РАЗДЕЛ II.
ФИЗИКА

УДК 533.9.02
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-23-33

ПРОДОЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В КЛАССИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВУХ НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Аскерова В.И., ***Латышев А.В.***
Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация

Аннотация. Проводится анализ нелинейного взаимодействия электромагнитного поля с максвелловской бесстолкновительной классической плазмой. В плазме распространяются две электромагнитные волны. Причём волновой вектор первой электромагнитной волны направлен вдоль оси x, а волновой вектор второй электромагнитной волны находится в плоскости (x, z), и его направление с осью x составляет угол φ ($\varphi \neq 0$). Для этого случая найдены формулы для вычисления электрического тока. Оказалось, что нелинейный анализ позволяет выявить помимо известного поперечного тока ещё и продольный ток, пропорциональный квадрату электрического поля. Рассмотрен случай малых значений волновых чисел.

Ключевые слова: уравнение Власова, классическая плазма, поперечный и продольный ток, внешние электромагнитные поля.

LONGITUDINAL ELECTRIC CURRENT UNDER THE INFLUENCE OF TWO NONCOLLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVES IN CLASSICAL PLASMA

V. Askerova, ***A. Latyshev***
Moscow Region State University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. ***We*** report an analysis of nonlinear interaction of electromagnetic field with the classical Maxwellian collisionless plasma. Two electromagnetic waves propagate in plasma. Moreover, the wave vector of the first electromagnetic wave is directed along the x axis. The wave vector of the second electromagnetic wave is in the (x, z) plane and its direction makes an angle of

φ, ($\varphi \neq 0$) with the x axis. For this case, formulae for calculating the electric current are derived. It is found that the nonlinear analysis makes it possible to identify, apart from the known transverse current, the longitudinal current, which is proportional to the square of the electric field. The case of small values of the wave number is considered.

Key words: Vlasov equation, classical plasma, transverse and longitudinal electric current, external electromagnetic waves.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследование плазмы вызывает большой интерес у научного сообщества. Существует большое количество работ, посвящённых изучению плазмы [1–10]. В работах [1–4] изучаются нелинейные эффекты в плазме. Классическая плазма рассматривается в работах [5–10].

В данной работе рассматривается случай бесстолкновительной классической плазмы. Аналитически решается кинетическое уравнение Власова. Уточняются, как в разложении функции распределения, так и в разложении силы Лоренца величины, пропорциональные квадратам векторных потенциалов.

При подобном ходе исследования оказывается, что электрический ток обладает двумя ненулевыми компонентами. Одной из компонент (такой же, как и в линейном анализе) является «поперечный» ток. Вторая же компонента – «продольный» ток, который ортогонален первой компоненте. Он имеет второй порядок малости относительно величин напряжённостей составляющих электрического поля.

Отметим, что частный случай данной проблемы был рассмотрен в работе [5].

1. Уравнение Власова

Рассмотрим уравнение Власова, описывающее поведение бесстолкновительной плазмы

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+e\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v},\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2\right]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=0. \tag{1.1}$$

В данном уравнении f – функция распределения электронов плазмы, $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{H}_j (j = 1,2)$ – компоненты электромагнитного поля, c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электронов, $\mathbf{v}$ – скорость электронов, $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, v)$ (eq $\equiv$ equilibrium) – локально равновесное распределение Ферми–Дирака:

$$f_{eq}(\mathbf{r},v)=\left[1+\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu(\mathbf{r})}{k_BT}\right)\right]^{-1}=\left[1+\exp\left(P^2-\alpha(\mathbf{r})\right)\right]^{-1}=f_{eq}(\mathbf{r},P),$$

где $\varepsilon = mv^2/2$ – энергия электронов, μ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\mathbf{P} = \boldsymbol{P}/p_T$ – безразмерный импульс электронов, v_T – тепловая скорость электронов $\left(v_T=\sqrt{2k_BT/m}\right)$, $\alpha = \mu/(k_BT)$ – безразмерный химический потенциал, $k_B \cdot T = \varepsilon_T = mv_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

Введём абсолютное распределение Ферми–Дирака:

$$f_0(v) = \left[1+\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}\right)\right]^{-1} = \left[\ 1+\exp\left(P^2-\alpha\right)\ \right]^{-1} = f_0(P).$$

Будем полагать, что векторный потенциал $\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t)$ ортогонален соответствующему вектору $\mathbf{k}_j$, то есть $\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = 0$, $(j = 1,2)$. Это означает, что волновой вектор $\mathbf{k}_j$ ортогонален соответствующей составляющей электрического и магнитного поля:

$$\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = 0, j = 1,2.$$

Пусть один волновой вектор первой электромагнитной волны направлен вдоль оси x, а другой волновой вектор второй электромагнитной волны лежит в плоскости (x, z) и его направление составляет угол φ с осью x, причём $\varphi \neq 0$, то есть

$$\mathbf{k}_1 = k_1 \cdot (1, 0, 0) \text{ и } \mathbf{k}_2 = k_2 \cdot (\cos\varphi, 0, \sin\varphi),$$

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \cdot \exp(i[k_1 x - \omega_1 t]) \cdot \{0, 1, 0\} \text{ и}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 \cdot \exp(i[k_2(x\cos\varphi - z\sin\varphi) - \omega_1 t]) \cdot \{0, 1, 0\}.$$

Тогда электрическое и магнитное поля связаны с векторным потенциалом следующими равенствами:

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c}\mathbf{A}_j.$$

Напряжённость магнитного поля имеет следующие значения:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{ck_1}{\omega_1}(0,0,1)E_1, \mathbf{H}_2 = \frac{ck_2}{\omega_2}(-\sin\varphi,\ 0,\ \cos\varphi)E_2.$$

Таким образом, векторное произведение равно:

$$\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}_1\right] = \frac{ck_1}{\omega_1}E_1(v_y, -v_x, 0),$$

$$\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}_2\right] = \frac{ck_2}{\omega_2}E_2(v_y\cos\varphi, -(v_x\cos\varphi + v_z\sin\varphi), v_y\sin\varphi).$$

С помощью векторного произведения найдём силу Лоренца:

$$e\left\{\frac{E_1}{\omega_1}\left[k_1 v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + \left(\omega_1 - k_1 v_x\right)\frac{\partial f}{\partial p_y}\right] + \frac{E_2}{\omega_2}\left[k_2 v_y \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial p_x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\omega_2 - k_2\left(v_x\cos\varphi + v_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial p_z}\right]\right\}. \tag{1.2}$$

Следовательно, уравнение (1.1) перепишется с учётом (1.2) в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + e\left\{\frac{E_1}{\omega_1}\left[k_1 v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + \left(\omega_1 - k_1 v_x\right)\frac{\partial f}{\partial p_y}\right] + \frac{E_2}{\omega_2}\left[k_2 v_y \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial p_x} + \right.\right.$$

$$+\left(\omega_2-k_2\left(v_x\cos\varphi+v_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f}{\partial p_y}+k_2v_y\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial p_z}\Bigg]\Bigg\}=0. \qquad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) будем искать в виде

$$f=f_0(P)+f_1+f_2, \qquad (1.4)$$

где

$$f_1=E_1\varphi_1+E_2\varphi_2, \qquad (1.5)$$

$$f_2=E_1^2\psi_1+E_2^2\psi_2+E_1E_2\psi_0. \qquad (1.6)$$

Здесь

$$E_1\sim\exp\left[i\ \left(k_1x-\omega_1t\right)\right],$$

$$E_2\sim\exp\left[i\ \left(k_2\left\{x\cos\varphi-z\sin\varphi\right\}-\omega_2t\right)\right],$$

$$E_1^2\sim\exp\left[2i\ \left(k_1x-\omega_1t\right)\right],$$

$$E_2^2\sim\exp\left[2i\ \left(k_2\left\{x\cos\varphi-z\sin\varphi\right\}-\omega_2t\right)\right],$$

$$E_1E_2\sim\exp\left[2\ i\ \left(x\left\{k_1+k_2\cos\varphi\right\}-k_2z\sin\varphi-\left\{\omega_1+\omega_2\right\}\ t\right)\right].$$

2. Первое приближение

В данной задаче имеется четыре параметра размерности длины $\lambda_j = v_T/\omega_j$ и $l_j = 1/k_j$. Будем полагать, что как на длинах λ_j, так и на длинах l_j изменение энергии электрона под действием соответствующего электрического поля много меньше тепловой энергии электронов k_BT, то есть параметры $\alpha_j = |eE_j|v_T/(k_BT\omega)$ и $\beta_j = |eE_j|v_T/(k_BTk)$ являются малыми параметрами. Далее действуем методом последовательных приближений, считая, что $\alpha_j \ll 1$, $\beta_j \ll 1$.

Уравнение (1.3) с помощью (1.4) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+v_x\frac{\partial f_1}{\partial x}=-e\Bigg\{\frac{E_1}{\omega_1}\Bigg[k_1v_y\frac{\partial f_0}{\partial p_x}+\left(\omega_1-k_1v_x\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_y}\Bigg]+\frac{E_2}{\omega_2}\Bigg[k_2v_y\cos\varphi\frac{\partial f_0}{\partial p_x}+$$

$$+\left(\omega_2-k_2\left(v_x\cos\varphi+v_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_y}+k_2v_y\sin\varphi\frac{\partial f_0}{\partial p_z}\Bigg]\Bigg\} \qquad (2.1)$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}+v_x\frac{\partial f_2}{\partial x}=-e\Bigg\{\frac{E_1}{\omega_1}\Bigg[k_1v_y\frac{\partial f_1}{\partial p_x}+\left(\omega_1-k_1v_x\right)\frac{\partial f_1}{\partial p_y}\Bigg]+\frac{E_2}{\omega_2}\Bigg[k_2v_y\cos\varphi\frac{\partial f_1}{\partial p_x}+$$

$$+\left(\omega_2 - k_2\left(v_x\cos\varphi + v_z\sin\varphi\right)\frac{\partial f_1}{\partial p_y}\right) + k_2 v_y \sin\varphi\frac{\partial f_1}{\partial p_z}\Bigg]\Bigg\}. \tag{2.2}$$

Из уравнения (2.1) получим

$$\left(-i\omega_1 + i\,k_1 v_x\right)E_1\varphi_1 + \left(-i\omega_2 + i\,k_2 v_x\cos\varphi + i\,k_2 v_z\sin\varphi\right)E_2\varphi_2 =$$

$$= -e\left\{\frac{E_1}{\omega_1}\left[k_1 v_y\frac{\partial f_0}{\partial p_x} + \left(\omega_1 - k_1 v_x\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_y}\right] + \frac{E_2}{\omega_2}\left[k_2 v_y\cos\varphi\frac{\partial f_0}{\partial p_x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\omega_2 - k_2\left(v_x\cos\varphi + v_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_y} + k_2 v_y\sin\varphi\frac{\partial f_0}{\partial p_z}\right]\right\}. \tag{2.3}$$

Введём безразмерные параметры $\Omega_j = \dfrac{\omega_j}{k_T v_T}$, $q_j = \dfrac{k_j}{k_T}$, где q_j – безразмерное волновое число, $= \dfrac{mv}{}$ – тепловое волновое число.

В уравнении (2.3) перейдём к безразмерным параметрам. В итоге получим:

$$i\left[E_1\varphi_1\left(q_1 P_x - \Omega_1\right) + E_2\varphi_2\left(q_2\left(P_x\cos\varphi + P_z\sin\varphi\right) - \Omega_2\right)\right] =$$

$$= -\frac{e}{k_T p_T v_T}\left\{\frac{E_1}{\Omega_1}\left[q_1 P_y\frac{\partial f_0}{\partial P_x} + \left(\Omega_1 - q_1 P_x\right)\frac{\partial f_0}{\partial P_y}\right] + \frac{E_2}{\Omega_2}\left[q_2 P_y\cos\varphi\frac{\partial f_0}{\partial P_x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\Omega_2 - q_2\left(P_x\cos\varphi + P_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f_0}{\partial P_y} + q_2 P_y\sin\varphi\frac{\partial f_0}{\partial P_z}\right]\right\}. \tag{2.4}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial P_x} \sim P_x,\quad \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \sim P_y,\quad \frac{\partial f_0}{\partial P_z} \sim P_z.$$

Вычисляя правую часть уравнения (2.4), получим:

$$\left[q_1 P_y\frac{\partial f_0}{\partial P_x} + \left(\Omega_1 - q_1 P_x\right)\frac{\partial f_0}{\partial P_y}\right] + \left[q_2 P_y\cos\varphi\frac{\partial f_0}{\partial P_x} + \right.$$

$$\left. + \left(\Omega_2 - q_2\left(P_x\cos\varphi + P_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f_0}{\partial P_y} + q_2 P_y\sin\varphi\frac{\partial f_0}{\partial P_z}\right]\Bigg\} = \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)\frac{\partial f_0}{\partial P_y}. \tag{2.5}$$

Перепишем (2.4) с учётом (2.5) в следующем виде:

$$i\left[E_1\varphi_1\left(q_1 P_x - \Omega_1\right) + E_2\varphi_2\left(q_2\left(P_x\cos\varphi + P_z\sin\varphi\right) - \Omega_2\right)\right] =$$

$$=-\frac{e}{k_T p_T v_T}\left(E_1+E_2\right)\frac{\partial f_0}{\partial P_y}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, первое приближение равно:

$$f_1=\frac{ie}{k_T p_T v_T}\left[\frac{E_1}{q_1P_x-\Omega_1}+\frac{E_2}{q_2(P_x\cos\varphi+P_z\sin\varphi)-\Omega_2}\right]. \qquad (2.7)$$

3. Второе приближение

Уравнения (1.3) будем решать во втором приближении. Для этого в левую часть уравнения (2.2) подставим (1.6). Получим следующее уравнение:

$$E_1^2\left[2i\left(k_1v_x-\omega_1\right)\right]\psi_1+E_2^2\left[2i\left(k_2(v_x\cos\varphi+v_z\sin\varphi)-\omega_2\right)\right]\psi_2+E_1E_2\left[-i\left(\omega_1+\omega_2\right)+\right.$$

$$\left.+i(v_x(k_1+k_2\cos\varphi)+k_2v_x\sin\varphi)\right]\psi_0=-e\left\{\frac{E_1}{\omega_1}\left[k_1v_y\frac{\partial f_1}{\partial p_x}+\left(\omega_1-k_1v_x\right)\frac{\partial f_1}{\partial p_y}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{E_2}{\omega_2}\left[k_2v_y\cos\varphi\frac{\partial f_1}{\partial p_x}+\left(\omega_2-k_2\left(v_x\cos\varphi+v_z\sin\varphi\right)\right)\frac{\partial f_1}{\partial p_y}+k_2v_y\sin\varphi\frac{\partial f_1}{\partial p_z}\right]\right\}.$$

Перейдя к безразмерным параметрам, будем иметь равенство:

$$E_1^2\left[q_1P_x-\Omega_1\right]\psi_1+E_2^2\left[q_2(P_x\cos\varphi+P_z\sin\varphi)-\Omega_2\right]\psi_2+E_1E_2\left[2(\left(q_1+q_2\cos\varphi\right)P_x+\right.$$

$$\left.+q_2P_z\sin\varphi)-\Omega\right]\psi_0=-\frac{e^2}{2k_Tp_Tv_T^2}\left\{\frac{E_1^2}{\Omega_1}\left[q_1P_y\frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{q_1P_x-\Omega_1}\right)-\frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}\right]+\right.$$

$$+\frac{E_2^2}{\Omega_2}\left[q_2P_y\frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{q_2\left(P_x\cos\varphi+P_z\sin\varphi\right)-\Omega_2}\right)-\frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}\right]+\frac{E_1E_2}{\Omega_1}\times$$

$$\times\left[q_1P_y\frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{q_2\left(P_x\cos\varphi+P_z\sin\varphi\right)-\Omega_2}\right)+\frac{\Omega_1-q_1P_x}{q_2\left(P_x\cos\varphi+P_z\sin\varphi\right)-\Omega_2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}\right]+$$

$$\left.+\frac{E_1E_2}{\Omega_2}\left[q_2P_y\frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{q_1P_x-\Omega_1}\right)+\frac{\Omega_2-q_2\left(P_x\cos\varphi+P_z\sin\varphi\right)}{q_1P_x-\Omega_1}\frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}\right]\right.,$$

где $\Omega=(\Omega_1+\Omega_2)/2$.

Из этого уравнения найдём ψ_1, ψ_2, и ψ_0:

$$\psi_1=-\frac{e^2}{2k_T^2p_T^2v_T^2\Omega_1}\cdot\frac{\Xi_1(\mathbf{P})}{q_1P_x-\Omega_1}, \qquad (3.1)$$

$$\psi_2 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_2} \cdot \frac{\Xi_2(\mathbf{P})}{q_2\left(P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi\right) - \Omega_2}, \tag{3.2}$$

$$\psi_0 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2} \cdot \left[\frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{qP_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \cdot \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{2(q_1 + q_2\cos\varphi)P_x + q_2 P_z \sin\varphi) - \Omega}\right], \tag{3.3}$$

где

$$\Xi_1(\mathbf{P}) = q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1}\right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2},$$

$$\Xi_2(\mathbf{P}) = q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2\left(P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi\right) - \Omega_2}\right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2},$$

$$\Xi_{12}(\mathbf{P}) = q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2\left(P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi\right) - \Omega_2}\right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2\left(P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi\right) - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2},$$

$$\Xi_{12}(\mathbf{P}) = q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x}\left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1}\right) + \frac{\Omega_2 - q_2\left(P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi\right)}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}.$$

Здесь $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$, $q = (q_1 + q_2)/2$.

При $\varphi = 0$ получим формулы (3.1) – (3.3) из работы [5].

Таким образом, функция распределения во втором приближении построена и определяется равенством (1.4), в котором функция f_1 задаётся формулами (1.5) и (2.7), а f_2 определяется равенствами (1.6) и (3.1) – (3.3).

4. Плотность электрического тока

Найдём плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = e\int \mathbf{v} f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T v_T}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathbf{P} f d^3P. \tag{4.1}$$

Вектор плотности тока имеет две ненулевые компоненты $\mathbf{j} = (j_x, i_y, 0)$, где j_x – плотность поперечного тока, j_y – плотность продольного тока.

Вычислим плотность поперечного тока, которая определяется выражением:

$$j_y = e\int v_y f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = e\int v_y f_1 \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^2 v_T}{(2\pi\hbar)^3}\int f_1 P_y d^3P. \tag{4.2}$$

Поперечный ток направлен вдоль электромагнитного поля, его плотность определяется согласно (4.2) только первым приближением функции распределения. Второе приближение функции распределения не вносит вклад в плотность тока. Таким образом, в явном виде поперечный ток равен:

$$j_y = \frac{2ie^2 p_T^2}{k_T (2\pi\hbar)^3} \int \left[\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 (P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi) - \Omega_2} \right] \frac{\partial f_0}{\partial P_y} P_y d^3 P. \quad (4.3)$$

Теперь перейдём к исследованию продольного тока. В силу разложения (1.6) продольный ток может быть представлен в виде трёх слагаемых: $j_x = j_1 + j_2 + j_0$, где

$$j_1 = -\frac{E_1^2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \nu_T \Omega_1} \int \frac{\Xi_1(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{q_1 P_x - \Omega_1},$$

$$j_2 = -\frac{E_1^2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \nu_T \Omega_2} \int \frac{\Xi_2(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{q_2 (P_x \cos\varphi + P_z \sin\varphi) - \Omega_2},$$

$$j_0 = -\frac{E_1 E_2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \nu_T} \int \left[\frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \cdot \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{2(q_1 + q_2 \cos\varphi) P_x + q_2 P_z \sin\varphi) - \Omega} \right] P_x d^3 P,$$

здесь $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$, $q = (q_1 + q_2)/2$.

Отметим, что $j_0 = j_{12} + j_{21}$, тогда

$$j_{12} = -\frac{E_1 E_2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \nu_T \Omega_1} \int \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} P_x d^3 P,$$

$$j_{21} = -\frac{E_1 E_2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \nu_T \Omega_2} \int \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{2(q_1 + q_2 \cos\varphi) P_x + q_2 P_z \sin\varphi) - \Omega} P_x d^3 P.$$

Найдём числовую плотность (концентрацию) частиц плазмы, отвечающую распределению Ферми-Дирака:

$$N = \int f_0(\mathrm{P}) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\alpha - P^2} P^2 dP}{1 + e^{\alpha - P^2}} = \frac{k_T^3}{2\pi^2} l_0(\alpha),$$

где $l_0(\alpha) = \int\limits_0^\infty \ln\left(1 + e^{\alpha - \tau^2}\right) d\tau.$

В выражении перед интегралами выделим плазменную (ленгмюровскую) частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N / m}$ и числовую плотность (концентрацию) N. При этом числовую плотность выразим через волновое число. Следовательно,

$$\frac{\pi p_T e^3 q_j}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \nu_T} = \frac{e\Omega_p^2}{p_T k_T} \cdot \frac{k_j}{16\pi \ l_0(\alpha)} = \sigma_{1,\mathrm{tr}} \frac{k_j}{16\pi \ l_0(\alpha)}.$$

Здесь $\Omega_p = \omega_p/(k_T \nu_T) = \omega_p/(m\nu_T^2)$ – безразмерная плазменная частота, $\sigma_{1,\mathrm{tr}}$ – продольно-поперечная проводимость ($\sigma_{1,\mathrm{tr}} = \mathrm{e} \cdot \Omega_p^2/(p_T k_T)$).

Составляющие продольного тока могут быть записаны в виде:

$$j_j = E_j^2 \sigma_{1,\mathrm{tr}} k_j J_j, \ j_0 = E_1 E_2 \sigma_{1,\mathrm{tr}} \left(k_1 J_{12} + k_2 J_{21}\right), \quad (4.4)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(1+e^{\alpha-P_x^2}\right) dP_x}{(q_1 P_x - \Omega_1)^3},$$

$$J_2 = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha)\Omega_2} \int \frac{\Xi_2\left(\mathbf{P}\right) P_x d^3P}{q_2(P_x\cos\varphi + P_z\sin\varphi) - \Omega_2},$$

$$J_{12} = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha)\Omega_1} \int \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P}) P_x d^3P}{qP_x - \Omega},$$

$$J_{21} = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha)\Omega_2} \int \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P}) P_x d^3P}{2(q_1 + q_2\cos\varphi)P_x + q_2 P_z \sin\varphi) - \Omega}.$$

В равенствах (4.4) величины J_1, J_2, J_{12}, J_{21} – безразмерные части плотности продольного тока.

Следовательно, продольная часть тока имеет следующий вид:

$$j_x = \sigma_{\mathrm{l,tr}} \left[E_1^2 k_1 J_1 + E_2^2 k_2 J_2 + E_1 E_2 \left(k_1 J_{12} + k_2 J_{21}\right)\right]. \tag{4.5}$$

Введём поперечные поля $\mathbf{E}_\mathbf{j}^\mathbf{tr} = \mathbf{E}_\mathbf{j} - \mathbf{k}_\mathbf{j}(\mathbf{E}_\mathbf{j}\mathbf{k}_j)/k_j^2$. Теперь равенство (4.5) можно представить в инвариантной форме:

$$\mathbf{j}_{\mathrm{long}} = \sigma_{\mathrm{l,tr}} \left[\left(\mathbf{E}_1^{\mathrm{tr}}\right)^2 \mathbf{k}_1 J_1 + \left(\mathbf{E}_2^{\mathrm{tr}}\right)^2 \mathbf{k}_2 J_2 + \mathbf{E}_1^{\mathrm{tr}} \mathbf{E}_2^{\mathrm{tr}} \left(\mathbf{k}_1 J_{12} + \mathbf{k}_2 J_{21}\right)\right].$$

Рассмотрим случай малых значений волнового числа. Из (4.5) вытекает, что при малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока получаем:

$$j_x = -\frac{\sigma_{\mathrm{l,tr}}}{8\pi} \left[E_1^2 \frac{k_1}{\Omega_1^3} + E_2^2 \frac{k_2}{\Omega_2^3} + 2E_1E_2 \frac{k_1 + k_2}{\Omega_1\Omega_2\left(\Omega_1 + \Omega_2\right)}\right]. \tag{4.6}$$

Заключение

В данной работе рассмотрена классическая бесстолкновительная плазма, в которой в плоскости (x, z) распространяются две волны под углом φ друг к другу. С помощью метода последовательных приближений аналитически решено уравнение Власова. Исследовано влияние нелинейного характера взаимодействия электромагнитного поля с бесстолкновительной плазмой.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ginsburg V., Gurevich A. Nonlinear phenomena in a plasma located in an alternating electromagnetic field // Usp. Fiz. Nauk, 70(2) 1960. pp. 201–246 [Sov. Phys. Usp., 3. 1960. pp. 115–146].

2. Akhmediev N., Mel'nikov I., Robur L. Second-Harmonic Generation by a Reflecting Metal Surface // Laser Physics. Vol. 4. No. 6. 1994. pp. 1194–1197.
3. Бежанов С.Г., Урюпин С.А. Генерация нелинейных токов и низкочастотного излучения при взаимодействии лазерного импульса с металлом // Квантовая электроника. 2013. 43:11. С. 1048–1054.
4. Zytovich V. Nonlinear effects in plasmas. Moscow. Publ. Leland. 2014. 287 p.
5. Латышев А. В., Юшканов А. А. Нелинейный продольный ток в классической и квантовой плазме, генерируемый двумя поперечными электромагнитными волнами // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 44–62.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 9. С. 778–787.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нелинейный продольный ток в максвелловской плазме, возникающий под действием поперечной электромагнитной волны // Известия РАН. Серия: Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 139–156.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А., Квантовые эффекты взаимодействия электромагнитного поля с плазмой. М.: МГОУ, 2016. 385 с.
9. Латышев А. В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в столкновительной вырожденной плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. №. 9. С. 1667–1676.
10. Latyshev A.V., Askerova V.I. The occurrence of transverse and longitudinal electric currents in the classical plasma under the action of N transverse electromagnetic waves // arXiv preprint arXiv: 1701.03048. 2017.

REFERENCES

1. Ginsburg V., Gurevich A. Nonlinear phenomena in a plasma located in an alternating electromagnetic field // Usp. Fiz. Nauk, 70(2) 1960. pp. 201–246 [Sov. Phys. Usp., 3. 1960. pp. 115–146].
2. Akhmediev N., Mel'nikov I., Robur L. Second-Harmonic Generation by a Reflecting Metal Surface // Laser Physics. Vol. 4. No. 6. 1994. pp. 1194–1197.
3. Bezhanov S.G., Uryupin S.A. Generation of nonlinear currents and low-frequency radiation upon interaction of a laser pulse with a metal. In: *Kvantovaya Elektronika* [Quantum Electronics]. 2013, Vol. 43 (11), pp. 1048–1054.
4. Zytovich V. Nonlinear effects in plasmas. Moscow. Publ. Leland. 2014. 287 p.
5. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonlinear longitudinal current in classical and quantum plasmas generated by two transverse electromagnetic waves. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2015, no. 4, pp. 44–62.
6. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Generation of longitudinal current by a transverse electromagnetic field in classical and quantum plasmas. In: *Fizika Plazmy. Vol. 41.* [Plasma Physics. Vol. 41]. 2015, no. 9, pp. 778–787.
7. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonlinear longitudinal current in the Maxwell plasma created under the action of transverse electromagnetic waves. In: *Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika zhidkosti i gaza* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Ser.: Fluid and liquid Mechanics]. 2015, no. 6, pp. 139–156.
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Kvantovye effekty vzaimodeistviya elektromagnitnogo polya s plazmoi* [Quantum effects of the interaction of electromagnetic fields with plasmas]. Moscow, IIU MGOU Publ., 2016. 385 p.

9. Latyshev A. V., Yushkanov A.A. Generation of longitudinal current by a transverse electromagnetic field in a collisional degenerate plasma. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. Vol. 56.* [Computational mathematics and mathematical physics. Vol. 56.], 2016, no. 9, pp. 1667–1676.
10. Latyshev A.V., Askerova V.I. The occurrence of transverse and longitudinal electric currents in the classical plasma under the action of *N* transverse electromagnetic waves. arXiv preprint arXiv: 1701.03048. 2017.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Аскерова Вера Исламовна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: vera_askerova@mail.ru

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vera I. Askerova – student of the Physics and Mathematics Department at the Moscow Region State University;
e-mail: vera_askerova@mail.ru

Anatoly V. Latyshev – Doctor in Physico-mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow Region State University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Аскерова В.И., Латышев А.В. Продольный электрический ток в классической плазме под действием двух неколлинеарных электромагнитных волн // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 23–33.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-23-33.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

V. Askerova, A. Latyshev. Longitudinal electric current under the influence of two noncollinear electromagnetic waves in classical plasma. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017, no. 2, pp. 23–33.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-23-33.