REFERENCES

1. Zakharov V.I. Calculation and design of threaded joints of magnetostrictive transducers with tuned vibration systems. In: *Primenenie v tekhnologii mashinostroeniya: NITI, iss. VIII, I* [Application in technology engineering: SITI, vol. VIII, I]. Moscow, 1964. pp. 39–48.
2. Mechetner B.Kh. *Kontsentratory-instrumenty dlya ul'trazvukovoi obrabotki, ikh krepleniya* [Hub-tools for ultrasonic processing, ways of their attachment]. Moscow, NIIMASH Publ., 1965. 54 p.
3. Kazantsev V.F. Oscillation of rod pressed to elastic surface. In: Proc. Int. Congr. Acoust., Liege, 7–14 sept., 1965. L. 48–5.
4. Richardson J.M. Harmonic generation at unbounded interface. I. Planar interface between semi-infinite elastic media. In: Int. J. Eng. Sci. 1979, vol. 17, no. 1, pp. 73–85.
5. Buck O., Morris W.L., Richardson J.M. Acoustic harmonic generation at unbounded interface and fatigue cracks. In: Appl. Phys. Lett. 1978. vol. 33, no. 5, pp. 371–373.
6. Rudenko O.V., Vu C.A.. Nonlinear acoustic properties of a rough surface contact surfaces and acoustodiagnostics of a roughness height distribution. In: *Akusticheskii zhurnal*. [Acoustical Physics]. 1994, vol. 40, no. 4, pp. 668–672.
7. Solodov I.Yu., Vu C.A. Popping nonlinearity and chaos in vibrations of a contact interface between solids. In: *Akusticheskii zhurnal* [Acoustical Physics]. 1993, vol. 39, no. 5, pp. 904–910.
8. Ko Sel Len, Severin F.M., Solodov I.Yu. Experimental observation of contact nonlinearity for bulk and surface acoustic waves. In: *Akusticheskii zhurnal* [Acoustical Physics]. 1991. vol. 37, no. 6, pp. 1165–1169.
9. Krageľskii I.A., Dobychin M.N., Kombalov V.A. *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [Foundations of friction and wear calculations]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 525 p.
10. Braun E.D. et al. *Osnovy tribologii (trenie, iznos, smazka): uchebnik dlya tekhnicheskikh vuzov* [Fundamentals of tribology (friction, wear, lubrication): textbook for technical schools]. Moscow, Nauka i tekhnika Publ., 1995. 778 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Неверов Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии конструкционных материалов Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ);
e-mail: neverov_an@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexandr N. Neverov – PhD in Technical Sciences, associate professor of the Department of Technology of Construction Materials at the Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI);
e-mail: neverov_an@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Неверов А.Н. Генерация высших гармоник в составных стержневых колебательных системах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 72–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-72-81.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

A. Neverov. Generation of higher harmonics in composite rod vibration systems. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 72–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-72-81.