УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-46-52

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ СТОКСА

Дудко В.В.[1]***, Юшканов А.А.***[2]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

[2] *Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается вторая задача Стокса о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство, когда ограничивающая полупространство плоскость совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используются уравнения механики сплошной среды в режиме со скольжением. Показано, что в квадратичном по скорости стенки приближении в газе имеют место температурные эффекты. При этом возникает перепад температуры между поверхностью тела и средой вдали от поверхности.

Ключевые слова: вторая задача Стокса, нелинейность, перепад температуры.

TEMPERATURE EFFECTS IN STOKES' SECOND PROBLEM

V. Dudko[1]***, A. Yushkanov***[2]

[1] *Bauman Moscow State Technical University, ul. 2-ya Baumanskaya 5, 105005 Moscow, Russian Federation*

[2] *Moscow Region State University, ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We consider Stokes's second problem in relation to the behavior of a rarefied gas filling a half-space, when the plane limiting the half-space performs harmonic oscillations in its own plane. Equations of continuum mechanics in the slip regime are used. It is shown that the approximation that is quadratic in the wall velocity is characterized by temperature effects in a gas due to the influence of viscous dissipation. In this case, there is a temperature drop between the body surface and the gas away from the surface.

Key words: Stokes's second problem, nonlinearity, temperature drop.

История задачи о поведении газа и жидкости над стенкой, колеблющейся в своей плоскости, начинается с работы Дж. Г. Стокса [1]. Эту задачу обычно называют второй задачей Стокса.

Вторая задача Стокса в последние годы является предметом многочисленных исследований [2–9]. Это обусловлено развитием современных технологий, в частности, нанотехнологий.

Для различного рода течений среды вторая задача Стокса изучалась в [2], в [3] исследовались различные явления трения, сопровождающие данный процесс. В работе [4] проведён анализ ряда приложений этой задачи.

В [5] рассмотрен пример практического применения колебательной системы, подобной рассматриваемой задаче, в области нанотехнологий.

В [6] вторая задача Стокса рассматривалась в гидродинамическом приближении в режиме со скольжением.

В экспериментах [7] изучался поток газа, создаваемый механическим резонатором при различных частотах колебания. Для случая низких частот задача решена на основе уравнения Навье-Стокса. В случае произвольных скоростей колебаний поверхности использовались численные методы на основе кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук).

В газах с использованием кинетических уравнений вторая задача Стокса рассматривалась в работах [7–11].

Работа [8] посвящена применению численных методов к решению второй задачи Стокса в кинетическом подходе. В работе [9] для решения задачи использовался моментный метод решения кинетического уравнения.

В работах [10] и [11] дано аналитическое решение второй задачи Стокса для разреженного газа. При этом использовалось модельное кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК. В [10] задача решалась с диффузными граничными условиями. Показано, что результаты работ [8] и [9] весьма близки с результатами, полученными из аналитического решения [10]. Обобщение полученных результатов на случай граничных условий Черчиньяни дано в работе [10].

В настоящей работе показано, что при учете нелинейных эффектов во второй задаче Стокса возникают температурные эффекты. Ранее эта задача без учёта изотермического скольжения и скачка температуры была рассмотрена в [12].

Пусть среда, состоящая из разреженного газа, занимает полупространство $x > 0$ над плоской твёрдой поверхностью, лежащей в плоскости $x = 0$. Поверхность (y, z) совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону $u_s(t) = u_0\cos(\omega t)$. Требуется найти разность температур (перепад температуры) между температурой стенки и температурой среды вдали от стенки, которая возникает вследствие колебательного движения стенки.

Будем рассматривать случай малых чисел Кнудсена. Для рассматриваемой задачи это соответствует случаю низких частот. Как показано в [6], это равносильно условию

$$\omega \ll \frac{\nu}{\lambda^2}\,.$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости, λ – средняя длина свободного пробега молекул в газе.

При выполнении этого условия для решения задачи возможно использование уравнений гидродинамики.

Кроме того, будем считать, что скорость движения стенки много меньше тепловой скорости молекул газа. При этом возникает малый параметр

$\varepsilon = u_0/v_T \ll 1$, где $v_T = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$ – тепловая скорость молекул газа.

При наличии малого параметра ε задачу можно решать методом последовательных приближений.

В линейном приближении по ε задача становится изотермической и изобарической [13]. При этом скорость газа имеет одну компоненту, совпадающую по направлению с направлением колебаний стенки. В нашем случае это ось y. То есть скорость газа можно представить как $u = u_y(t, x)$.

Согласно [13], поле скоростей находится из уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Граничное условие формулируется из того условия, что стенка совершает, как уже указывалось, гармонические колебания в своей плоскости. С учётом эффекта изотермического скольжения, граничное условие на стенке имеет следующий вид [14]:

$$u(t,0) = u_0 cos\omega t + c_m \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{2}$$

Скорость стенки можно представить в виде:

$$u_s(t) = u_0 cos\omega t = Re\left(u_0 e^{-i\omega t}\right).$$

Здесь u_0 – амплитуда скорости колебания стенки.

Решение уравнения (1) удобно искать в комплексной форме:

$$u = Re\left(a e^{-i\omega t + k_1 x}\right). \tag{3}$$

При этом для величины k_1 из уравнения (3) получаем [9, 13]:

$$k_1 = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(i-1) = k(i-1), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

Для величины a с учётом граничного условия (2) имеем:

$$a = \frac{u_0}{1 + c_m \lambda k_1} = a_0 u_0, \quad a_0 = \frac{1}{1 + c_m \lambda k_1}.$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид:

$$u = u_0 \operatorname{Re}\left(a_0 \exp(-i\omega t + k_1 x)\right) = u_0 \operatorname{Re}\left(a_0 \exp[i(kx - \omega t) - kx]\right). \tag{4}$$

В линейном приближении по ε температура газа постоянна и уравнение теплопроводности удовлетворяется автоматически. В квадратичном приближении по ε уравнение теплопроводности становится неоднородным [13]:

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\varkappa\,\Delta T+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \qquad (5)$$

Здесь $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности газа, η – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность газа, c_p – теплоёмкость при постоянном давлении, u – полученное в линейном приближении решение (4).

Производная функции u (решение (4)) равна:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_0k}{2}\left[a_0\left(i-1\right)e^{i\left(kx-\omega t\right)-kx}-a_0^*\left(i+1\right)e^{i\left(-kx+\omega t\right)-kx}\right].$$

Здесь звёздочка означает комплексное сопряжение.

Квадрат производной имеет вид:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{u_0^2k^2}{4}\left[4\left|a_0\right|^2e^{-2kx}-2ia_0^2e^{2i\left(kx-\omega t\right)-2kx}+2ia_0^{*2}e^{2i\left(-kx+\omega t\right)-2kx}\right]=$$

$$=u_0^2k^2\left[\left|a_0\right|^2e^{-2kx}-i\frac{a_0^2e^{2i\left(kx-\omega t\right)-2kx}-a_0^{*2}e^{2i\left(-kx+\omega t\right)-2kx}}{2}\right]. \qquad (6)$$

При этом первое слагаемое в квадратных скобках является константой по времени. С учётом (6) неоднородное уравнение теплопроводности (5) примет следующий вид:

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\varkappa\Delta T+\eta u_0^2k^2\left[\left|a_0\right|^2e^{-2kx}-i\frac{a_0^2e^{2i\left(kx-\omega t\right)-2kx}-a_0^{*2}e^{2i\left(-kx+\omega t\right)-2kx}}{2}\right]. \qquad (7)$$

Граничное условие для температуры на поверхности с учётом скачка температуры имеет вид [14]:

$$T\left(0\right)=T_S+K_t\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}. \qquad (8)$$

Здесь K_t — коэффициент скачка температуры, Ts — температура поверхности.

Структура частного решения неоднородного уравнения (7) имеет вид, определяемый формой (6) этой самой неоднородности:

$$T=T_\infty+T_0e^{-2kx}+T_1e^{2i\left(kx-\omega t\right)-2kx}+T_1^*e^{2i\left(-kx+\omega t\right)-2kx}. \qquad (9)$$

В настоящей работе нас будет интересовать не зависящий от времени перепад между температурой поверхности и температурой газа вдали от поверхности. Не зависящее от времени распределение температуры газа описывают два первых слагаемых решения (9).

Подставляя выражение (9) в уравнение (7) и граничное условие (8), получаем:

$$4k^2\varkappa T_0=-k^2\left|a_0\right|^2\eta u_0^2,$$

$$T_\infty+T_0=Ts-2K_tk\lambda T_0.$$

Отсюда находим:

$$T_0 = -\frac{|a_0|^2 \eta u_0^2}{4\varkappa}.$$

$$T_\infty - Ts = \frac{|a_0|^2 \eta u_0^2}{4\varkappa}\left(1-2K_t k\lambda\right).$$

Отсюда следует, что разность температур между температурой поверхности и температурой вдали от стенки, (т.е. величина перепада температуры δT) равна:

$$\delta T = T_\infty - Ts = \frac{|a_0|^2 \eta u_0^2}{4\varkappa}\left(1-2K_t k\lambda\right) = \frac{\eta u_0^2\left(1-2K_t k\lambda\right)}{4\varkappa\left[\left(1+c_m\lambda k\right)^2 + c_m^2\lambda^2 k^2\right]}. \qquad (10)$$

Был рассмотрен случай газовой среды. Полученные в работе результаты остаются справедливыми и для жидкой среды. При этом надо учесть, что в жидкости отсутствуют изотермическое скольжение и скачок температуры, то есть коэффициенты скачка температуры и изотермического скольжения равны нулю. Формально переход к случаю жидкости осуществляется как предел $\lambda \to 0$. При этом из (10) получаем:

$$\delta T_{liquid} = \frac{\eta u_0^2}{4\varkappa}.$$

Заключение

В работе рассмотрена вторая задача Стокса о поведении газа над колеблющейся непроницаемой поверхностью. Показано, что в квадратичном приближении по амплитуде скорости колебания задача утрачивает изотермический характер. Вблизи поверхности газа возникает неоднородный профиль температуры. При этом между поверхностью и объемом газа возникает постоянная разность температуры (перепад температуры). Задача рассмотрена в гидродинамическом приближении в режиме со скольжением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX. 1851. P. 8–106.
2. *Khan M., Asia A., Fetecau C.* On exact solutions of Stokes second problem for a Burgers' fluid, I. The case $\gamma < \lambda^2/4$. // J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 2009. V. 61. № 4. P. 697–720.
3. *Steinhell E., Scherber W., Seide M., Rieger H.* Investigation on the interaction of gases and well defined solid surfaces with respect to possibilities for reduction of aerodynamic friction and aerothermal heating // Rarefied gas dynamics. Ed. J.L. Potter. N.Y.: Acad. press. 1977. P. 589–602.
4. *Graebel W.P.* Engineering Fluid Mechanics. New York. Taylor & Francis. 2001. 752 p.
5. *Cleland A.N., Roukes M.L.* A nanometer-scale mechanical electrometer // Nature. Vol. 392. 1998. P. 160–162.
6. *Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 134–135.

7. *Karabacak D.M., Yakhot V., Ekinci K.L.* High-frequency nanofluidics: an experimental study using nanomechanical resonators, Phys. Rev. Lett. 98. 2007, pp. 254–505.
8. *Sharipov F., Kalempa D.* Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency // Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium, edited by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov. Novosibirsk, 2007. P. 1140–1145.
9. *Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. № 2. С. 262–268.
10. *Акимова В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение второй задачи Стокса о поведении газа над колеблющейся поверхностью // Известия РАН. Серия: Механика жидкости и газа. 2013. №1. С. 125–140.
11. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение второй задачи Стокса для разреженного газа с граничными условиями Черчиньяни // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. Т. 53. № 3. С. 128–147.
12. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Temperature jump in second Stokes' problem by nonlinear analysis// arXiv:1602.08689 [physics.flu-dyn].
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука (1986). 620 с.
14. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир. 1978. 495 с.

REFERENCES

1. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX. 1851, pp. 8–106.
2. *Khan M., Asia A., Fetecau C.* On exact solutions of Stokes' second problem for a Burgers' fluid, I. The case $\gamma < \lambda^2/4$. In: J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 2009, vol. 61, no. 4, pp. 697–720.
3. *Steinhell E., Scherber W., Seide M., Rieger H.* Investigation on the interaction of gases and well defined solid surfaces with respect to possibilities for reduction of aerodynamic friction and aerothermal heating. In: Rarefied gas dynamics. Ed. J.L. Potter. N.Y.: Acad. press. 1977. P. 589–602.
4. *Graebel W.P.* Engineering Fluid Mechanics. New York. Taylor & Francis. 2001. 752 p.
5. *Cleland A.N., Roukes M.L.* A nanometer-scale mechanical electrometer. In: Nature. 1998, vol. 392, pp. 160–162.
6. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The influence of surface properties on the characteristics of shear waves. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics]. 2005, vol. 75, no. 4, pp. 134–135.
7. *Karabacak D.M., Yakhot V., Ekinci K.L.* High-frequency nanofluidics: an experimental study using nanomechanical resonators, Phys. Rev. Lett. 98. 2007, pp. 254–505.
8. *Sharipov F., Kalempa D.* Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency. In: Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium, edited by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov. Novosibirsk, 2007, pp. 1140–1145.
9. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The generation of fluctuating surface shear waves in gas. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature]. 2009, vol. 47, no. 2, pp. 262–268.
10. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of the second Stokes problem on behavior of gas over an oscillating surface. In: *Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika zhidkosti i gaza* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences News. Ser.: Fluid Mechanics]. 2013, no. 1, pp. 125–140.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of Stokes' second problem for a rarefied gas with Cercignani boundary conditions. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2013, vol. 53, no. 3, pp. 128–147.

12. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in Stokes' second problem by nonlinear analysis// arXiv:1602.08689 [physics.flu-dyn].
13. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 1975. 536 p.
14. Cherchin'yani K. *Teoriya i prilozheniya uravneniya Bol'tsmana* [Theory and applications of the Boltzmann equation]. Moscow, Mir Publ., 1978. 495 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Дудко Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры основ физики (СУНЦ-2) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vladimi2000@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir V. Dudko – PhD in Physico-mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Fundamentals of Physics at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vladimi2000@mail.ru

Aleksandr A. Yushkanov – Doctor in Physico-mathematical Sciences, professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow Region State University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Дудко В.В., Юшканов А.А. Температурные эффекты во второй задаче Стокса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 46–52.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-46-52.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

V. Dudko, A.Yushkanov. Temperature effects in Stokes' second problem. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 2. pp. 46–52.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-46-52.