УДК 533.9(075.8)
DOI 10.18384/2310-7251-2016-4-68-76

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ОПЕРАТОРА СТОЛКНОВЕНИЙ ДЛЯ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Маркеев Б.М.
Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация

Аннотация. В работе вычислены матричные элементы больцмановского оператора столкновений для неравновесной газовой смеси в рамках обобщенного моментного метода. Получена величина изменения парциального импульса за счёт столкновений, которая выражается через матричные элементы для произвольного закона взаимодействия между частицами для сильнонеравновесной смеси с большой разностью температур компонент и относительными скоростями сравнимыми с тепловой скоростью, когда функцией нулевого приближения является максвелловская функция. Разложение для изменения парциального импульса за счёт столкновений включает в себя слагаемые относительно гидродинамических переменных вплоть до третьей степени и поэтому область его применимости распространяется на малые, но конечные их значения. Причём вклад высших моментов существенным образом зависит от закона взаимодействия между сталкивающимися частицами и для степенного закона взаимодействия оценен. Получено уравнение для эволюции парциальной хаотической энергии. Оценен вклад в искомое выражение нелинейных слагаемых относительно гидродинамических переменных.

Ключевые слова: обобщённый моментный метод, больцмановский оператор, максвелловская функция, матричные элементы сильнонеравновесной смеси, закон взаимодействия между сталкивающимися частицами.

CALCULATION OF MATRIX ELEMENTS OF THE BOLTZMANN COLLISION OPERATOR FOR GAS MIXTURES

B. Markeev
Moscow Region State University
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. We have calculated matrix elements of the Boltzmann collision operator for nonequilibrium gas mixtures in the framework of the generalized torque method. The value of the partial change in the momentum due to collisions is obtained, which is expressed through the matrix elements for an arbitrary law of interaction between particles of a nonequilibrium mixture with a large temperature difference between the component and the relative velocity comparable to the thermal speed, when the function of the zero approximation is the Maxwell function. Decomposition for a partial change in the momentum due to collisions includes terms regarding hydrodynamic variables up to third degree and, therefore, the scope of its applicability applies to small, but finite values. Moreover, the contribution of higher moments strongly depends on the law of interaction between colliding particles and is evaluated for the power-law interaction. We have derived an equation for the evolution of the partial chaotic energy. We have estimated the contribution of nonlinear terms of the hydrodynamic variables to the desired expression.

Keywords: generalized torque method, Boltzmann operator, Maxwell's function, matrix elements of a nonequilibrium mixture, law of interaction between colliding particles.

Для получения замкнутой системы уравнений переноса, а также вычисления матричных элементов столкновительного оператора, представим парциальную функцию распределения в виде разложения

$$f_\alpha\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t\right)=f_\alpha^{(0)}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t\right)\Sigma_i a_i\left(\boldsymbol{r},t\right)M_i\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t\right),$$

где $f_\alpha^{(0)}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t\right)$ – аппроксимационная функция нулевого приближения, $M_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \mathrm{t})$ – ортогональный полином, $a_i(r, t)$ – коэффициенты разложения, используется для обозначения совокупности координатных индексов, по которым происходит суммирование. В [1] развивается гидродинамическая теория течения сильнонеравновесной газовой смеси на основе разложения решения уравнения Больцмана по ортогональным полиномам в пространстве скоростей возле парциальной максвелловской функции. Классическим примером могут служить течения в области ударной волны, в слабоионизованном газе, помещенном в сильное электрическое поле, а также в кнудсеновском слое вблизи твердых поверхностей. Анализируются особенности обобщенного моментного метода решения кинетического уравнения по сравнению с классическим методом Чепмена – Энскога. Показано, что решения в рамках обобщенного моментного метода обладают для течения сильнонеравновесной газовой смеси более быстрой асимптотической сходимостью по сравнению с классическим методом Чепмена – Энскога.

Функция распределения нулевого приближения и система ортогональных полиномов выбраны в предположении, что бесконечное разложение (1) быстро сходится и поэтому достаточно учесть лишь несколько первых слагаемых данного разложения. Характерная особенность процедуры вычисления матричных элементов оператора столкновений определяется тем фактом, что высшие матричные элементы, начиная с некоторого, приравниваются к нулю, а оставшиеся элементы затем используют при решении уравнения Больцмана [2] в рамках соответствующего метода. Умножая уравнение Больцмана (1) с интегралом для упругих столкновений на $\psi = 1$ и интегрируя по всему пространству скоростей, получим:

$$\nabla_t n_\alpha+\nabla_r n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha=\left(\delta n_\alpha/\delta t\right)=0 \tag{2}$$

а соответствующие матричные элементы тождественно равны нулю в силу хорошо известного свойства сохранения числа частиц в результате столкновений интегралом упругих столкновений. Умножая кинетическое уравнение с интегралом столкновений Больцмана:

$$(\delta f_\alpha\left(r,v_\alpha,t\right)/\delta t)=\Sigma_\beta\int dv_\alpha d\Omega g_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\beta},\theta\right)\left(f_\alpha^{'}f_\beta^{'}-f_\alpha f_\beta\right)=\Sigma_\beta J_{\alpha\beta} \qquad (3)$$

на $\psi = m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha$ и интегрируя по всему пространству скоростей, получим парциальное уравнение движения:

$$n_\alpha m_\alpha\left[\nabla_t\boldsymbol{u}_\alpha+\left(\boldsymbol{u}_\alpha\nabla\right)\boldsymbol{u}_\alpha\right]^\nu+\nabla_\nu n_\alpha k_B T_\alpha-\nabla_j\sigma_\alpha\nu_j-$$
$$-e_\alpha n_\alpha\left(\boldsymbol{E}++\left(1/c\right)\left[\boldsymbol{u}_\alpha\boldsymbol{B}\right]\right)^\nu=\Sigma_\beta\int d\boldsymbol{v}_\alpha m_\alpha v_\alpha^\nu J_{\alpha\beta}=$$
$$=\Sigma_\beta\left(\delta M_\alpha/\delta t\right)_\beta^\nu \qquad (4)$$

Величина для изменения парциального импульса за счёт столкновений $\Sigma_\beta\left(\delta M_\alpha/\delta t\right)_\beta^\nu$ только для случая, когда в аппроксимации (1) функцией нулевого приближения является максвелловская функция, возможно выразить через матричные элементы для произвольного закона взаимодействия между частицами для сильнонеравновесной смеси с большой разностью температур компонент и относительными скоростями, сравнимыми с тепловой скоростью. В результате выражение для изменения парциального импульса, обусловленного столкновениями с молекулами сорта β, будет иметь вид:

$$\left(\delta M_\alpha/\delta t\right)_\beta^\nu=n_\alpha n_\beta m_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}V_{\alpha\beta}\{\psi_1 a^\nu+\psi_2 a^2 a^\nu+$$
$$+\psi_3 a_\alpha^{i\nu}a^i+\psi_4 a_\beta^{i\nu}a^i+\psi_5 a_\alpha^{ss\nu}+\psi_6 a_\beta^{ss\nu}+\left(a^2\delta^{i\nu}+2a^i a^\nu\right)\times$$
$$\times(\psi_7 a_\alpha^{ss\nu}+\psi_8 a_\beta^{ss\nu})+\Psi_9 a_\alpha^{ssi}a_\beta^{i\nu}+\psi_{10}a_\beta^{ssi}a_\alpha^{i\nu}+$$
$$+\psi_{11}(a_\alpha^{ssi}a_\beta^{kki}a^\nu+a_\alpha^{ssi}a_\beta^{kk\nu}a^i+a_\alpha^{ss\nu}a_\beta^{kki}a^i)\} \qquad (5)$$

Здесь $a^i=\left(u_\alpha-u_\beta\right)^i/V_{\alpha\beta}$, $a_\alpha^{ij}=2\sigma_\alpha^{ij}/n_\alpha m_\alpha V_{T\alpha}^2$, $a_\alpha^{ss\nu}=\dfrac{4q_\alpha^\nu}{n_\alpha m_\alpha V_{T\alpha}^3}$ – безразмерные гидродинамические переменные, перед которыми в качестве сомножителя фигурирует соответствующий матричный элемент, $V_{T\alpha}^2=2K_B T_\alpha/m_\alpha, V_{\alpha\beta}^2=V_{T\alpha}^2+V_{T\beta}^2, \Omega_{\alpha\beta}^{(p,q)}$ – интеграл Чепмена – Каулинга, определяемый соотношением:

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(p,q)}\left(8/3\sqrt{\pi}\right)V_{\alpha\beta}=\exp\int\left(-g^2\right)g^{2q+3}\sigma_{\alpha\beta}\left(g,\theta\right)\left(1-Cos^p\theta\right)dgd\Omega,$$
$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (6)$$

Коэффициенты ψ_i(I = 1, ..., 11) представляют собой линейные выражения относительно величин X, XU, XUS и приведены в таблице 1. Величины X, U, S являются функциями омега – интегралов Чепмена – Каулинга, алгоритм расчёта которых для произвольных законов взаимодействия и больших скоростей и разностей парциальных температур в случае, когда функция нулевого прибли-

Таблица 1. Зависимость коэффициентов ψ_i от X, XU, XUS и β_α и β_β.

i	ψ_i
1	-1
2	X
3	$-\beta_\alpha X$
4	$-\beta_\beta X$
5	$(1/2)X\beta_\alpha^{3/2}$
6	$-(1/2)X\beta_\beta^{3/2}$
7	$-(7/10)XU\beta_\alpha^{3/2}$
8	$(7/10)XU\beta_\beta^{3/2}$
9	$(7/20)XU\beta_\beta\beta_\alpha^{3/2}$
10	$-(7/20)XU\beta_\alpha\beta_\beta^{3/2}$
11	$-(63/50)XUS\beta_\alpha^{3/2}\beta_\beta^{3/2}$
β_α	$V_{T\alpha}^2/\left(V_{T\alpha}^2+V_{T\beta}^2\right)$
β_β	$V_{T\beta}^2/\left(V_{T\alpha}^2+V_{T\beta}^2\right)$

жения является максвелловской функцией, нетрудно воспроизвести. Наиболее простой вид величины X, U, S принимают в случае степенного закона взаимодействия между частицами:

$$X=\left(4/n-1\right), XU=(16/n^2-1)/35, \tag{7}$$

$$XUS=\left(16/n^2-1\right)\left(1+4/3n\right)/105$$

где n – показатель в степенном законе взаимодействия. В случае максвелловского закона взаимодействия между частицами, когда n = 4 все коэффициенты Ψ_i обращаются в нуль за исключением $\Psi_1=-1$. Таким образом в максвелловском газе не зависимо от величины относительной скорости по сравнению с тепловой изменение парциального импульса за счет столкновений будет пропорционально относительной скорости и совпадает с [3; 4], где для вычисления матричных использовался линеаризованный оператор столкновений. Для частных случаев газа из твёрдых сфер и газа, молекулы которого взаимодействуют по кулоновскому закону, выражения для изменения парциального импульса для произвольных относительных скоростей при аппроксимации парциальной функции распределения максвелловской функцией (пятимоментная аппроксимация), было получено в работах [3; 5]. Разложение (5) для изменения парциального импульса за счёт столкновений включает в себя слагаемые относительно гидродинамических переменных вплоть до третьей до третьей степени и поэтому область его применимости распространяется на малые, но конечные значения $a^i, a_\alpha^{ij}, a_\alpha^{ss\nu}$. Данное выражение естественным образом совпадает с соответственным выражением работ [1–5], в области относительных скоростей, пренебрежимо малых по сравнению с тепловыми $(a^i \approx a_\alpha^{ij} \approx a_\alpha^{ss\nu} < 1)$. По сравнению с [3; 4] в (5) учитывается вклад в изменение парциального импульса за счёт столкновения моментов от функции распределения более высокого порядка – тензора вязких напряжений и потока тепла для произвольного закона взаимодействия. Причём вклад высших моментов существенным образом зависит от закона взаимодействия между сталкивающимися частицами и для степенного закона взаимодействия может быть оценен, используя соотношение (7). Значение величин X, XU и XUS характеризует вклад нелинейных слагаемых в общее выражение (5). Для модели твёрдых сфер (n = ∞) широко используемой для оценки величин коэффициентов переноса, данные коэффициенты имеют значения –1/5, –1/35 и –7/(9 × 35) соответсвенно. Для предельного случая кулоновского взаимодействия (n = 2) данные величины принимают значения –1/5, 3/35, –28/(9 × 35). Поэтому вклад нелинейных слагаемых, представляющих собой моменты третьего порядка от интеграла столкновений и пропорциональных величине X, не превосходит 25% в (5). Моменты пятого порядка от интеграла столкновений в (5) (с седьмого по десятое слагаемые, пропорциональные величине XU) дают уже меньший вклад, не превосходящий восьми процентов для предельных случаев смесей газов, состоящих из твердых сфер или заряженных частиц. И, наконец, момент восьмого порядка от интеграла столкновений определяет одиннадцатое слагаемое в (5) пропорциональное величине XUS и даёт вклад, не превосходящий процента. Таким образом можно утверждать, что для $(a^i \approx a_\alpha^{ij} \approx a_\alpha^{ss\nu} \approx 1)$. во всей области степенных взаимодействий между частицами газа вклад от матричных элементов в (5) с возрастанием степени полинома уменьшается. В случае более сложных законов взаимодействия между частицами газа вклад матричных элементов в (5) существенным образом зависит от температуры [7; 8]. На фиг. 1, 2 приводятся зависимости величин X, XU, XUS от приведенной температуры $T^* = T/\varepsilon$, где ε – глубина потенциальной ямы для модели потенциала Букингема:

$$\varphi(r)=\begin{cases}\left[\varepsilon/\left(1-6/\alpha\right)\right]\left[\left(6/\alpha\right)\exp\left\{\alpha\left(1-r/\sigma\right)\right\}-\left(\sigma/r\right)^6, r_{max}>r\right.\\ \infty, r_{max}<r\end{cases} \tag{8}$$

σ – эффективное сечение столкновения, α – третий подгоночный параметр. Потенциал Букингема достаточно точно моделирует взаимодействие относительно сложных молекул газовой смеси. Для предельных значений α = 12 и α = 15 как следует из рис. 1 и 2 наблюдается уменьшение вклада матричных элементов оператора столкновений соответствующих более высокому моменту относительно больцмановского интеграла для широкого интервала температур. При этом в предельном случае α = 12 вклад матричных элементов в (5), соответствующих моменту третьего порядка от интеграла столкновений, про-

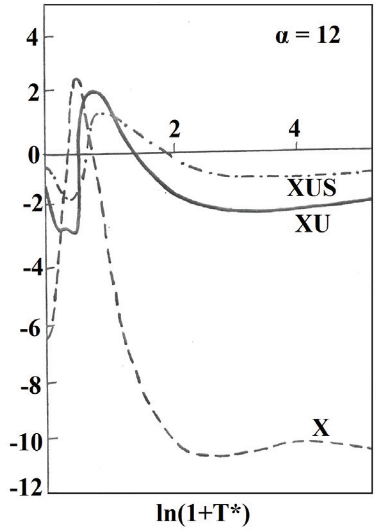

Рис. 1.
Зависимость величин X, XU и XUS в случае потенциала Букингема при α = 12 от безразмерной температуры.

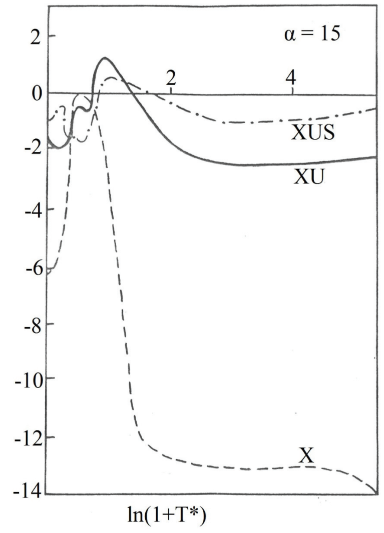

Рис. 2.
Зависимость величин X, XU и XUS в случае потенциала Букингема при α = 15 от безразмерной температуры.

порциональных X, не превосходит 11%, пропорциональных XU и соответствующих моменту пятого порядка, не превосходит 3% и пропорциональных XUS, соответствующих моменту восьмого порядка, не превосходит 2,5%. Следует отметить, что знак вклада матричных элементов, пропорциональныхX, XU, XUS зависит от величины приведенной температуры T^* и в отличии от степенного потенциала взаимодействия может быть как положительным, так и отрицательным. В предельном случае α = 15 для потенциала Букингема вклад матричных элементов пропорциональных X, XU, XUS в величину изменения парционального импульса за счет столкновений не превосходит 14%, 3% и 1% соответственно. Обратимся к вычислению матричных элементов, обусловливающих изменение парциальной хаотической энергии за счет столкновений. Умножая уравнение Больцмана с интегралом для упругих столкновений на $\psi = (m_\alpha/2)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)^2$ и интегрируя по всему пространству скоростей, получим уравнение для эволюции парциальной хаотической энергии

$$\left(3n_\alpha/2\right)k_B\left(\nabla_t+\boldsymbol{u}_\alpha\nabla\right)T_\alpha+n_\alpha T_\alpha k_B\left(\nabla\boldsymbol{u}_\alpha\right)+\left(\nabla\boldsymbol{q}_\alpha\right)-\sigma_\alpha^{\nu j}\nabla_\nu u_\alpha^j=$$
$$=\Sigma_\beta\int d\boldsymbol{v}_\alpha\left(m_\alpha/2\right)\left(\boldsymbol{v}_\alpha-\boldsymbol{u}_\alpha\right)^2 J_{\alpha\beta}=\Sigma_\beta\left(\delta E_\alpha/\delta t\right)_\beta. \tag{9}$$

Для сильнонеравновесной газовой смеси должна сохраняться полная кинетическая энергия, состоящая из кинетической поступательной энергии, определяемой парциальной гидродинамической скоростью, и энергии хаотического движения, характеризуемой парциальной температурой. Поэтому в правой части (9) фигурирует величина изменения парциальной хаотической энергии за счет столкновений:

Таблица 2. Зависимость коэффициентов δ_i от X, XU, XUS и β_α и β_β.

i	δ_i
1	$1-\lambda_{\alpha\beta}+(5/2)\lambda_{\alpha\beta}X$
2	$\beta_\alpha^{3/2}\left\{\left[(3/2)(R_{\alpha\beta}-\lambda_{\alpha\beta}/M_\beta)+2\lambda_{\alpha\beta}-1/2\right]X-(7/2)\lambda_{\alpha\beta}XU\right\}$
3	$\beta_\beta^{3/2}\left\{(3/2-2\lambda_{\alpha\beta}+1/2)X(7/2)\lambda_{\alpha\beta}X\right\}$
4	$-(\beta_\alpha\beta_\beta)^{3/2}\left\{(1-R_{\alpha\beta}+\lambda_{\alpha\beta}/M_\alpha-2\lambda_{\alpha\beta})\times\right.$ $\left.\times(21/20)XU+(63/20)\lambda_{\alpha\beta}XUS\right\}$
$\lambda_{\alpha\beta}$	$M_\alpha(1-T_\beta/T_\alpha)$
M_α	$m_\alpha/(m_\alpha+m_\beta)$
$R_{\alpha\beta}$	m_α/m_α

$$(\delta E_\alpha/\delta t)_\beta=\beta_\alpha n_\alpha n_\beta m_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}V_{\alpha\beta}^2\{-(3/2)\lambda_{\alpha\beta}+\delta_1 a^2+\delta_2 a^i a_\alpha^{ssi}+$$
$$+\delta_3 a_\beta^{ssi}a^i+\delta_4 a_\alpha^{ssi}a_\beta^{kki}\} \qquad (10)$$

В котором матричные элементы фигурируют в качестве сомножителей перед гидродинамическими переменными. В (10) используются следующие обозначения:

$$\lambda_{\alpha\beta}=(1-T_\alpha/T_\beta)M_\alpha, M_\alpha=m_\alpha/m_\beta \qquad (11)$$

и значения δ_i (i = 1, …, 4), приведенные в таблице 2. Первое слагаемое в (10) определяет обмен хаотической энергией между компонентами сильнонеравновесной газовой смеси и пропорциональное разности парциальных температур, второе – трансформацию поступательной кинетической парциальной кинетической энергии в хаотическую (пропорциональное квадрату относительной скорости). Эффект трансформации поступательной кинетической энергии в хаотическую при взаимодействии лёгкой заряженной компоненты с тяжёлой, с привлечением двух первых слагаемых разложения (10) изучались впервые в [8]. Слагаемое в (10), пропорциональное δ_1, обуславливает вклад в величину изменения парциальной хаотической энергии за счёт столкновений, пропорциональный полиномам второй степени в пространстве скоростей, третье и четвёртое слагаемые, пропорциональные δ_2 и δ_3 – вклад, пропорциональный полиномам четвертой степени, пятое слагаемое, пропорциональное δ_4 – вклад, пропорциональьный полиномам шестой степени. При этом δ_2, δ_3 и δ_4 пропорциональны величинам X, XU и XUS, которые тождественно обращаются в нуль для максвелловского газа. Таким образом, для максвелловского газа слагаемые, пропорциональные полиномам более, чем полиномам более, чем второго порядка, не дают вклада в столкновительную часть уравнения переноса (9). Для прочих законов взаимодействия слагаемые разложения оператора столкновений, пропорциональные полиномам более, чем второго порядка, дают малый вклад. Например, для степенного закона взаимодействия между молекулами вклад слагаемых в разложение оператора столкновений, пропорциональных четвёртой степени не превосходит двадцати пяти процентов, а пропорциональных шестой степени не превосходит шести процентов. Для более реалистичного потенциала взаимодействия Букингема вклад слагаемых, пропорциональных четвертой и шестой степени для широкого интервала температур не превосходит 14% и 3% соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев Б.М. Кинетическая теория неоднородных и неравновесных газовых смесей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика, 2016. № 3. С. 30–36.
2. Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // Europ. J. Mech B/Fluids 36, 17–24 (2012).
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М. Иностранная литература, 1960. 510 с.
4. Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А. Рекуррентная процедура расчёта ядер нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана // Журнал технической физики. 2016. Том 86. Вып. 4. С. 10–20.
5. Shunk R.W. Mathematically Structure of Transport Equations for Multispecies Flows. Reviews of Geophys. And Space Physics, 1977. Vol. 15. no. 4. pp. 429–445.
6. Иванов М.С., Коротченко М.А., Михайлов Г.А., Рогазинский С.В. Глобально-весовой метод Монте-Карло для нелинейного уравнения Больцмана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. Вып. 10. С. 1860–1870.
7. Черемисин Ф.Г. Метод прямого численного интегрирования уравнения Больцмана // Доклады Академии наук. 1997. Вып. 10. С. 53–57.
8. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с., ил.

REFERENCES

1. Markeev B.M. Kineticheskaya teoriya neodnorodnykh i neravnovesnykh gazovykh smesei [Kinetic theory and nonequilibrium inhomogeneous gas mixtures] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2016. no. 3. pp. 30–36.
2. Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu. Recurrence relations betweenkernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // Europ. J. Mech B/Fluids 36, 17–24 (2012).
3. *Chapman S., Cowling T.* The *mathematical theory of nonuniform gases.* Cambridge: Cambridge University Press, 1953.
4. Rekurrentnaya protsedura rascheta yader nelineinogo integrala stolknovenii uravneniya Bol'tsmana [Recurrent procedure of calculation of kernels of nonlinear collision integral of the Boltzmann equation] / Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu., Ender A.Ya., Ender I.A. // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [J. Tech. Phys.]. 2016. Vol. 86. no. 4. pp. 10–20.

5. Shunk R.W. Mathematically Structure of Transport Equations for Multispecies Flows. Reviews of Geophys. and Space Physics, 1977. Vol. 15. no. 4. pp. 429–445.
6. Global'no-vesovoi metod Monte-Karlo dlya nelineinogo uravneniya Bol'tsmana [Monte Carlo global weight method for the nonlinear Boltzmann equation] / Ivanov M.S., Korotchenko M.A., Mikhailov G.A., Rogazinskii S.V. // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [Computational mathematics and mathematical physics]. 2005. Vol. 45. no. 10. pp. 1860–1870.
7. Cheremisin F.G. Metod pryamogo chislennogo integrirovaniya uravneniya Bol'tsmana [The method of direct numerical integration of the Boltzmann equation] // Doklady Akademii nauk. 1997. no. 10. pp. 53–57.
8. Ferziger J.H., *Kaper* Y.G. Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam–London: North-Holland Publisishing comp., 1972.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Маркеев Борис Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет;
e-mail: markeevb@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Boris Markeev – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Computational Mathematics and Methodology of Teaching Informatics at the Moscow State Regional University;
e-mail: markeevb@gmail.com

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Маркеев Б.М. Вычисление матричных элементов больцмановского оператора столкновений для газовой смеси // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 68–76.
DOI: 1018384/2310-7251-2016-4-68-76.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

B. Markeev. Calculation of matrix elements of the Boltzmann collision operator for gas mixtures // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 68–76.
DOI: 1018384/2310-7251-2016-4-68-76.