УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-2-18-28

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА О ГЕНЕРИРОВАНИИ СДВИГОВЫХ ВОЛН КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ГАЗАХ БОЗЕ

Бедрикова Е.А., Латышев А.В.
Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация

Аннотация. Найдено аналитическое решение второй задачи Стокса для бозе-газа. Получено основное кинетическое уравнение и для него выведены граничные условия. В пространстве обобщенных функций находится решение характеристического уравнения. Исследована структура дискретного и непрерывного спектров характеристического уравнения. Изучены свойства дисперсионной функции. Найдены собственные решения кинетического уравнения. Построено общее решение граничной задачи в виде спектрального разложения по собственным решениям.

Ключевые слова: Вторая задача Стокса, бозе-газ, собственные решения кинетического уравнения, характеристическое уравнение, дисперсионная функция.

BOUNDARY PROBLEM ON GENERATION OF SHIFT WAVES BY AN OSCILLATING SURFACE IN BOSE GASES

E. Bedrikova, A. Latyshev
Moscow State Regional University, ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. The analytical solution of the second Stokes problem for a Bose gas is found. The basic kinetic equation is obtained and its boundary conditions are derived. In the space of the generalized functions, there lies a solution of the characteristic equation. The structure of discrete and continuous spectra of the characteristic equation is investigated. Properties of the dispersion function are studied. Eigen solutions of the kinetic equation are found. The generalized solution of the boundary problem in the form of spectral decomposition under eigen solutions is constructed.

Keywords: second Stokes problem, Bose gas, eigen solutions of kinetic equation, characteristic equation, dispersion function.

В последнее время, в связи с развитием современных технологий и нанотехнологий, задача о поведении газа над движущейся поверхностью вызывает большой интерес [1–7]. Множество работ посвящено решению второй задачи Стокса численными методами [4–7]. В настоящей работе показано, что эта задача допускает аналитическое решение и для квантовых газов. Данная работа является продолжением работы Акимовой В.А., Латышева А.В. и Юшканова А.А. [1], в которой вторая задача Стокса была решена аналитически для классических газов.

В настоящей работе вторая задача Стокса рассматривается в квантовых бозе-газах. Нелинейное модельное кинетическое уравнение для бозе-газа линеаризуется по малому параметру. Малым параметром задачи является безразмерная скорость газа. Формулируется линейная граничная задача. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. Решение последнего находится в пространстве обобщенных функций. Исследована структура дискретного и непрерывного спектров граничной задачи. Найдены классические собственные решения дискретного спектра и обобщенные собственные решения непрерывного спектра. По этим решениям составляется общее решение граничной задачи.

Пусть разреженный одноатомный бозе-газ находится над твердой поверхностью в полупространстве $x > 0$. Задана система координат таким образом, что плоская поверхность, ограничивающая газ, совпадает с плоскостью (y, z), а ось Ox перпендикулярна поверхности. При этом поверхность, ограничивающая газ, в своей плоскости совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону:

$$u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t},$$

где u_0 – амплитуда колебаний газа, которая является постоянной величиной. Требуется найти отклик газа на движение ограничивающей его поверхности, то есть построить функцию распределения газовых молекул.

Рассмотрим кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{eq} - f}{\tau},$$

где τ – время между двумя последовательными столкновениями газовых молекул, $\nu = 1/\tau$ – частота столкновений молекул бозе-газа, f_{eq} – локально-равновесная функция распределения Бозе:

$$f_{eq} = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{\varepsilon_* - \mu}{kT}\right)}, \qquad \varepsilon_* = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2, -\infty < \mu < 0,$$

где m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – температура газа, $u(t,x)$ – массовая скорость газа, μ – химический потенциал газа.

Концентрацию газа и его температуру будем считать постоянными. Предположим, что величина скорости движения колеблющейся поверхности много меньше тепловой скорости частиц газа. В этих условиях задачу можно линеаризовать. Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения относительно абсолютного распределения Бозе $f_B(\mathrm{v})$:

$$f_B(\mathrm{v}) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right)}, \ \ \varepsilon = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \qquad -\infty < \mu < 0.$$

Получаем, что

$$f_{eq} = f_B(\mathrm{v}) + \mathrm{g}_B(\mathrm{v})\frac{m\mathrm{v}_y}{kT}u_y, \tag{1}$$

где

$$f_B(\mathrm{v}) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT} - \frac{\mu}{kT}\right)}, \qquad \mathrm{g}_B(\mathrm{v}) = \frac{\exp\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT} - \frac{\mu}{kT}\right)}{-1 + \exp\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT} - \frac{\mu}{kT}\right)}$$

Линеаризацию задачи проводим по массовой скорости $u_y(t_1, x_1)$ при условии, что $u_y(t_1, x_1) \ll v_T$, где $v_T = 1/\sqrt{\beta}$ – тепловая скорость молекул, имеющая порядок скорости звука.

Далее перейдем к безразмерным параметрам, а именно к безразмерной скорости молекул: $\boldsymbol{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{v_T}$, $\beta = \frac{m}{2kT}$, безразмерной массовой скорости $U_y(t,x) = \sqrt{\beta}u_y(t,x)$, безразмерному времени $t_1 = tv$ и безразмерной координате $x_1 = xv\sqrt{\beta}$.

Учитывая формулу (1), функцию распределения будем искать в виде:

$$f = f(t,x,C) = f_B(C) + \mathrm{g}_B(C)C_yH(t,x,\mu)$$

$$f_B(C) = \frac{1}{-1 + \exp(C^2 - \alpha)}, \qquad \mathrm{g}_B(C) = \frac{\exp(C^2 - \alpha)}{[-1 + \exp(C^2 - \alpha)]^2}.$$

Здесь $H(t,x,\mu)$ – искомая функция, μ– проекция на ось x безразмерной скорости молекулы, α – безразмерный химический потенциал газа.

Опуская вычисления, получаем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial t_1}+\mu\frac{\partial H}{\partial x_1}+H(t_1,x_1,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_B(\mu',\alpha)H(t_1,x_1,\mu')d\mu', \qquad (2)$$

где $K_B(\mu,\alpha)=\frac{\ln(1-\exp(\alpha-\mu^2))}{\int_{-\infty}^{\infty}\ln(1-\exp(\alpha-\tau^2))d\tau}$ – ядро кинетического уравнения

с граничными условиями:

$$H(t_1,0,\mu)=2qU_y(t_1)+(1-q)[H(t_1,0,-\mu)], \qquad \mu>0$$

$$H(t_1,x_1\to\infty,\mu)=0 \qquad (3)$$

Выделяя временную переменную, функцию $H(t_1,x_1,\mu)$ можно представить в виде:

$$H(t_1,x_1,\mu)=e^{-i\omega_1 t_1}h(x_1,\mu)$$

Следовательно, уравнение (2) относительно функции $h(x_1,\mu)$ будет иметь вид:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x_1}+z_0h(x_1,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_B(\mu',\alpha)h(x_1,\mu')d\mu', \;\; z_0=1-i\omega_1 \qquad (4)$$

а граничные условия (3) переходят в следующие граничные условия:

$$h(0,\mu)=2qU_0+(1-q)h(0,-\mu), \qquad \mu>0$$

$$h(x_1\to\infty,\mu)=0 \qquad (5)$$

Решение кинетического уравнения (4) будем искать в виде соотношения:

$$h_\eta(x_1,\mu)=\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu),\;\frac{1}{z_0}\int_{-\infty}^{+\infty}K_B(\mu',\alpha)\,\Phi(\eta,\mu')d\mu'=1, \qquad (6)$$

где η – параметр разделения, или спектральный параметр (комплексный). Подставляя соотношение (6) в кинетическое уравнение (4) и разделяя переменные, получаем характеристическое уравнение:$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\eta$, где η – комплексный, вообще говоря, параметр.

Находим собственные функции характеристического уравнения:

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{K_B(\eta,\alpha)},$$

где $-\infty<\eta,\ \mu<+\infty$, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, $\lambda(z)$ – дисперсионная функция задачи, символ *P(1/x)* означает главное значение интеграла от *(1/x)*,

$$\lambda(z)=1-i\omega_1+z\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)d\tau}{\tau-z}=-i\omega_1+\lambda_0(z),$$

где

$$\lambda_0(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)\tau d\tau}{\tau-z}.$$

Применяя формулы Сохоцкого [8], находим граничные значения дисперсионной функции:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \pm\pi i\mu K_B(\mu,\alpha) - i\omega_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_B(\tau,\alpha)\tau d\tau}{\tau - z}.$$

Выделим действительную и мнимую части граничных значений дисперсионной функции на действительной оси (рис. 1; 2):

$$\mathrm{Re}\lambda^{\pm}(\mu) = \lambda_0(\mu), \qquad \mathrm{Im}\lambda^{\pm}(\mu) = -\omega_1 \pm s(\mu),$$

$$s(\mu) = \pi\mu K_B(\mu,\alpha), \;\; \lambda_0(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_B(\tau,\alpha)\tau d\tau}{\tau - z}.$$

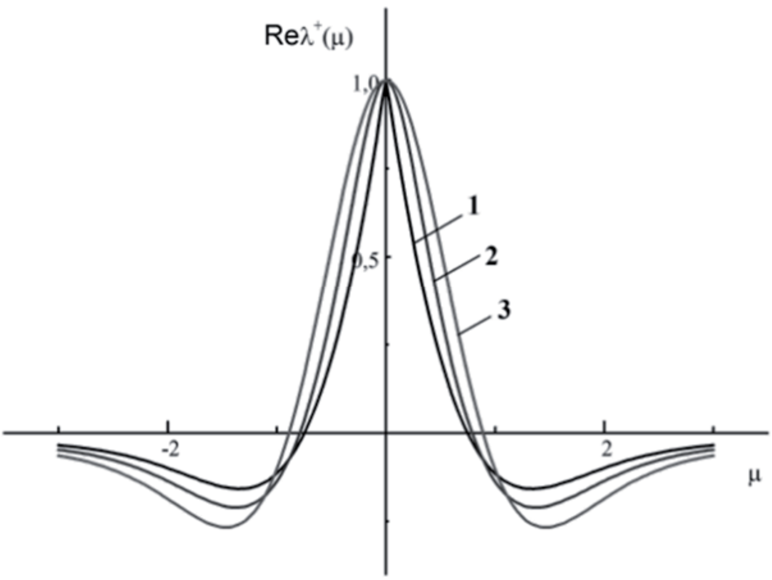

Рис. 1. Действительная часть дисперсионной функции $\lambda^{+}(\mu)$ на действительной оси. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра $\alpha = 0, -0.1, -1$.

Легко заметить, что действительная часть дисперсионной функции $\lambda_0(\mu)$ имеет два нуля $\pm\mu_0$. Эти два нуля в силу четности функции $\lambda_0(\mu)$ различаются лишь знаками.

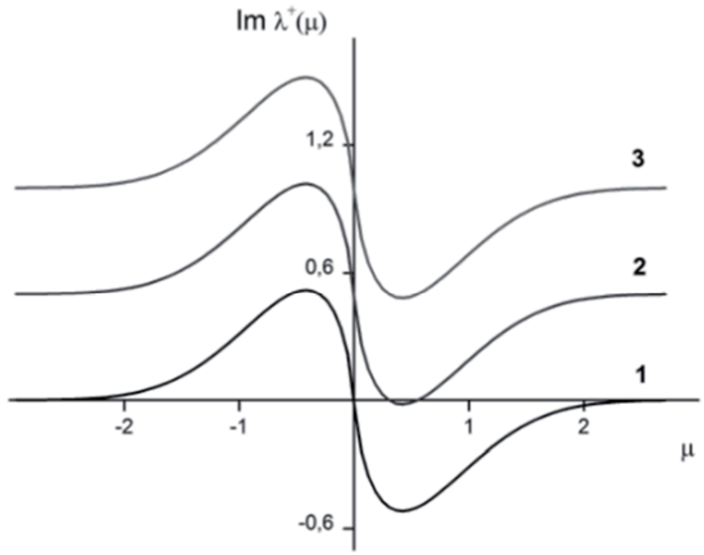

Рис. 2. Мнимая часть дисперсионной функции $\lambda^{+}(\mu)$ на действительной оси. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра $\omega_1 = 0, 0.5, 1$ и $\alpha = 0$.

Разложим дисперсионную функцию в ряд Лорана по отрицательным степеням переменного z в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 - \frac{1}{z^2}\frac{l_2^B}{l_0^B} - \frac{1}{z^4}\frac{l_4^B}{l_0^B} - \frac{1}{z^6}\frac{l_6^B}{l_0^B} - \cdots, \ \ z \to \infty \qquad (7)$$

где

$$l_n^B(\alpha) = \int_0^\infty \tau^n \ln\big(1 - \exp(\alpha - \tau^2)\big) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^n \ln\big(1 - \exp(\alpha - \tau^2)\big) d\tau, \qquad n = 0,2,4,6, \ldots$$

Из разложения (7) видно, что при малых значениях ω_1 дисперсионная функция имеет два отличающиеся лишь знаками нуля:

$$\pm\eta_0^{(0)}(\omega_1) = \sqrt{\frac{l_2^B(\alpha)}{l_0^B(\alpha)}}\frac{1+i}{2\sqrt{\omega_1}}$$

На комплексной плоскости рассмотрим семейство кривых:

$$\Gamma = \Gamma(\omega_1) \colon G(\mu) = \frac{\lambda^{+}(\mu)}{\lambda^{-}(\mu)}, \ \ 0 \le \mu < +\infty.$$

Нетрудно проверить, что $G(0) = 1$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} G(\mu) = 1$. Эти равенства означают, что кривые $\Gamma(\omega_1)$ являются замкнутыми, то есть они выходят из точки $z = 1$ и заканчиваются в этой же точке.

Для нахождения нулей дисперсионной функции применим принцип аргумента. Рассуждая так же, как и в [1], получаем, что

$$N = \frac{1}{\pi}[\arg G(\mu)]_0^{+\infty} = 2\chi(G).$$

Здесь $\chi = \chi(G)$ – индекс функции $G(\mu)$ или индекс задачи, который показывает число оборотов кривой $\Gamma(\omega_1)$ относительно начала координат, совершаемых в положительном направлении.

Далее построим линию предельных (или критических) частот (рис. 3):

$$\omega_1^* = \max_{\mu} \sqrt{\{s^2(\mu) - \lambda_0^2(\mu)\}}.$$

Если $0 \le \omega_1 < \omega_1^*$, то индекс функции $G(\mu)$ равен единице, то есть дисперсионная функция имеет два комплекснозначных нуля. Если $\omega_1 > \omega_1^*$, то индекс функции $G(\mu)$ равен нулю, то есть дисперсионная функция нулей не имеет.

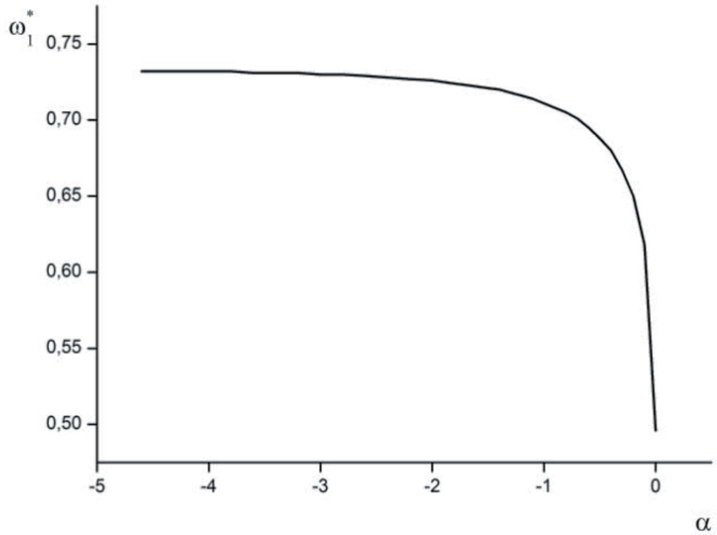

Рис. 3. Линия критических частот: зависимость критической частоты ω_1^* от скачка химического потенциала α.

Выделим действительную и мнимую части функции $G(\mu)$ и построим кривые $\Gamma(\omega_1)$ на комплексной плоскости (рис. 4; 5), которые определяются параметрическими уравнениями:

$$\Gamma(\omega_1): x = \mathrm{Re}G(\mu), \qquad y = \mathrm{Im}G(\mu), \qquad 0 \le \mu < +\infty$$

$$\mathrm{Re}G(\mu) = \frac{\lambda_0^2(\mu) - s^2(\mu) + \omega_1^2}{\lambda_0^2(\mu) + [\omega_1 + s(\mu)]^2}$$

$$\mathrm{Im}G(\mu) = \frac{2\lambda_0(\mu)s(\mu)}{\lambda_0^2(\mu) + [\omega_1 + s(\mu)]^2},$$

где

$$s(\mu) = \pi\mu K_B(\mu, \alpha), \;\; \lambda_0(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(\tau, \alpha)\tau d\tau}{\tau - \mu}$$

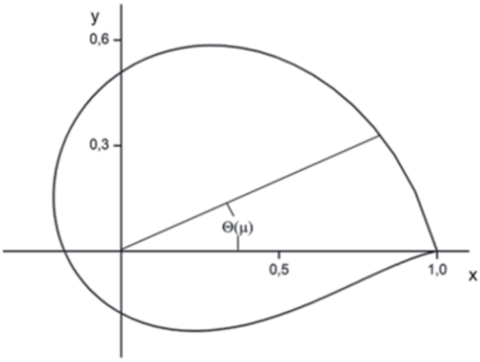

Рис. 4. Кривая $\Gamma(\omega_1)$ является замкнутой и охватывает начало координат, случай $0 \le \omega_1 < \omega_1^*$. Индекс функции $G(\mu)$ равен единице, дисперсионная функция имеет два нуля.

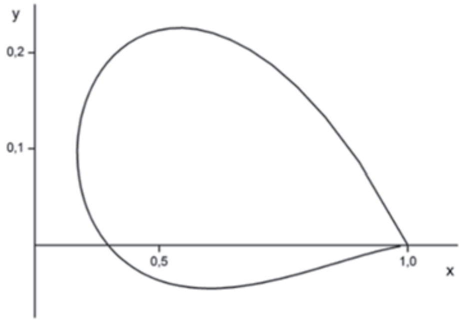

Рис. 5. Кривая $\Gamma(\omega_1)$ не охватывает начало координат, случай $\omega_1 > \omega_1^*$. Индекс функции $G(\mu)$ равен нулю. Дисперсионная функция не имеет нулей в верхней и нижней полуплоскостях.

Таким образом, если $\omega_1 > \omega_1^*$, то дискретный спектр является пустым множеством. Если $0 \le \omega_1 < \omega_1^*$, тогда можно найти собственные функции характеристического уравнения:

$$\Phi(\pm\eta_0(\omega_1), \mu) = \frac{\pm\eta_0(\omega_1)}{\pm\eta_0(\omega_1) - \mu}$$

и два соответствующих собственных решения исходного кинетического уравнения:

$$h_{\pm\eta_0(\omega_1)}(x_1,\mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\pm\eta_0(\omega_1)}\right)\frac{\pm\eta_0(\omega_1)}{\pm\eta_0(\omega_1)-\mu}.$$

Теорема*:* Граничная задача (4), (5) имеет единственное решение в виде разложения по собственным решениям характеристического уравнения:

$$h(x_1,\mu) = \frac{a_0\eta_0}{\eta_0-\mu}\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right)\Phi(\eta,\mu)a(\eta)d\eta \qquad (8)$$

Здесь $a(\eta)$ – неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра), a_0 – неизвестная постоянная (коэффициент дискретного спектра).

Доказательство теоремы и вычисление коэффициентов непрерывного и дискретного спектров будет приведено в следующих работах.

Подставляя собственные функции в разложение (8) можно представить его в классическом виде:

$$h(x_1,\mu) = \frac{\eta_0 a_0}{\eta_0-\mu}\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) +$$

$$+\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right)\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta-\mu} + \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\mu}\right)\frac{\lambda(\mu)}{K_B(\mu,\alpha)}a(\mu)\theta_+(\mu),$$

где $\theta_+(\mu)$ – функция Хэвисайда: $\theta_+(\mu) = 1,\ \mu > 0,\ \theta_+(\mu) = 0,\ \mu < 0.$

Заключение. В работе сформулирована вторая задача Стокса для бозе-газа. Рассмотрен случай постоянной амплитуды колебания поверхности. Найдены и исследованы нули дисперсионной функции. Выделена область критических частот. Если частота колебания поверхности больше критической, то дисперсионная функция нулей не имеет. В случае если частота колебания поверхности находится в пределах от нуля до критической частоты, то дисперсионная функция имеет два нуля, которые отличаются лишь знаками. Найдены собственные решения кинетического уравнения и показано, что общее решение задачи с граничными условиями можно представить в виде разложения по собственным решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимова В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение второй задачи Стокса о поведении газа над колеблющейся поверхностью // Известия РАН. Серия "Механика жидкости газов". 2013. № 1. С. 125–140.
2. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851), Math, and Phys. Papers III, 1–141, Cambridge, 1901.

3. Asghar S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid // Math. Probl. Eng. Vol. 2006, Article ID 72468, 8 p.
4. Siewert C.E., Sharipov F. Model equations in rarefied gas dynamics: viscous–slip and thermal–slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14, No. 12, 4123–4129.
5. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн // Журнал технической физики. 2005. Т. 75, Вып. 4, С. 134–135.
6. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. № 2. С. 262–268.
7. Дудко В.В. Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей: дисс., М., 2010. 108 с.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории: монография. Изд-во МГОУ, М., 2008, 280 с.

REFERENCES

1. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analiticheskoe reshenie vtoroi zadachi Stoksa o povedenii gaza nad koleblyushcheisya poverkhnost'yu [Analytical solution of the second Stokes problem on the behavior of a gas over an oscillating surface] // Izv Ross. Akad. Nauk, Ser. Mekh. Zhidk. Gazov. 2013. no. 1. pp. 125-140.
2. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851, Math, and Phys. Papers III, 1–141, Cambridge, 1901.
3. Asghar S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid // Math. Probl. Eng. Vol. 2006, Article ID 72468, 8 p.
4. Siewert C.E., Sharipov F. Model equations in rarefied gas dynamics: viscous–slip and thermal–slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14, no. 12, pp. 4123–4129.
5. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. Vliyanie svoistv poverkhnosti na kharakteristiki sdvigovykh voln [Influence of surface properties on the characteristics of shear waves // Zh. Tekh. Fiz. 2005. Vol. 75. no. 4. pp. 134–135.
6. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. Generatsiya koleblyushcheisya poverkhnost'yu sdvigovykh voln v gaze [Generation of shear waves in gas by a vibrating surface] // Teplofiz. Vysok. Temp. 2009. Vol. 47. no. 2. pp. 262–268.
7. Dudko V.V. Skol'zhenie razrezhennogo gaza vdol' nepodvizhnykh i koleblyushchikhsya poverkhnostei: diss. [Slipping of a rarefied gas along fixed and vibrating surfaces: thesis]. M., 2010. 108 p.
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analiticheskie metody v kineticheskoi teorii: monografiya [Analytical methods in kinetic theory: a monograph]. M., Izd-vo MGOU, 2008. 280 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бедрикова Екатерина Алексеевна – старший преподаватель кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: bedrikova@mail.ru

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Bedrikova Ekaterina Alekseevna – head lecturer of the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow State Regional University;e-mail: bedrikova@mail.ru

Latyshev Anatoly Vasilyevich – doctor of physical and mathematical sciences, full professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow State Regional University, Honored Worker of Science of the Russian Federation;e-mail: avlatyshev@mail.ru

---

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Граничная задача о генерировании сдвиговых волн колеблющейся поверхностью в газах Бозе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. №2. С. 18–28.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-2-18-28.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Bedrikova, A. Latyshev Boundary problem on generation of shift waves by an oscillating surface in bose gases // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 2. pp. 18–28.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-2-18-28.