УДК 517.53
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-16-22

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Махина Н.М.
Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского
241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются интегральные оценки типа Харди-Литтлвуда производной аналитической функции через норму самой функции, а также аналогичные оценки градиента функции в многофункциональных пространствах типа Бергмана аналитических и гармонических функций. Метод доказательства использует классическое разбиение Уитни связного открытого множества и позволяет распространить указанные оценки на произвольные области комплексной плоскости в L^p-пространствах с весом, представляющим собой степень расстояния до границы области, при всех $0 < p < +\infty$.

Ключевые слова: производная аналитической функции, градиент, односвязная область, многофункциональные пространства, разбиение Уитни.

ESTIMATES OF DERIVATIVES OF ANALYTIC AND HARMONIC FUNCTIONS IN SOME DOMAINS ON THE COMPLEX PLANE

N. Makhina
Bryansk State University named after Academician Ivan Georgiyevich Petrovsky
ul. Bezhitskaya 14, 241036 Bryansk, Russian Federation

Abstract. We consider integral estimates of Hardy–Littlewood type of the derivative of an analytic function in terms of the norm of the function, and similar estimates for the gradient of a function in Bergman type multifunctional spaces of analytic and harmonic functions. The method of proof uses the classical Whitney decomposition of a connected open set and allows us to extend these estimates for all domains of the complex plane in L^p-spaces with a weight representing a distance to the domain boundary for all $0 < p < +\infty$.

Key words: derivative of an analytic function, gradient, simply connected domain, multifunctional spaces, Whitney decomposition.

Задача оценки L^p-нормы аналитической функции через норму её производной является хорошо известной задачей теории аналитических функций. Достаточно вспомнить классическую теорему Харди-Литтлвуда (см. [9]), решающую данную проблему в единичном круге $S = \{z \in C : |z| < 1\}$: если f – аналитическая функция в S, $0 < p < +\infty$, $f(0)$, $\beta > -1$, то при некоторых положительных постоянных c_1, c_2 справедливы неравенства

$$c_1\int_S |f(z)|^p (1-|z|)^\beta dm_2(z) \le$$
$$\le \int_S |f'(z)|^p (1-|z|)^{\beta+p} dm_2(z) \le c_2\int_S |f(z)|^p (1-|z|)^\beta dm_2(z).$$

В работах российских и зарубежных ученых, например, [1; 8], данная теорема обобщалась на различные области, отличные от единичного круга. В работах автора [5; 6; 7; 11] оценки типа Харди-Литтлвуда рассматриваются в L^p-весовых пространствах функций, аналитических и гармонических в односвязных областях с границей достаточно общего вида, с весом, представляющим собой степень расстояния до границы.

В данной статье мы распространяем доказанные ранее результаты на многофункциональные пространства и получаем оценки сверху n-й производной функции, аналитической в произвольной области, через норму самой функции при всех $0 < p < +\infty$. Отметим, что исследования, посвящённые многофункциональным пространствам, в последнее время ведутся достаточно интенсивно и являются динамично развивающимся направлением современного комплексного анализа (см., например, [10] и литературу там).

Итак, пусть G – некоторая область на комплексной плоскости C; $H(G)$, $h(G)$ – множества аналитических и гармонических функций в G; $d(w, \partial G)$ – расстояние от точки w до границы области ∂G. Обозначим также $L^p_\tau(G)$, $0 < p < +\infty$, $\tau > -1$, – пространство измеримых функций f из G таких, что

$$\int_G |f(w)|^p d^\tau(w,\partial G)dm_2(w) < +\infty,$$

где dm_2 – мера Лебега для области G.

Кроме того, пусть $A^p_\tau(G) = H(G)\cap L^p_\tau(G)$, $h^p_\tau(G) = h(G)\cap L^p_\tau(G)$.

Далее также обозначаем $c_{\dots}(\alpha, \beta, \dots)$ – некоторые положительные постоянные, зависящие только от $(\alpha, \beta, \dots)$.

Следующую теорему можно рассматривать как расширение классической теоремы Харди-Литтлвуда.

Теорема 1 (см. [5; 11]). *Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C. Пусть также $f \in H(G)$; $0 < p < +\infty$; $\tau > -1$; $n \in Z_+$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_G |f^{(n)}(w)|^p d^{np+\tau}(w,\partial G)dm_2(w) \le c_3(n,\tau)\int_G |f(w)|^p d^\tau(w,\partial G)dm_2(w).$$

Для градиента гармонической функции $grad u(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ может быть сформулирован аналогичный результат.

Теорема 2 (см. [5; 11]). *Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C. Пусть также* $u \in h^p_\tau(G)$, $0 < p < +\infty$, $\tau > -1$. *Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_G \left|gradu(w)\right|^p d^{p+\tau}(w,\partial G)dm_2(w) \le c_4 \int_G \left|u(w)\right|^p d^\tau(w,\partial G)dm_2(w),$$

где $c_4 = c_4(\tau)$ – *некоторая положительная постоянная.*

Приведём теперь некоторые новые оценки производной аналитической функции и градиента для многофункциональных пространств.

Для начала сформулируем хорошо известную классическую теорему (см. [4]), которая нам понадобится при доказательстве:

Теорема А (разбиение Уитни). *Пусть* Ω – *связное открытое множество на C. Тогда существует множество квадратов* $P = \{Q_1, Q_2, ..., Q_l, ...\}$, $\overset{0}{Q}_l \cap \overset{0}{Q}_m = \varnothing, l \ne m$, *таких что* $\bigcup_l Q_l = \Omega$, *и* $\tilde{c}_1 diam(Q_l) \le dist(Q_l, \partial\Omega) \le \tilde{c}_2 diam(Q_l)$.

Теорема 3. *Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C. Пусть также* $f_i \in H(G)$; $0 < p_i < +\infty$; $i = \overline{1,m}$, $m \ge 1$; $n \in Z_+$; $\tau > -1$. *Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\int_G \left|f_1^{(n)}(w)\right|^{p_1} ... \left|f_m^{(n)}(w)\right|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w,\partial G)dm_2(w) \le$$
$$\le c(n,\tau)\int_G \left|f_1(w)\right|^{p_1} d^\tau(w,\partial G)dm_2(w) \times ... \times \int_G \left|f_m(w)\right|^{p_m} d^\tau(w,\partial G)dm_2(w).$$

Доказательство. Пусть $G = \bigcup_l Q_l$ – разбиение Уитни множества G, тогда

$$\int_G \left|f_1^{(n)}(w)\right|^{p_1} ... \left|f_m^{(n)}(w)\right|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w,\partial G)dm_2(w) =$$

$$= \sum_l \int_{Q_l} \left|f_1^{(n)}(w)\right|^{p_1} ... \left|f_m^{(n)}(w)\right|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w,\partial G)dm_2(w) \le$$

$$\le \sum_l \max_{w\in Q_l} \left|f_1^{(n)}(w)\right|^{p_1} ... \left|f_m^{(n)}(w)\right|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w,\partial G)(diam(Q_l))^2 \le$$

$$\le c_5 \sum_l \max_{w\in Q_l} \left|f_1^{(n)}(w)\right|^{p_1} ... \left|f_m^{(n)}(w)\right|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m}(w,\partial G) \le$$

$$\le c_5 \sum_l \max_{w\in Q_l} \left|f_1^{(n)}(w)\right|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w,\partial G) ... \max_{w\in Q_l} \left|f_m^{(n)}(w)\right|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w,\partial G) \le$$

$$\leq c_5 \sum_{l_1} \max_{w \in Q_{l1}} \left| f_1^{(n)}(w) \right|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w, \partial G) \ldots \sum_{l_m} \max_{w \in Q_{lm}} \left| f_m^{(n)}(w) \right|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w, \partial G) \leq$$

$$\leq c_5 \sum_{l_1} \left| f_1^{(n)}(w_{l_1}) \right|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w_{l_1}, \partial G) \ldots \sum_{l_m} \left| f_m^{(n)}(w_{lm}) \right|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w_{lm}, \partial G),$$

где Q_{l_k} – соответствующее разбиение Уитни множества Q_l, $w_{l_k} \in \partial Q_{l_k}$, $k = \overline{1, m}$.

Далее, обозначим $Q_{l_k}^*$ квадрат, имеющий тот же центр, что и Q_{l_k}, но увеличенный в (1 + ε) раз, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, $Q_{l_k} \subset Q_{l_k}^*$.

Также пусть $D_\rho(w_{l_k}) = \{w : \left| w - w_{l_k} \right| < \rho\}$, $0 < \rho < \frac{1}{2} dist(Q_{l_k}, \partial Q_{l_k}^*)$.

Так как $f_k{}^{(n)}(w_{l_k}) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\rho} \frac{f_k(w)}{(w - w_{l_k})^{n+1}} dw$, то

$$\left| f_k{}^{(n)}(w_{l_k}) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{\rho^n} \max_{w \in \partial D_\rho} \left| f_k(w) \right| \leq \frac{c_6}{d^n(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)} \left| f(\tilde{w}_{l_k}) \right|,$$

где $\tilde{w}_{l_k} \in \partial D_\rho$. Итак, $\left| f_k{}^{(n)}(w_{l_k}) \right|^p \leq \frac{c_7 \left| f(\tilde{w}_{l_k}) \right|^p}{d^{np}(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)}$.

Но по теореме А $diam(Q_l) < diam(Q_{l_k}^*) < 1\frac{1}{4} diam(Q_{l_k})$, то есть $d(w_{l_k}, \partial G) \sim d(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)$. Откуда имеем

$$\sum_{l_1} \left| f_1^{(n)}(w_{l_1}) \right|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w_{l_1}, \partial G) \ldots \sum_{l_m} \left| f_m^{(n)}(w_{lm}) \right|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w_{lm}, \partial G) \leq$$

$$\leq c_8 \sum_{l_1} \left| f_1 \ (w_{l_1}) \right|^{p_1} d^{\tau+2}(w_{l_1}, \partial G) \ldots \sum_{l_m} \left| f_m(w_{lm}) \right|^{p_m} d^{\tau+2}(w_{lm}, \partial G).$$

Пусть теперь $0 < \rho' < \frac{1}{2} dist(Q_{l_k}, \partial Q_{l_k}^*)$, $K_{\rho'}(\tilde{w}_{l_k}) = \{w : \left| w - \tilde{w}_{l_k} \right| < \rho'\}$, тогда $K_{\rho'}(\tilde{w}_{l_k}) \subset Q_{l_k}^*$.

Так как $|f_k|^p$ – субгармоническая функция, то при $0 < p < +\infty$

$$\left| f_k \ (\tilde{w}_{l_k}) \right|^p \leq \frac{1}{\pi \rho'^2} \int\limits_{K\rho'(\tilde{w}_{l_k})} \left| f_k \ (w) \right|^p dm_2(w) \leq \frac{c_9}{d^2(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)} \int\limits_{Q_{l_k}^*} \left| f_k \ (w) \right|^p dm_2(w).$$

Тогда

$$\sum_{l_1} \left|f_1\ (w_{l_1})\right|^{p_1} d^{\tau+2}(w_{l_1},\partial G)\ldots\sum_{l_m}\left|f_m(w_{lm})\right|^{p_m} d^{\tau+2}(w_{lm},\partial G)\le$$

$$\le c_{10}\sum_{l_1}\int_{Q^*_{l_1}}\left|f_1\ (w)\right|^{p_1} d^{\tau}(w,\partial G)dm_2(w)\ldots\sum_{l_m}\int_{Q^*_{l_m}}\left|f_m(w)\right|^{p_m} d^{\tau}(w,\partial G)dm_2(w)\le$$

$$\le c\int_G\left|f_1(w)\right|^{p_1} d^{\tau}(w,\partial G)dm_2(w)\times\ldots\times\int_G\left|f_m(w)\right|^{p_m} d^{\tau}(w,\partial G)dm_2(w).$$

Аналогичная теорема справедлива и для градиента гармонической функции, метод доказательства аналогичен доказательству теорем 2, 3:

Теорема 4. *Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C. Пусть также* $u_i \in h^{p_i}_{\tau}(G),\ 0 < p_i < +\infty,\ i=\overline{1,m},\ m\ge 1;\ \tau > -1.$ *Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\int_G\left|grad u_1(w)\right|^{p_1}\ldots\left|grad u_m(w)\right|^{p_m} d^{(p+\tau+2)m-2}(w,\partial G)dm_2(w)\le$$

$$\le \tilde{c}(\tau)\int_G\left|grad u_1(w)\right|^{p_1} d^{\tau}(w,\partial G)dm_2(w)\times\ldots$$

$$\times\int_G\left|grad u_m(w)\right|^{p_m} d^{\tau}(w,\partial G)dm_2(w).$$

Отметим, что оценки вышеприведенного типа находят широкое применение в различных вопросах теории аналитических функций, в том числе построении ограниченных проекторов, описании линейных непрерывных функционалов, построении базисов в соответствующих пространствах (см., например, [2; 3; 10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаев К.П. Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68. № 1. С. 5–42.
2. Махина Н.М. О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.
3. Махина Н.М., Шамоян Ф.А. Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 27–32.
4. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
5. Ткаченко Н.М. Весовые Lp-оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: дисс. канд. ф.-м. наук. Брянск, 2009. 116 с.
6. Ткаченко Н.М. Линейные непрерывные функционалы в Lp-пространствах аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 100–105.

7. Ткаченко Н.М. Об оценках модуля производной аналитической в угловой области функции // Вестник Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова. 2008. № 1. С. 96–98.
8. Detraz J. Classes de Bergman de functions harmoniques // Bull. Soc. Math. France. 1981. V. 109. P. 259–268.
9. Duren P. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970. 292 p.
10. Shamoyan R.F., Makhina N.M. On continuous linear functional in some weighted functional classes on product domains // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т.12. С. 651–678.
11. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2009. Т. 5. № 2. С. 192–210.

REFERENCES

1. Isaev K.P. Laplace transformation of functionals on Bergman spaces. In: *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya. Vol. 68.* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Ser.: Mathematics. Vol. 68]. 2004, no. 1, pp. 5–42.
2. Makhina N.M. Connected spaces to some weighted spaces of analytic functions. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Bryansk State University]. 2015, no. 2, pp. 420–423.
3. Makhina N.M., Shamoyan F.A. Bases in weighted spaces of functions holomorphic in domains with a regular rectifiable boundary. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Bryansk State University]. 2013, no. 4, pp. 27–32.
4. Stein E.M. Singular integrals and differential properties of functions. New Jersey, Princeton University Press, 1970. 304 p.
5. Tkachenko N.M. *Vesovye Lp-otsenki analiticheskikh i garmonicheskikh funktsii v odnosvyaznykh oblastyakh kompleksnoi ploskosti: diss. kand. f.-m. nauk* [The weight of Lp-estimates of analytic and harmonic functions in simply connected domains of the complex plane: PhD thesis in Physico-mathematical Sciences]. Bryansk, 2009. 116 p.
6. Tkachenko N.M. Linear continuous functionals in Lp-spaces of analytic functions. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Bryansk State University]. 2009, no. 4, pp. 100–105.
7. Tkachenko N.M. Estimates of the analytical module of the derivative in the angular region of the function. In: *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. M.T. Kalashnikova* [Bulletin of Izhevsk State Technical University n.a. M.T. Kalashnikov]. 2008, no. 1, pp. 96–98.
8. Detraz J. Classes de Bergman de functions harmoniques. In: Bull. Soc. Math. France. 1981, vol. 109, pp. 259–268.
9. Duren P. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970. 292 p.
10. Shamoyan R.F., Makhina N.M. On continuous linear functional in some weighted functional classes on product domains. In*: Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. Vol. 12* [Siberian electronic mathematical reports. Vol. 12]. 2015, pp. 651–678.
11. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy–Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary. In: *Zhurnal matematicheskoi fiziki, analiza, geometrii. Vol. 5.* [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. Vol. 5]. 2009, no. 2, pp. 192–210.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Махина Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Брянского государственного университета им. ак. И.Г. Петровского;
e-mail: mahinanm@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nataliya M. Makhina– PhD in Physico-mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis at the Bryansk State University named after Academician Ivan Georgiyevich Petrovsky;
e-mail: mahinanm@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Махина Н.М. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 16–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-16-22.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

N. Makhina. Estimates of derivatives of analytic and harmonic functions in some domains on the complex plane. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 16–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-16-22.