РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 517.946
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-6-23

ТРИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ

Шабанова Г. И.
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)
644080, Омск, пр. Мира 5, Российская Федерация

Аннотация. Исследуемые задачи состоят в восстановлении источника в граничном условии и потенциала при младшем члене уравнения гиперболического типа в линеаризованной и точной постановках. Рассматриваются случаи зависимости источника и заданной информации от различных переменных. Изучаются свойства искомых функций. Основным результатом исследования являются теоремы единственности потенциала $q(y)$ на полупрямой $y \geq 0$ и источников $f(x)$, $f(t)$ принадлежащих специальным классам функций.

Ключевые слова: линеаризация, интегральное уравнение, интегральные преобразования.

THREE INVERSE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS FOR HYPERBOLIC-TYPE EQUATION IN DIFFERENT STATEMENTS

G. Schabanowa
Siberian State Automobile and Highway Academy (SibADI)
prosp. Mira 5, 644080 Omsk, Russia

Abstract. The problems in question consist in recovering an unknown source in the boundary condition and an unknown potential at the smallest term of the hyperbolic-type equation in linearized and exact statements. We consider the dependences of the desired source and given information on different variables. We study the properties of the required functions. The main result of the investigation is the theorems of uniqueness of the potential $q(y)$ on the semi-axis $y \geq 0$ and of the sources $f(x)$, $f(t)$ and which belong to special classes of the functions.

Keywords: linearization, integral equation, integral transformations.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

1. Обратная задача для уравнения гиперболического типа с неизвестным источником и неизвестным потенциалом.

Пусть в области $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$, $t > 0$ задано уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - q(y)U(x,y,t). \tag{1}$$

Обобщенная функция $U(x, y, t)$ равна нулю для всех $t < 0$ и удовлетворяет уравнению (1), а также начальным данным

$$U(x,y,t)\Big|_{t=+0} = 0, \tag{2}$$

$$U_t'(x,y,t)\Big|_{t=+0} = 0, \tag{3}$$

и граничному условию:

$$U_y'(x,y,t)\Big|_{y=0} = \delta(t)\cdot f(x), \tag{4}$$

в котором $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $f(x)$ – неизвестная функция действительной переменной, чётная, финитная, положительно определённая и бесконечно дифференцируемая в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$. $f(x) = 0$ при $|x| > \varepsilon$. Будем считать, что множество функций $f(x)$ с отмеченными свойствами составляет класс Φ^*.

По двум значениям решения прямой задачи в точках прямой $y = 0$

$$U(x^j,0,t) = \varphi^j(t),\ j = 0,1 \tag{5}$$

требуется найти неизвестный коэффициент уравнения (1) $q(y)$ в классе непрерывных и ограниченных функций и неизвестный источник $f(x)$ в граничном условии (4) – в классе функций Φ^*.

Задачи, близкие по постановке, рассмотрены в [1].

2. Обратная задача для уравнения гиперболического типа с неизвестным источником $f(t)$ и неизвестным потенциалом $q(y)$.

Пусть обобщённая функция $U(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), (3) и граничным данным:

$$U_y'\Big|_{y=0} = \delta(x)f(t), \tag{6}$$

где $f(t)$ – неизвестная, положительно определенная, обобщенная финитная функция. $f(t) \neq 0$ при $0 \leq t \leq T$, и $f(t) = 0$ при $t > T$, $q(y)$ – неизвестная функция класса $\mathbf{Q}_M$.

Напомним, что класс $\mathbf{Q}_M$ был введён в работе [2] как множество функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $q(y) \in C^1[0,\infty) \cap L_1[0,\infty), q(y)_{L_1[0,\infty)} \le M.$

2. Функция $q(y)$ имеет абсолютный минимум: $q_{\min abs} = q(b^*) = m < 0$.

3. Для больших значений аргумента $y \ge b^*$ функция $q(y) < 0$ и монотонно стремится к нулю: $q(y) = o\left(-\frac{1}{y^2}\right)$, $y \to \infty$.

4. Последовательность элементов линейного нормированного пространства $L_1[0,\infty)$ $q_n(y) = \begin{cases} q(y), \text{ if } y \in [0,b_n], \\ 0, \text{ if } y \in (b_n,\infty) \end{cases}$ сходится в пространстве L_1 $[0, \infty)$ к элементу $q(y) \in L_1$ $[0, \infty)$ по норме.

По известному обобщённому решению (5) в двух фиксированных точках $x = x^j$ прямой $y = 0$ требуется найти неизвестный потенциал $q(y)$ в классе функций $\boldsymbol{Q_M}$ и неизвестный источник $f(t)$.

3. Обратная задача с фиксированным временем.

Пусть обобщённая функция $U(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (1), начальным данным (2), (3) и граничному условию (4). По известным обобщённым решениям прямой задачи на прямой $y = 0$ в фиксированные моменты времени:

$$U(x,0,t^j) = \varphi^j(x), j = 0,1, \tag{7}$$

где $|\varphi^j(x)| \ge M^* > 0$, требуется восстановить потенциал q(y) в классе функций $\boldsymbol{Q_M}$ и источник $f(x)$ в классе функций Φ^*.

Исследование обратной задачи 1. Линеаризация прямой задачи

Положим:

$$U(x,y,t) = U_0(x,y,t) + \bar{\lambda} U_1(x,y,t), \tag{8}$$

$\bar{\lambda}$ малый параметр. Пусть $q(y) = 0 + q_1(y)$, $f(x) = [1 + f_1(x)]\theta(\varepsilon - |x|)$.

$f_1(x)$ – четная функция, определенная на интервале $\left[-\frac{x^1}{2}, \frac{x^1}{2}\right]$ и периодически продолженная с помощью равенства $f_1(x + x^1) = f_1(x)$ на всю числовую ось. $f_1(x)$ и все ее производные непрерывны на сегменте $\left[-\frac{x^1}{2}, \frac{x^1}{2}\right]$ и удовлетворяют условиям $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_1\left(-\frac{x^1}{2}\right) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_1\left(\frac{x^1}{2}\right)$.

Линеаризуем задачу (1)–(4), разлагая её решение в ряд по степеням $\bar{\lambda}$ и пренебрегая членами порядка $\bar{\lambda}^2$ [3]. Получим два дифференциальных уравнения в частных производных с соответствующими условиями. $U_0(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных $\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}$ и дополнительным условиям:

$$U_0(x,y,t)\Big|_{t=+0}=0,\ U_{0t}'(x,y,t)\Big|_{t=+0}=0,\ U_{0y}'(x,y,t)\Big|_{y=0}=\delta(t).$$

$U_1(x, y, t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}-q_1(y)U_0(x,y,t), \tag{9}$$

$$U_1(x,y,t)\Big|_{t=+0}=0, \tag{10}$$

$$U_{1t}'(x,y,t)\Big|_{t=+0}=0, \tag{11}$$

$$U_{1y}'(x,y,t)\Big|^{y=0}=\delta(t)\cdot f_1(x). \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что:

$$U_0(x,y,t) = -\theta(t-y).$$

Заметим, что $U_0(xj,0,t) = -\theta(t)$, $j = 0,1$. В силу (8) при $\overline{\lambda}=1$ имеем:

$$U_1(x^j,0,t) = \varphi^j(\mathrm{t}) + \theta(t),\ j = 0,1. \tag{13}$$

Задачу (9)–(13) будем решать методом интегральных преобразований. Применяя преобразование Лапласа по переменной t, получим:

$$p^2W_1^*(p,x,y)=\frac{\partial^2 W_1^*(p,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_1^*(p,x,y)}{\partial y^2}+\frac{1}{p}q_1(y)e^{-yp}, \tag{14}$$

$$[W_1^*(p,x,y)]_y'\Big|_{y=0}=\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t)f_1(x)dt=f_1(x), \tag{15}$$

где

$$W_1^*(p,x,y)=\int_0^\infty e^{-pt}U_1(x,y,t)dt.$$

В силу (13):

$$W_1^{*(j)}(p,x^j,0)=\int_0^\infty e^{-pt}U_1(x^j,0,t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi^j(t)dt+\frac{1}{p},\ j=0,1. \tag{16}$$

К вспомогательной задаче (14), (15) применим преобразование Фурье по переменной x. Получим дифференциальное уравнение:

$$\left(p^2+s^2\right)W_2^*\left(s,p,y\right)=\frac{d^2}{dy^2}W_2^*\left(s,p,y\right)+2\pi\delta\left(s\right)\frac{1}{p}q_1\left(y\right)e^{-yp} \qquad (17)$$

с начальным условием $\left[W_2^*\left(s,p,y\right)\right]_y'\Big|_{y=0}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{isx}f_1\left(x\right)dx=F_1\left(s\right),$

где $W_2^*\left(s,p,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{isx}W_1^*\left(p,x,y\right)dx.$

В результате косинус – преобразования Фурье по переменной уравнение (17) перейдёт в функциональное уравнение:

$$W_3^*\left(s,p,\gamma\right)=\frac{1}{p^2+s^2+\gamma^2}\left(-F_1\left(s\right)+\frac{2\pi}{p}\delta\left(s\right)B\left(p,\gamma\right)\right).$$

Здесь:

$$W_3^*\left(s,p,\gamma\right)=\int\limits_0^{\infty}cos\gamma y W_2^*\left(s,p,y\right)dy,$$

$$F_1\left(s\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{isx}f_1\left(x\right)dx, \qquad (18)$$

$$B\left(p,\gamma\right)=\int\limits_0^{\infty}cos\gamma y q_1\left(y\right)e^{-yp}dy. \qquad (19)$$

Выполним обращение преобразований по переменным y и x:

$$W_2^*\left(s,p,y\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}cos\gamma y W_3^*\left(s,p,\gamma\right)d\gamma=-F_1\left(s\right)\frac{e^{-y\sqrt{p^2+s^2}}}{\sqrt{p^2+s^2}}+\delta\left(s\right)\tilde{B}\left(p,y,s\right),$$

$$\tilde{B}\left(p,y,s\right)=\frac{4}{p}\int\limits_0^{\infty}cos\gamma y\frac{B\left(p,\gamma\right)}{p^2+s^2+\gamma^2}d\gamma; \qquad (20)$$

$$W_1^*\left(p,x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}W_2^*\left(p,s,y\right)ds=\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}F_1\left(s\right)\frac{e^{-y\sqrt{p^2+s^2}}}{\sqrt{p^2+s^2}}ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}\delta\left(s\right)\tilde{B}\left(p,y,s\right)ds=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}F_1\left(s\right)J_0\left(s\sqrt{t^2-y^2}\right)\theta\left(t^2-y^2\right)dsdt+\frac{1}{2\pi}\tilde{B}\left(p,y,0\right). \qquad (21)$$

Решение обратной задачи. Теоремы единственности

Для решения обратной задачи (9)–(13) вычислим разность $W_1^*\left(x^1,0,p\right)-W_1^*\left(x^0,0,p\right)$ двумя способами: исходя из полученной формулы (21) и из формулы (16). Сравним результаты.

$$W_1^*\left(x^1,0,p\right)-W_1^*\left(x^0,0,p\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-pt}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-isx^1}-e^{-isx^0}]F_1\left(s\right)J_0\left(st\right)dsdt=\int_0^\infty e^{-pt}\left[\varphi^1\left(t\right)-\varphi^0\left(t\right)\right]dt.$$

Интегральные преобразования неизвестной функции $q_1(y)$ исчезают, и мы имеем интегральное уравнение, однозначно разрешимое относительно функции $F_1(s)$. Выбирая $x^0 = 0$ и фиксируя x^1 из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, а также, применяя теорему Лерха, получим преобразование Бесселя:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[1-e^{-isx^1}]F_1\left(s\right)J_0\left(st\right)ds=\varphi^1\left(t\right)-\varphi^0\left(t\right),$$

обращение которого позволяет выразить искомую функцию $F_1(s)$:

$$F_1\left(s\right)=\frac{\pi s}{1-e^{-isx^1}}\int_0^\infty t\left[\varphi^1\left(t\right)-\varphi^0\left(t\right)\right]J_0\left(st\right)dt=\frac{\pi s}{1-e^{-isx^1}}\left[\overline{\varphi}^1\left(s\right)-\overline{\varphi}^0\left(s\right)\right]. \quad (22)$$

В формуле, полученной выше, $\overline{\varphi}^j\left(s\right)=\int_0^\infty t\varphi^j\left(t\right)J_0\left(st\right)dt\Big),\ j=0,1.$ Взаимная однозначность операционных соответствий доказывает единственность источника

$$f_1\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}F_1\left(s\right)ds. \quad (23)$$

В процессе регуляризации по Тихонову [4] преобразуем функцию $\Psi\left(\tau\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-e^{-i\tau}}$ с основным периодом $\tau = 2\pi$; $\tau = sx^1$, $x^1 \in (0, \varepsilon)$. $\Psi\left(\tau\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\tau}=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\tau=\delta\left(\tau\right)$. На всяком интервале $T_k = ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ длиной 2π функция $\Psi(\tau)$ есть $\delta(\tau - 2\pi k)$ с носителем в точках $\tau = 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Рассмотрим:

$$F_1\left(\tau\right)=\frac{2\pi^2\tau}{x^1}\Psi\left(\tau\right)\left[\overline{\varphi}^1\left(\frac{\tau}{x^1}\right)-\overline{\varphi}^0\left(\frac{\tau}{x^1}\right)\right] \quad (24)$$

на интервале T_k. Из формулы (24) имеем:

$$F_1^{(k)}(\tau)=\frac{2\pi^2\tau}{x^1}\Psi^{(k)}(\tau)\left[\bar{\varphi}^1\left(\frac{\tau}{x^1}\right)-\bar{\varphi}^0\left(\frac{\tau}{x^1}\right)\right]=\frac{2\pi^2\tau}{x^1}\delta(\tau-2\pi k)\left[\bar{\varphi}^1-\bar{\varphi}^0\right]. \quad (25)$$

Вычислим $f_1(x)$ по формуле (23), учитывая (25). Разобьем точками $\tau_n = \pm(2n+1)\pi$, $n = 0,1, \ldots, m$, сегмент $-R \le \tau \le R$, $R = (2m+1)\pi$, $m \in N$ и фиксировано, на частичные сегменты, не имеющие общих внутренних точек, и преобразуем интеграл:

$$\frac{1}{2\pi x^1}\int_{-R}^{R} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi x^1}\int_{-(2m+1)\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau)d\tau=$$

$$\frac{1}{2\pi x^1}\sum_{k=-m}^{m}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}}\cdot\frac{2\pi^2\tau}{x^1}\delta(\tau-2\pi k)\left[\bar{\varphi}^1\left(\frac{\tau}{x^1}\right)-\bar{\varphi}^0\left(\frac{\tau}{x^1}\right)\right]d\tau=$$

$$\frac{2\pi^2}{(x^1)^2}\sum_{k=-m}^{m} e^{-i\frac{2\pi kx}{x^1}}\cdot k\cdot\left[\bar{\varphi}^1\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right)-\bar{\varphi}^0\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right)\right]=\frac{2\pi^2}{(x^1)^2}\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{-i\frac{2\pi kx}{x^1}}, \quad (26)$$

где:

$$c_k = k\cdot\left[\bar{\varphi}^1\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right)-\bar{\varphi}^0\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right)\right] \quad (27)$$

коэффициенты полученного ряда удовлетворяют равенству $c_k = -c_{-k}$.

В соотношении (26) перейдём к пределу при $R \to \infty$. Получим:

$$\frac{1}{2\pi x^1}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi x^1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau)d\tau=f_1(x)=$$

$$=\frac{\tilde{}\,\aleph^2}{(\tilde{}\,^1)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{2\pi kx}{x^1}}=\frac{2}{(\ ^1)^2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k cos\frac{kx}{1}.$$

Теорема 1. Неизвестный источник $f(x) = [1 + f_1(x)]\theta(\varepsilon - |x|)$ одномерной обратной задачи (1)–(5) единственен в классе функций Φ^*.

Для определения неизвестного потенциала $q_1(y)$ рассмотрим интегральные преобразования (19)–(21) и вычислим $W_1^*(x^0, 0, p)$:

$$W_1^*\left(x^0,0,p\right)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-pt}\int_0^{\infty} e^{-isx^0} F_1(s)J_0(st)dtds+\frac{1}{2\pi}\tilde{B}(p,0,0)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-pt}\int_0^{\infty} F_1(s)J_0(st)dtds+\frac{2}{\pi p}\int_0^{\infty}\frac{B(p,\gamma)}{p^2+\gamma^2}d\gamma. \quad (28)$$

В соответствии с формулой (16):

$$W_1^*\left(x^0,0,p\right)=\int_0^\infty e^{-pt}U_1\left(x^0,0,t\right)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi^0\left(t\right)dt++\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}[\varphi^0\left(t\right)dt+\theta\left(t\right)]dt. \quad (29)$$

Выразим преобразование функции $B\left(p,\gamma\right)=\int_0^\infty cos\gamma y q_1\left(y\right)e^{-yp}dy$

из системы интегральных уравнений (28)–(29):

$$\frac{2}{\pi p}\int_0^\infty \frac{B\left(p,\gamma\right)}{p^2+\gamma^2}d\gamma=\int_0^\infty e^{-pt}[\varphi^0\left(t\right)dt+\theta\left(t\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F_1\left(s\right)J_0\left(st\right)ds\ ]dt. \qquad (30)$$

Рассмотрим интеграл из правой части (30) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F_1\left(s\right)J_0\left(st\right)ds=\chi\left(t\right)$.

Заменим подынтегральную функцию $F_1(s)$, введённую в (18), по формуле (22). От переменной s перейдём к $\tau = sx^1$. Воспользуемся формулой (24). В результате регуляризации получим функцию:

$$\chi\left(t\right)=\frac{1}{2\pi x^1}\int_{-\infty}^\infty F_1\left(\frac{\tau}{x^1}\right)J_0\left(\frac{\tau}{x^1}t\right)d\tau=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi x^1}\sum_{k=-m}^{m}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}F_1^{(k)}\left(\frac{\tau}{x^1}\right)J_0\left(\frac{\tau}{x^1}t\right)d\tau=$$

$$=\frac{2\pi^2}{(x^1)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kJ_0\left(\frac{2\pi k}{x^1}t\right)=\frac{4\pi^2}{(x^1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}c_kJ_0\left(\frac{2\pi k}{x^1}t\right). \qquad (31)$$

В (27) определены коэффициенты функционального ряда (31) c_k.

Учитывая сделанные замечания, перепишем равенство (30) в виде:

$$\frac{2}{\pi p}\int_0^\infty \frac{B\left(p,\gamma\right)}{p^2+\gamma^2}d\gamma=\int_0^\infty e^{-pt}[\varphi^0\left(t\right)+\theta\left(t\right)+\frac{4\pi^2}{(x^1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}c_kJ_0\left(\frac{2\pi k}{x^1}t\right)dt. \qquad (32)$$

Преобразуем левую часть равенства (32), учитывая формулу (19):

$$\frac{2}{\pi p}\int_0^\infty \frac{B\left(p\quad\right)}{p^2+\gamma^2}d\gamma=\frac{2}{\pi p}\int_0^\infty \frac{1}{p^2+\gamma^2}\int_0^\infty cos\gamma y q\ \left(y\right)e^{\ yp}dyd\gamma=$$

$$=\frac{2}{\pi p}\int_0^\infty q_1\left(y\right)e^{-yp}\int_0^\infty cos\gamma y\frac{1}{p^2+\gamma^2}d\gamma dy=\frac{2}{\pi p}\int_0^\infty q_1\left(y\right)e^{-yp}\frac{\pi}{2}\frac{e^{-yp}}{p}dy=\frac{1}{p^2}\int_0^\infty q_1\left(y\right)e^{-2yp}dy.$$

Перепишем равенство (32) в виде:

$$\int_0^\infty q_1(y)e^{-2yp}dy = p^2\int_0^\infty e^{-pt}[\varphi^0(t)+\theta(t)+\frac{4\pi^2}{(x^1)^2}\sum_{k=1}^\infty c_k J_0\left(\frac{2\pi k}{x^1}t\right)]dt.$$

Взаимная однозначность операционных соответствий доказывает единственность потенциала в классе непрерывных и ограниченных функций.

Теорема 2. В линеаризованной постановке неизвестный коэффициент $q(y)$ при младшем члене уравнения (1) единственен в классе непрерывных и ограниченных функций, определённых на полупрямой $y \geq 0$.

Исследование обратной задачи 2 в точной постановке. Решение прямой задачи

Применим к прямой задаче 2 преобразование Лапласа. Пусть

$$W_1(x,y,p)=\int_0^\infty e^{-pt}U(x,y,t)dt. \tag{33}$$

Получим уравнение в частных производных с начальными данными:

$$p^2W_1(x,y,p)=\frac{\partial^2 W_1(x,y,p)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_1(x,y,p)}{\partial y^2}-q(y)W_1(x,y,p),$$

$$\left(W_1\right)_y^{'}\Big|_{y=0}=\delta(x)\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\delta(x)\tilde{A}(p),$$

где $\tilde{A}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$

Преобразованием Лапласа известной информации являются функции

$$\Phi^j(p)=\int_0^\infty e^{\;\;pt}\varphi^j(t)dt=W\;\;(x^j,0,p),\ j=0{,}1. \tag{34}$$

Далее применим преобразование Фурье по переменной x:

$$W_2(r,y,p)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{irx}W_1(x,y,p)dx.$$

Получим:

$$(p^2+r^2)W_2(r,y,p)=\frac{\partial^2 W_2(r,y,p)}{\partial y^2}-q(y)W_2(r,y,p),\ \left(W_2\right)_y^{'}\Big|_{y=0}=\tilde{A}(p).$$

Обобщённое преобразование Фурье по системе собственных функций $\varphi(y,\lambda)$ оператора Штурма-Лиувилля обозначим

$$W_3(r,p,\lambda)=\int_0^\infty \varphi(y,\lambda)W_2(r,y,p)dy.$$

Из алгебраического уравнения:

$$\left(p^2+r^2\right)W_3\left(r,p,\lambda\right) = -\tilde{A}\left(p\right) - \lambda W_3\left(r,p,\lambda\right)$$

выразим $W_3\left(r\tilde{}p\ \lambda\right) = -\tilde{A}\left(p\right)\cdot\dfrac{1}{p^2\ \aleph r^2}$

Операционные методы математической физики и обращения используемых преобразований дают значения функций:

$$W_2\left(r,y,p\right) = \int_0^\infty \varphi\left(y,\lambda\right)W_3\left(r,p,\lambda\right)d\sigma\left(\lambda\right) = -\tilde{A}\left(p\right)\int_0^\infty \frac{1}{p^2+r^2+\lambda}\varphi\left(y,\lambda\right)d\sigma\left(\lambda\right),$$

$$W_1\left(x,y,p\right) = -\frac{1}{2\pi}\tilde{A}\left(p\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-irx}\int_0^\infty \varphi\left(y,\lambda\right)\frac{1}{p^2+r^2+\lambda}d\sigma\left(\lambda\right)dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{A}\left(p\right)\int_0^\infty \varphi\left(y,\lambda\right)\frac{1}{\sqrt{p^2+\lambda}}e^{-|x|\sqrt{p^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{A}\left(p\right)\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^\infty \varphi\left(y,\lambda\right)J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^2}\right)\theta\left(t^2-x^2\right)d\sigma\left(\lambda\right)dt. \qquad (35)$$

Сравнивая различные результаты интегральных преобразований $W_1(x, y, p)$ в формах (33) и (35), можем записать:

$$W_1\left(x,y,p\right) = \int_0^\infty e^{-pt}U\left(x,y,t\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{A}\left(p\right)\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^\infty \varphi\left(y,\lambda\right)J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^2}\right)\theta\left(t^2-x^2\right)d\sigma\left(\lambda\right)dt. \qquad (36)$$

Решение обратной задачи. Теоремы единственности

Рассмотрим уравнения (34) и (36) при $x = x^j$, $j = 0,1$. Предположим, что $0 < x^0 < x^1 < T$. Получим систему интегральных уравнений:

$$\Phi^j\left(p\right) = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi^j\left(t\right)dt = W_1^j\left(x^j,0,p\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{A}\left(p\right)\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{j2}}\right)\theta\left(t^2-x^{j2}\right)d\sigma\left(\lambda\right)dt,\ j=0,1, \qquad (37)$$

однозначно разрешимую относительно функций $\sigma(\lambda) \in \sigma[2]$ и $\tilde{A}(p)$. По $\sigma(\lambda)$ мы можем найти $q(y) \in \mathbf{Q}_M$ по $\tilde{A}(p)$ – источник $f(t)$.

Исключим из системы (37) неизвестное преобразование $\tilde{A}(p)$, почленно разделив уравнения системы:

$$\frac{\Phi^0(p)}{\Phi^1(p)}=\frac{\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{02}}\right)\theta\left(t^2-x^{02}\right)d\sigma(\lambda)dt}{\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}\right)\theta\left(t^2-x^{12}\right)d\sigma(\lambda)dt}.$$

Заменим $\Phi^j(p)$, $j=0{,}1$ преобразованием Лапласа (34) $\Phi^j(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi^j(t)dt.$

Будем иметь:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left\{\varphi^0(t)*\int\limits_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}\right)\theta\left(t^2-x^{12}\right)d\sigma(\lambda)\right\}dt=$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left\{\varphi^1(t)*\int\limits_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{02}}\right)\theta\left(t^2-x^{02}\right)d\sigma(\lambda)\right\}dt.$$

К свёртке

$$\varphi^0(t)*\int\limits_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}\right)\theta\left(t^2-x^{12}\right)d\sigma(\lambda)=$$

$$\varphi^1(t)*\int\limits_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{02}}\right)\theta\left(t^2-x^{02}\right)d\sigma(\lambda), \tag{38}$$

полученной по теореме Лерха, применим преобразование Фурье по переменной t. Преобразование Фурье известной информации обозначим через $M^j(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha t}\varphi^j(t)dt, j=0{,}1.$

Вычислим один из интегралов в (38), используя свойства спектральной функции класса σ

$$\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha t}\int\limits_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}\right)\theta\left(t^2-x^{12}\right)\left[\frac{2}{\pi}d\sqrt{\lambda}+\sigma_1'(\lambda)d\lambda\right]dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha t}\frac{\theta\left(t^2-x^{12}\right)}{\sqrt{t^2-x^{12}}}dt+\int\limits_0^\infty\sigma_1'(\lambda)\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha t}J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}\right)\theta\left(t^2-x^{12}\right)dtd\lambda=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)K_0\left(\alpha x^1\right)+\int\limits_0^\infty\sigma_1'(\lambda)\frac{1}{\pi i}sign\alpha\frac{\cos\left(x^1\sqrt{\alpha^2-\lambda}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\lambda}}\theta\left(\alpha^2-\lambda\right)d\lambda.$$

Здесь $K_0(\alpha x^1)$ – функция Бесселя второго рада. Уравнение (38) сводится к уравнению Абеля относительно функции $\sigma_1^{'}(\lambda)$:

$$\frac{1}{\pi i} sign\alpha \int_0^{\alpha^2} \frac{M^1(\alpha)\cos\left(x^0\sqrt{\alpha^2-\lambda}\right) - M^0(\alpha)\cos\left(x^1\sqrt{\alpha^2-\lambda}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\lambda}} \sigma_1^{'}(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[M^1(\alpha)K_0(\alpha x^0) - M^0(\alpha)K_0(\alpha x^1)\right] = N(\alpha),$$

$N(\alpha)$ – известная функция. При замене переменных $\alpha^2 = s$ получим:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\sigma_1^{'}(\lambda)\left[M^1\left(\sqrt{s}\right)\frac{\cos\left(x^0\sqrt{s-\lambda}\right)}{\sqrt{s-\lambda}} - M^0\left(\sqrt{s}\right)\frac{\cos\left(x^1\sqrt{s-\lambda}\right)}{\sqrt{s-\lambda}}\right]d\lambda = N\left(\sqrt{s}\right). \quad (39)$$

Левая часть уравнения Абеля имеет слабую особенность на диагонали $s = \lambda$. К (39) применим оператор дробного дифференцирования [5], полагая $s = \left(\lambda\cos^2\theta + t\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$. Вычислим:

$$\tilde{N}(t) = i\pi\int_0^t \frac{N\left(\sqrt{s}\right)}{\sqrt{t-s}}ds =$$

$$= 2\int_0^t \sigma_1^{'}(\lambda)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{M^1\left(\sqrt{\lambda\cos^2\theta + t\sin^2\theta}\right)\cos\left(x^0\cdot\sqrt{t-\lambda}\cdot\sin\theta\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M^0\left(\sqrt{\lambda\cos^2\theta + t\sin^2\theta}\right)\cos\left(x^1\cdot\sqrt{t-\lambda}\cdot\sin\theta\right)\right\}d\theta\right]d\lambda.$$

Ядро интегрального преобразования:

$$K(t,\lambda) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{M^1\left(\sqrt{\lambda\cos^2\theta + t\sin^2\theta}\right)\cos\left(x^0\cdot\sqrt{t-\lambda}\cdot\sin\theta\right) - \right.$$

$$\left. - M^0\left(\sqrt{\lambda\cos^2\theta + t\sin^2\theta}\right)\cos\left(x^1\sqrt{t-\lambda}\cdot\sin\theta\right)\right\}d\theta$$

непрерывно, производная по t существует и имеет интегрируемую особенность $K(t, t) \neq 0$.

Уравнение Вольтерра первого рода $\tilde{N}(t) = \int_0^t \sigma_1^{'}(\lambda)K(t,\lambda)d\lambda$ продифференцируем по переменной t [6] и получим уравнение Вольтерра второго рода

$$[\tilde{N}(t)]_t^{'} = \sigma_1^{'}(t)K(t,t) + \int_0^t \sigma_1^{'}(\lambda)K_t^{'}(t,\lambda)d\lambda.$$

Его решение единственно, и мы можем найти $\sigma_1^{'}(\lambda)$ методом последовательных приближений [6]. Если $\sigma_1^{'}(\lambda)$ известна, нетрудно выразить $\tilde{A}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ из любого уравнения системы (37):

$$\tilde{A}(p) = \frac{-2\Phi^0(\mathrm{p})}{\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - x^{02}}\right)\theta\left(t^2 - x^{02}\right)d\sigma(\lambda)dt} = \frac{-2\Phi^0(\mathrm{p})}{\int_0^\infty \frac{e^{-|x^0|\sqrt{p^2+\lambda}}}{\sqrt{p^2+\lambda}}d\sigma(\lambda)}.$$

Теорема 3. Решение обратной задачи (1)–(3), (6), (5) – неизвестный коэффициент $q(y)$ при младшем члене уравнения гиперболического типа единственен в классе функций $\boldsymbol{Q_M}$.

Теорема 4. Неизвестный источник $f(t)$ в граничном условии (6) обратной задачи 2 единственен в классе непрерывных, финитных, положительно определённых функций.

Исследование обратной задачи 3 в точной постановке. Решение прямой задачи

Последовательно к задаче (1)–(4) применим преобразование Фурье по переменной x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x}U(x,y,t)dx = W_1(\mu,y,t),$$

одностороннее преобразование Лапласа по переменной t:

$$\int_0^\infty e^{-pt}W_1(\mu,y,t)dt = W_2(\mu,y,p)$$

и обобщённое преобразование Фурье по системе собственных функций оператора Штурма-Лиувилля $\varphi(y,\lambda)$[1]:

$$\int_0^\infty \varphi(y,\lambda)W_2(\mu,y,p)dy = W_3(\mu,p,\lambda).$$

В результате преобразования Фурье получим уравнение в частных производных:

$$\mu^2 W_1(x,y,p) = -\frac{\partial^2 W_1(\mu,y,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W_1(\mu,y,t)}{\partial y^2} - q(y)W_1(\mu,y,t)$$

с начальными условиями $\left(W_1\right)\Big|_{t=0} = 0, \left(W_1\right)_t'\Big|_{t=0} = 0,$ и

граничным условием $\left(W_1\right)_y'\Big|_{y=0} = \delta(t)F(\mu),$

где

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} f(x)\,dx. \qquad (40)$$

В результате преобразования Лапласа дифференциальное уравнение

$$\left(p^2+\mu^2\right)W_2(\mu,y,p) = \frac{\partial^2 W_2(\mu,y,p)}{\partial y^2} - q(y)W_2(\mu,y,p)$$

с начальным условием $\left(W_2\right)_y'\Big|_{y=0} = F(\mu).$

обобщенное преобразование Фурье приводит к алгебраическому уравнению относительно $W_3(\mu, \text{p}, \lambda)$:

$$W_3(\mu,p,\lambda) = -F(\mu)\cdot\frac{1}{p^2+\mu^2+\lambda}.$$

Обращение преобразований позволяет получить функции:

$$W_2(\mu,y,p) = \int_0^{\infty}\varphi(y,\lambda)W_3(\mu,p,\lambda)\,d\sigma(\lambda) = -F(\mu)\int_0^{\infty}\frac{1}{p^2+\mu^2+\lambda}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda)$$

$$W_1(\mu,y,t) = -F(\mu)\int_0^{\infty}\varphi(y,\lambda)\frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}\,d\sigma(\lambda). \qquad (41)$$

Обращая преобразование Фурье, получим решение прямой задачи:

$$U(x,y,t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\varphi(y,\lambda)\int_0^{\infty}f(\zeta)J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-(x-\zeta)^2}\right)\theta\left(t^2-(x-\zeta)^2\right)\cdot d\zeta\, d\sigma(\lambda).$$

Решение обратной задачи. Теоремы единственности

При решении обратной задачи целесообразно исходить из равенства (41). Рассмотрим преобразование Фурье в фиксированные моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$. Пусть $y = 0$ и $0 < t^0 < t^1 < \varepsilon$.

Получим систему двух интегральных уравнений с двумя неизвестными $F(\mu)$ и $\sigma(\lambda)$:

$$W_1^j\left(\mu,0,t^j\right) = -F(\mu)\int_0^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda)}t^j}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}\,d\sigma(\lambda),\ j=0,1. \qquad (42)$$

По спектральной функции $\sigma(\lambda)$ искомый коэффициент $q(y)$ восстанавливается однозначно, по $F(\mu)$ восстановим $f(x)$.

Исключим $F(\mu)$ из системы (42), получим преобразования Фурье по x.

$$W_1^0\left(\mu, y, t^0\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}d\sigma\left(\lambda\right)=W_1^1\left(\mu, y, t^1\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}d\sigma\left(\lambda\right),$$

или

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\ \ x}[\varphi^1\left(x\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right)-\varphi^0\left(x\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right)]dx=0.$$

Допустим, что $|\varphi^0(x)| \geq m > 0$ интегральное уравнение:

$$\varphi^1\left(x\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right)-\varphi^0\left(x\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right)=0$$

преобразуем к виду:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right)=\frac{\varphi^1\left(x\right)}{\varphi^0\left(x\right)}\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2+\lambda}}d\sigma\left(\lambda\right). \tag{43}$$

К (43) применим преобразование Фурье по параметру $-\infty < \mu < \infty$.

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i\mu x}\frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}d\mu d\sigma\left(\lambda\right)=\frac{\varphi^1\left(x\right)}{\varphi^0\left(x\right)}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i\mu x}\frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}d\mu d\sigma\left(\lambda\right).$$

Внутренние интегралы в полученном равенстве заменим функцией Бесселя нулевого значка:

$$\int_0^\infty d\sigma\left(\lambda\right)\pi J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(t^1)^2-x^2}\right)\theta((t^1)^2-x^2)=$$

$$=\frac{\varphi^1\left(x\right)}{\varphi^0\left(x\right)}\int_0^\infty d\sigma\left(\lambda\right)\int_{-\infty}^\infty \pi J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(t^0)^2-x^2}\right)\theta((t^0)^2-x^2). \tag{44}$$

Преобразуем левую часть (44), учитывая форму спектральной функции:

$$\int_0^\infty d\sigma\left(\lambda\right)\pi J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(t^1)^2-x^2}\right)\theta((t^1)^2-x^2)=$$

$$=\pi\int_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(t^1)^2-x^2}\right)\theta((t^1)^2-x^2)d\left[\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma_1\left(\lambda\right)\right]dx=$$

$$=2\frac{\theta\left((t^1)^2-x^2\right)}{\sqrt{(t^1)^2-x^2}}+\pi\int_0^\infty J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(t^1)^2-x^2}\right)\sigma_1'\left(\lambda\right)d\sqrt{\lambda}.$$

Пусть $\sqrt{(t^1)^2 - x^2} = 2\sqrt{X}$. Преобразование Бесселя однозначно разрешим относительно $\sigma_1^{'}(\lambda)$. Получим интегральное уравнение:

$$\sigma_1^{'}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{T^2}{4}}^{\frac{(t^1)^2}{4}} J_0\left(\sqrt{\lambda}2\sqrt{X}\right)\left[\frac{\varphi^1\left(\sqrt{(t^1)^2-4X}\right)}{\varphi^0\left(\sqrt{(t^1)^2-4X}\right)}\cdot\frac{\theta\left(\sqrt{4X-T^2}\right)}{\sqrt{4X-T^2}} - \frac{\theta(X)}{2\sqrt{X}}\right]dX +$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\sigma_1^{'}(\zeta)\int\limits_{\frac{T^2}{4}}^{\frac{(t^1)^2}{4}} J_0\left(\sqrt{\lambda}2\sqrt{X}\right)\frac{\varphi^1\left(\sqrt{(t^1)^2-4X}\right)}{\varphi^0\left(\sqrt{(t^1)^2-4X}\right)}J_0\left(\sqrt{\zeta}\sqrt{4X-T^2}\right)dXd\sqrt{\zeta} \qquad (45)$$

с ядром $K(\zeta,\lambda) = \int\limits_{\frac{T^2}{4}}^{\frac{(t^1)^2}{4}} J_0\left(\sqrt{\lambda}2\sqrt{X}\right)\frac{\varphi^1\left(\sqrt{(t^1)^2-4X}\right)}{\varphi^0\left(\sqrt{(t^1)^2-4X}\right)}J_0\left(\sqrt{\zeta}\sqrt{4X-T^2}\right)dX,$

которое нельзя назвать фредгольмовым [7], поскольку:

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left|K(\zeta,\lambda)\right|^2 d\zeta d\lambda \not< \infty.$$

Так как интервал интегрирования бесконечно мал: $0 < t^0 < t^1 < \varepsilon$ и $T^2 = (t^1)^2 - (t^0)^2 < \varepsilon$, то, как следует из теории уравнений Фредгольма, для малых значений t уравнение (45) однозначно разрешимо [3].

Теорема 5. Спектральная функция оператора Штурма-Лиувилля единственным образом определяется заданием информации (7) о решении прямой задачи (1)–(4).

Теорема 6. Решение обратной задачи (1)–(4), (7) $q(y)$ с неизвестным источником однозначно восстанавливается на полупрямой $y \geq 0$ в специальном классе функций $\boldsymbol{Q_M}$.

Теорема 7. Неизвестный источник $f(x)$ в граничном условии (4) единственен в классе функций Φ^*. Для доказательства единственности $f(x)$ выразим $F(\mu)$ из первого уравнения системы (42):

$$F(\mu) = -\frac{W_1^0\left(\mu,0,t^0\right)}{\int_0^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}d\sigma(\lambda)} = -\frac{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}\varphi^0(x)dx}{\int_0^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{\mu^2+\lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2+\lambda)}}d\sigma(\lambda)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}f(x)dx.$$

Как известно, $F(\mu)$ введено формулой (40).

Обращение данного преобразования Фурье выражает функцию источника возмущений в явном виде. Из единственности изображения следует единственность оригинала.

РЕЗЮМЕ

Уравнение (1) с данными начальными и граничными условиями может рассматриваться как математическая модель распространения волн в изотропном пространстве. Задачи (1–3) являются модельными для сейсморазведки и электроразведки. Основным достижением исследования являются теоремы единственности потенциала $q(y)$ на полупрямой $y \geq 0$ и источников $f(x)$, $f(t)$, принадлежащих специальным классам функций. Доказана разрешимость обратных задач математической физики для уравнения гиперболического типа в различных постановках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. 88 с.
2. Шабанова Г.И. Исследование обратной задачи Штурма-Лиувилля в сингулярном случае // Сибирская автомобильно-дорожная академия. Сборник статей по материалам XXXI научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире». 6 (30). Новосибирск, 2015. С. 6–15.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1970. 263 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1951. 544 с.
6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука. 1979. 191 с.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Издательство физико-математической литературы. 1959. 232 с.

REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M., Reznitskaya K.G., Yakhno V.G. Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [One-dimensional inverse problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka, 1980. 88 p.
2. Shabanova G.I. Issledovanie obratnoi zadachi Shturma-Liuvillya v singulyarnom sluchae [The study of the inverse Sturm–Liouville problem in the singular case] // Sibirskaya avtomobil'no-dorozhnaya akademiya. Sbornik statei po materialam XXXI nauchno-prakticheskoi konferentsii «Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire» [Siberian Automobile and Highway Academy. Proc. XXXI Scientific-practical Conf. "Natural and Mathematical Sciences in the Modern World"]. no. 6 (30). Novosibirsk, 2015. pp. 6–15.
3. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics]. M., Nauka, 1970. 263 p.
4. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M., Nauka, 1977. 735 p.
5. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Volume II. New York, Interscience Publishers, 1962.
6. Tslaf L.Ya. Variatsionnoe ischislenie i integral'nye uravneniya [Calculus of variations and integral equations]. M., Nauka, 1979. 191 p.
7. Mikhlin S.G. Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam [Lectures on linear integral equations]. M., Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1959. 232 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Шабанова Галина Ивановна – старший преподаватель кафедры высшей математики Сибирской автомобильно-дорожной академии «СибАДИ»;
e-mail:gal_schabanowa2014@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Galina Schabanova – senior lecturer of the Department of Mathematics at the Siberian Automobile and Highway Academy («SibADI»);
e-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шабанова Г. И. Три обратные задачи математической физики для уравнения гиперболического типа в различных постановках // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 6–23.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-6-23.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

G. Schabanowa Three inverse problems of mathematical physics for hyperbolic-type equation in different statements // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 6–23.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-6-23.