УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-60-73

ТЕПЛОВОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗЕРКАЛЬНО-ДИФФУЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Латышев А. В., Юшканов А. А., Корнеева Е. Е.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается одна из классических граничных задач кинетической теории – задача о тепловом скольжении разреженного газа вдоль плоской твердой поверхности. Используется модельное кинетическое уравнение Больцмана с модельным интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук). В качестве граничных условий используются граничные условия Максвелла (зеркально-диффузные). Для решения задачи применяется обобщенный метод источника. Проведено сравнение с ранее полученными результатами.

Ключевые слова: тепловое скольжение, разреженный газ, коэффициент аккомодации, кинетическое уравнение, уравнение Фредгольма, функция распределения.

THERMAL SLIDING OF A RAREFIED GAS ALONG A FLAT SURFACE WITH MIRROR-DIFFUSION BOUNDARY CONDITIONS

A. Latyshev, A. Yushkanov, E. Korneeva
Moscow State Regional University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia

Abstract. One of classical boundary problems of the kinetic theory (the problem of thermal sliding) of a rarefied gas along a flat solid surface is considered. A model kinetic Boltzmann equation with a model integral of collisions in the BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) form is used. As boundary conditions use is made of the boundary Maxwell conditions (mirror–diffusion). The generalized method of a source is applied to solve the problem. Comparison with previously obtained results is performed.

Keywords: thermal sliding, rarefied gas, accommodation coefficient, kinetic equation, boundary conditions, Fredholm equation, distribution function.

Введение

Максвелл был первым, кто обратил внимание на движение разреженного газа под действием неоднородного распределения температуры [1–3]. Задача о тепловом скольжении газа вдоль поверхности (не обязательно плоской) вызывает постоянный интерес (см., например, [4–12]). Это связано как с чисто теоретическим интересом, так и с многочисленными приложениями в области аэродинамики и физики аэродисперсных систем.

Наиболее полный обзор работ в этом направлении представлен в работе [4] и монографии [5]. Отметим ряд работ [6–9], в которых рассматривались зеркально-граничные условия. Большой вклад в изучение теплового скольжения внес Лойалка С.К. [7–9].

В наших работах [10–15] были разработаны приближенные [10–12] и точные [13; 14] методы решения граничных задач для модельных кинетических уравнений. В работах [10; 11] коэффициент теплового скольжения аппроксимируется дробно-рациональными функциями. Аналитическое решение задачи о тепловом скольжении для газов с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул, и диффузными граничными условиями было получено в [15].

Затем в работах [16–18] тепловое скольжение рассматривалось для квантовых газов.

1. Постановка задачи

Пусть разреженный газ заполняет полупространство $x>0$ и движется вдоль оси y. Вдали от поверхности $x=0$ задан логарифмический градиент температуры $g_T=\left(\dfrac{d\ln T}{dy}\right)_{x=+\infty}$. Требуется найти скорость теплового скольжения u_{sl} и распределение массовой скорости газа в полупространстве.

В работе [12] показано, что если функцию распределения искать в виде: $f=f_M\left(1+h\right)$, где $f_M=n(y)\left(\dfrac{m}{2\pi kT(y)}\right)^3\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2kT(y)}\right)$,

$T(y)=T_0\left(1+g_T y\right)$, то функция $h(x,\mu)$ $(\mu=C_x)$ удовлетворяет неоднородному кинетическому уравнению:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x}+G_T\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)+h(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu'^2}h(x,\mu')d\mu'. \qquad (1.1)$$

Здесь и ниже:

$$G_T=\left(\frac{d\ln T}{dy_1}\right)_{x_1=+\infty},\ x_1=\nu\sqrt{\beta}x,\ \ y_1=\nu\sqrt{\beta}y,\ \ \beta=\frac{m}{2kT},\ U_{sl}=\sqrt{\beta}u_{sl},$$

ν – частота столкновений, x_1, y_1 – безразмерные координаты. Далее индексы у этих координат будем опускать.

Будем считать, что молекулы отражаются от стенки зеркально-диффузно:

$$f(0,\mathbf{C})=q\cdot f_M(y)+(1-q)f(0,-C_x,C_y,C_z),\quad C_x>0, \qquad (1.2)$$

где q – коэффициент диффузности, $0\le q\le 1$. При $q=1$ условие (1.2) является условием диффузного отражения, при $q=0$ – условием зеркального отражения.

Для функции $h(x,\mu)$ условие (1.2) переходит в условие:

$$h(0,\mu)=(1-q)h(0,-\mu),\quad \mu>0. \qquad (1.3)$$

Вдали от стенки функция распределения переходит в свое Чемпен-Энскоговское распределение:

$$h(\infty,\mu)=2U_{sl}-G_T(\mu^2-\frac{1}{2}). \qquad (1.4)$$

Обозначим далее: $h(x,\mu)+G_T(\mu^2-\frac{1}{2})=\psi(x,\mu)$. Тогда уравнение (1.1) переходит в однородное уравнение:

$$\mu\frac{d\psi}{dx}+\psi(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu'^2}\psi(x,\mu')d\mu'. \qquad (1.5)$$

Граничные условия (1.3) и (1.4) переходят в следующие:

$$\psi(0,\mu)=q\cdot G_T(\mu^2-\frac{1}{2})+(1-q)\psi(0,-\mu),\quad \mu>0, \qquad (1.6)$$

и

$$\psi(\infty,\mu)=2U_{sl} \qquad (1.7)$$

Далее положим: $\psi(x,\mu) = 2U_{sl} + h_c(x,\mu)$. При этом функция $h_c(x,\mu)$ удовлетворяет уравнению (1.5):

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} h_c(x,\mu') d\mu' \tag{1.8}$$

и граничным условиям:

$$h_c(0,\mu) = -2qU_{sl} + q \cdot G_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + (1-q)h_c(0,-\mu), \quad \mu > 0 \tag{1.9}$$

и

$$h_c(\infty,\mu) = 0. \tag{1.10}$$

2. Включение граничных условий в кинетическое уравнение

Продолжим функцию распределения на сопряженное полупространство $x < 0$ симметричным образом: $h(x,\mu) = h(-x,-\mu), \quad \mu > 0$. При таком продолжении функция $h_c(x,\mu)$ в отрицательном полупространстве $x < 0$ снова удовлетворяет уравнению (1.8) и граничным условиям:

$$h_c(-0,\mu) = -2qU_{sl} + q \cdot G_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + (1-q)h_c(-0,-\mu), \quad \mu < 0, \tag{2.1}$$

и

$$h_c(-\infty,\mu) = 0 \tag{2.2}$$

Включим граничные условия (1.9), (1.10) и (2.1) (2.2) в кинетическое уравнение в виде источника – члена, содержащего дельта-функцию Дирака:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x,\mu) = 2U_c(x) + |\mu|\delta(x)\left[-2qU_{sl} + qG_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) - qh_c(\mp 0,-\mu)\right], \tag{2.3}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака,

$$2U_c(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} h_c(x,\mu') d\mu'. \tag{2.4}$$

Заметим, что $U_c(x)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$U_c(\pm\infty) = 0. \tag{2.5}$$

Решая уравнения (2.3) при $x > 0, \mu < 0$, получаем решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.9) и (2.5):

$$h_c^+(x,\mu) = -\frac{1}{\mu}e^{-x/\mu}\cdot\int_x^{+\infty} e^{t/\mu}\cdot 2U_c(t)dt. \qquad (2.6)$$

Аналогично, при $x<0,\ \mu>0$ находим:

$$h_c^-(x,\mu) = -\frac{1}{\mu}e^{-x/\mu}\cdot\int_x^{-\infty} e^{t/\mu}\cdot 2U_c(t)dt. \qquad (2.7)$$

Перепишем уравнение (2.3), заменим в нем последний член, используя продолжение функции h на сопряженное полупространство и равенства (2.6) и (2.7). На этом пути приходим к следующему уравнению:

$$\mu\frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x,\mu) = 2U_c(x) + |\mu|\delta(x)\left[-2qU_{sl} + qG_T(\mu^2-\frac{1}{2}) - qh_c^{\pm}(0,-\mu)\right] \qquad (2.8)$$

Решение уравнений (2.8) и (2.4) ищем в виде интегралов Фурье:

$$2U_c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}E(k)dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk, \qquad (2.9)$$

$$h_c(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\Phi(k,\mu)dk \qquad (2.10)$$

При этом функция $h_c^+(x,\mu)$ выражается через спектральную плотность $E(k)$ массовой скорости следующим образом:

$$h_c^+(x,\mu) = -\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}\cdot\int_x^{\infty} e^{t/\mu}dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}E(k)dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}E(k)dk}{1+ik\mu}.$$

Аналогично получаем, что

$$h_c^-(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}E(k)dk}{1+ik\mu}.$$

Используя четность $E(k)$, далее получим:

$$h_c^{\pm}(0,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(k)dk}{1+k^2\mu^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{E(k)dk}{1+k^2\mu^2}.$$

Теперь уравнение (2.8) можем переписать в виде

$$\mu\frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x,\mu) = 2U_c(x) + |\mu|\delta(x)\left[-2qU_{sl} + qG_T(\mu^2-\frac{1}{2}) - \frac{q}{\pi}h_c\int_0^{\infty}\frac{E(k_1)dk_1}{1+k_1^2\mu^2}\right]$$
(2.11)

3. Характеристическое уравнение

Теперь уравнения (2.4) и (2.11) с помощью интеграла Фурье (2.9) и (2.10) преобразуются в следующую систему уравнений

$$E(k)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\mu^2}\Phi(k,\mu)d\mu, \tag{3.1}$$

$$(1+ik\mu)\Phi(k,\mu)=E(k)+|\mu|\left[-2qU_{sl}+qG_T(\mu^2-\frac{1}{2})-\frac{q}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{E(k_1)dk_1}{1+k_1^2\mu^2}\right]. \tag{3.2}$$

Выразим функцию $\Phi(k,\mu)$ из уравнения (3.2) и подставим в уравнение (3.1). Получаем характеристическое уравнение:

$$E(k)L(k)=-2q\cdot U_{sl}\cdot T_1(k)+qG_T\left(T_3(k)-\frac{1}{2}T_1(k)\right)-$$

$$-\frac{q}{\pi}\int\limits_0^{\infty}K(k,k_1)E(k_1)dk_1 \tag{3.3}$$

с ядром

$$K(k,k_1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\mu^2}\mu d\mu}{(1+k^2\mu^2)(1+k_1^2\mu^2)}. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) – это интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Кроме того, в (3.3) введено обозначение:

$$T_n(k)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\mu^2}\mu^n d\mu}{1+k^2\mu^2},\qquad n=0,1,2,\dots, \tag{3.5}$$

$$L(k)=1-T_0(k)=k^2\cdot T_2(k). \tag{3.6}$$

4. Ряды Неймана

Решение уравнения (3.3) ищем в виде:

$$E(k)=qG_T\left(E_0(k)+qE_1(k)+q^2\cdot E_2(k)+\dots\right), \tag{4.1}$$

$$U_{sl}=\frac{1}{2}G_T\cdot\left(V_0+V_1q+V_2q^2+\dots\right) \tag{4.2}$$

Подставим разложения (4.1) и (4.2) в уравнение (3.3). С помощью равенств (3.4)–(3.6) получаем счетную систему уравнений:

$$E_0(k)\cdot L(k)=-V_0T_1(k)+T_3(k)-\frac{1}{2}T_1(k), \tag{4.3}$$

$$E_1(k)\cdot L(k) = -V_1T_1(k) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(k,k_1)E_0(k_1)dk_1, \qquad (4.4)$$

$$E_2(k)\cdot L(k) = -V_2T_1(k) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(k,k_1)E_1(k_1)dk_1, \qquad (4.5)$$

....

$$E_n(k)\cdot L(k) = -V_nT_1(k) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(k,k_1)E_{n-1}(k_1)dk_1, \quad n=1,2. \qquad (4.6)$$

Из уравнения (4.3) находим:

$$E_0(k) = \frac{-(V_0+\frac{1}{2})\cdot T_1(k) + T_3(k)}{k^2\cdot T_2(k)}\ . \qquad (4.7)$$

Устраним полюс второго порядка в правой части (4.7). Заметим, что:

$$T_1(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - k^2\cdot T_3(k), \qquad T_3(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - k^2\cdot T_5(k).$$

Тогда:

$$E_0(k) = \frac{-(V_0+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} + (V_0+\frac{1}{2})k^2T_3(k) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} - k^2\cdot T_5(k)}{k^2T_2(k)}.$$

Для устранения полюса потребуем, чтобы $-(V_0+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0$, откуда $V_0=\frac{1}{2}$.

Тогда:

$$E_0(k) = \frac{T_3(k)-T_5(k)}{T_2(k)}.$$

С помощью последнего равенства из уравнения (4.4) находим:

$$E_1(k) = -\frac{V_1\cdot T_1(k) + \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty K(k,k_1)E_0(k_1)dk_1}{k^2T_2(k)} \qquad (4.8)$$

Для устранения полюса в правой части (4.8) выберем V_1 в виде:

$$V_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{T_1(k_1)}{T_1(0)}E_0(k_1)dk_1 = 0.28566.$$

Найдем числитель правой части (4.8). Имеем:

$$V_1 T_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty K(k,k_1) E_0(k_1) dk_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty \left[K(k,k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)} \right] E_0(k) dk_1 .$$

Заметив, что:

$$K(k,k_1) = T_1(0) - k_1^2 T_3(k_1) - k^2 T_3(k) + k^2 k_1^2 \cdot K_5(k,k_1),$$

найдем разность:

$$K(k,k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)} = K(k,k_1) - \frac{\left(T_1(0) - k^2 T_3(k)\right)\left(T_1(0) - k_1{}^2 T_3(k_1)\right)}{T_1(0)} =$$

$$= K(k,k_1) - T_1(0) - k^2 T_3(k) - k_1^2 T_3(k_1) - \frac{k^2 k_1^2}{T_1(0)} \cdot T_3(k) T_3(k_1) =$$

$$= k^2 k_1^2 \cdot \left[K_5(k,k_1) - \sqrt{\pi} \cdot T_3(k) T_3(k_1) \right] = k^2 \cdot S(k,k_1),$$

где:

$$S(k,k_1) = k_1^2 \cdot \left[K_5(k,k_1) - \sqrt{\pi} \cdot T_3(k) T_3(k_1) \right].$$

Согласно (4.8) теперь получаем:

$$E_1(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)} \cdot \int_0^\infty S(k,k_1) E_0(k_1) dk_1 .$$

Из уравнения (4.5) находим:

$$E_2(k) = -\frac{V_2 \cdot V_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty K(k,k_1) E_1(k_1) dk_1}{k^2 \cdot T_2(k)} .$$

Отсюда находим:

$$V_2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty T_1(k_1) E_1(k_1) dk_1 = -0.021135.$$

С помощью этого соотношения предыдущее равенство преобразуем к виду:

$$E_2(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)} \cdot \int_0^\infty S(k,k_1) E_1(k_1) dk_1 .$$

Аналогично из уравнения (4.6) находим:

$$E_n(k) = -\frac{V_n \cdot T_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty K(k,k_1) E_{1-n}(k_1) dk_1}{k^2 \cdot T_2(k)} .$$

Отсюда находим, что:

$$V_n = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} T_1(k_1)E_{n-1}(k_1)dk_1, \quad n = 1, 2, \dots .$$

При этом

$$E_n(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)}\cdot\int_0^{\infty} S(k, k_1)E_{n-1}(k_1)dk_1, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Выпишем формулы для распределения массовой скорости во втором приближении:

$$U_c(x) = U_{sl}(q) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\left(E_0(k) + E_1(k)q + E_2(k)q^2\right)dk.$$

Для функции $h(x,\mu)$ получаем:

$$h(x,\mu) = -G_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + 2U_{sl} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\Phi(k,\mu)dk,$$

где

$$\Phi(k,\mu) = \frac{(1-ik\mu)}{1+k^2\mu^2}\left[E_0(k) + q\left(E_1(k) + |\mu|G_T(\mu^2 - \frac{1}{2} - V_0) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -|\mu|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{E_0(k_1)dk_1}{1+k_1^2\mu^2}\right) + q^2\left(E_2(k) - |\mu|G_T V -_1 \frac{|\mu|}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{E_1(k_1)dk_1}{1+k_1^2\mu^2}\right)\right].$$

5. Обсуждение результатов и заключение

Сравним полученные результаты с предшествующими, в частности, с точным решением для скорости теплового скольжения при $q = 1$: $U_{sl} = 0.38316G_T$ [13]. Перепишем эту формулу в размерном виде:

$$u_{sl} = 1.1495\,\zeta g_T.$$

Безразмерная скорость теплового скольжения согласно полученным результатам равна:

$$U_{sl}(q) = 0.5(V_1 + V_2 q + V_2 q^2)G_T = 0.5(0.5 + 0.2857q - 0.0211q^2)G_T.$$

Приведем эту формулу к размерному виду:

$$u_{sl}(q) = 0.75(1 + 0.5714q - 0.0422q^2)\zeta g_T, \tag{5.1}$$

где ζ –кинематическая вязкость газа.

В нулевом приближении из формулы (5.1) видно, что нами получен точный результат Максвелла для зеркальных граничных условий: $u_{sl} = 0.75\zeta g_T$. Введем относительную ошибку:

$$O_n(q) = \frac{u_{sl} - u_{sl}(q)}{u_{sl}} \cdot 100\%, \tag{5.2}$$

где $u_{sl}(q)$ определяется равенством (5.1).

В первом приближении скорость теплового скольжения равна: $u_{sl}^{(1)}(q) = 0.75(0,5 + 0,2857q)\zeta g_T$, во втором приближении она определяется равенством (5.1): $u_{sl}^{(2)}(q) = 0.75(1 + 0.5714 \cdot q - 0.0422q^2)\zeta\, g_T$. Нетрудно видеть, что относительная ошибка в нулевом приближении равна: $O_0(1) = 34.48\%$, в первом: $O_1(1) = 2.52\%$, во втором – $O_2(1) = 0.23\%$. Сравнивая приведенные оценки, приходим к заключению, что именно нелинейный анализ приводит к эффективной аппроксимационной формуле для вычисления скорости теплового скольжения.

Перепишем формулу (5.1) в виде: $u_{sl} = K(q)\zeta g_T$, где K – коэффициент теплового скольжения. Проведем сравнение коэффициента скольжения из данной работы с коэффициентами, найденными в [6–8]. В работах [6] и [7] был найден один и тот же коэффициент: K=0.75(1+0.5q). Сравнение этого коэффициента с (5.1) согласно (5.2) показывает, что при q=1 отклонение коэффициента из [6] и [7] не превосходит 2%. В работе [8] было получено, что K=0.75(1+0.532q). Согласно (5.2) получаем, что отклонение коэффициента из [7] от полученного в работе коэффициента не превосходит 0.2%.

Таким образом, в работе выведены эффективные аппроксимационные формулы для решения задачи о тепловом скольжении с зеркально-диффузными граничными условиями. В дальнейшем авторы намерены рассмотреть задачу о тепловом скольжении для квантовых газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. Illustrations of the dynamical theory of gases. I. On the motion and collisions of perfectly elastic spheres; II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another; III. On the collision of perfectly elastic bodies of any form // Phil. Mag., 1860.
2. Maxwell J. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1867.

3. Maxwell J. On stress in rarefied gases, arising from inequalities of temperature // Phil. Trans. Roy. Soc. 1879. Vol. 170. pp. 231–256.
4. Дерягин С.П. Термофорез в газах при малых числах Кнудсена // Успехи физических наук. Т. 162. № 9. С. 133–152.
5. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс. 208 с.
6. Абрамов Ю.Ю. Приближённый метод решения кинетического уравнения вблизи границы. II. Температурный скачок // Теплофизика высоких температур. 1970. Т. 8. № 5. С. 1013–1021.
7. Loyalka S. Slip in the thermal creep flow // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. no. 1. pp. 21–24.
8. Loyalka S., Cipolla J. Thermal creep sleep with arbitrary accommodation at the surface // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. no. 8. pp. 1656–1661.
9. Loyalka S. Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: variational results for Lennard-Jones and n(r)-6 potentials // Physica A. 1990. Vol. 163. pp. 813–821.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод решения граничных задач для кинетических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107–1118.
11. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод сингулярных интегральных уравнений в граничных задачах кинетической теории // Теоретическая и математическая физика. Т. 44 (4). № 3. С. 855–870.
12. Латышев А.В., Юшканов А.А. Новый метод решения граничных задач кинетической теории // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 3. С. 539–552.
13. Латышев А.В. Юшканов А.А. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории: монография. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
14. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ, 2005. 273 с.
15. Латышев А.В., Юшканов А.А. Тепловое скольжение для газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71. № 2. С. 353–359.
16. Любимова Н.Н. Точное решение граничной задачи о тепловом скольжении для квантового ферми-газа // Доклады РАН. 2008. Т. 422. № 4. С. 463–465.
17. Латышев А.В., Любимова Н.Н., Юшканов А.А. Тепловое скольжение ферми-газа // Извест. вузов. Сер. «Физика». 2006. № 7. С. 11–17.
18. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантовых газов: монография. М.: МГОУ. 2012. 265 с.

REFERENCES

1. Maxwell J. Illustrations of the dynamical theory of gases. I. On the motion and collisions of perfectly elastic spheres; II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another; III. On the collision of perfectly elastic bodies of any form // Phil. Mag., 1860.
2. Maxwell J. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1867.
3. Maxwell J. On stress in rarefied gases, arising from inequalities of temperature // Phil. Trans. Roy. Soc. 1879. Vol. 170. pp. 231–256.
4. Deryagin S.P. Termoforez v gazakh pri malykh chislakh Knudsena [Termoflores in gases at small Knudsen numbers] // Uspekhi fizicheskikh nauk. Vol. 162. no. 9. pp. 133–152.
5. Yalamov Yu.I., Galoyan V.S. Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh [Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis, 208 p.
6. Abramov Yu.Yu. Priblizhennyi metod resheniya kineticheskogo uravneniya vblizi granitsy. II. Temperaturnyi skachok [Approximate method for solving the kinetic equations near the boundary. II. Temperature rise] // Teplofizika vysokikh temperatur. 1970. Vol. 8. no. 5. pp. 1013–1021.
7. Loyalka S. Slip in the thermal creep flow // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. no. 1. pp. 21–24.
8. Loyalka S., Cipolla J. Thermal creep sleep with arbitrary accommodation at the surface // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. no. 8. pp. 1656–1661.
9. Loyalka S. Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: variational results for Lennard-Jones and n(r)-6 potentials // Physica A. 1990. Vol. 163. pp. 813–821.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Metod resheniya granichnykh zadach dlya kineticheskikh uravnenii [Method of solution of boundary value problems for kinetic equations] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2004. Vol. 44. no 6. pp. 1107–1118.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v granichnykh zadachakh kineticheskoi teorii [Method of singular integral equations in boundary problems of the kinetic theory] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. Vol. 44 (4). no 3. pp. 855–870.
12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Novyi metod resheniya granichnykh zadach kineticheskoi teorii [A new method for solving boundary problems of the kinetic theory] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2012. Vol. 52. no. 3. pp. 539–552.
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analiticheskoe reshenie granichnykh zadach kineticheskoi teorii: monografiya [Analytical solution of boundary problems of the kinetic theory: monograph]. M., MGOU, 2004. 286 p.
14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Kineticheskie uravneniya tipa Vil'yamsa i ikh tochnye resheniya [The kinetic equation of Williams type and their exact solutions]. M., MGOU,

2005. 273 p.

15. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Teplovoe skol'zhenie dlya gaza s chastotoi stolknovenii, proportsional'noi skorosti molekul [Thermal slip for a gas with a collision frequency proportional to the speed of molecules] // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. 1998. Vol. 71. no. 2. pp. 353–359.
16. Lyubimova N.N. Tochnoe reshenie granichnoi zadachi o teplovom skol'zhenii dlya kvantovogo fermi-gaza [The exact solution of a boundary problem of the thermal slip for a quantum Fermi gas] // Doklady RAN. 2008. Vol. 422. no. 4. pp. 463–465.
17. Latyshev A.V., Lyubimova N.N., Yushkanov A.A. Teplovoe skol'zhenie fermi-gaza [Slide of the thermal Fermi gas] // Izvestiya vuzov. Seriya: Fizika. 2006. no. 7. pp. 11–17.
18. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Granichnye zadachi dlya kvantovykh gazov: monografiya [Boundary value problems for quantum gases: monograph]. M., MGOU, 2012. 265 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии, Московский государственный областной университет;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

Корнеева Елена Евгеньевна – учитель, муниципальное образовательное учреждение «Осташевская средняя общеобразовательная школа», аспирант, Московский государственный областной университет;
e-mail: korneeva@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Latyshev Anatolii Vasil'evich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow State Regional University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

Yushkanov Aleksandr Alekseevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

Korneeva Elena Evgen'evna – teacher, municipal educational institution "Ostashevskaya Secondary School", post-graduate student, Moscow State Regional University;
e-mail: korneeva@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Латышев А. В., Юшканов А. А., Корнеева Е. Е. Тепловое скольжение разреженного газа вдоль плоской поверхности с зеркально-диффузными граничными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 60–73.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-60-73.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Latyshev, A. Yushkanov, E. Korneeva Thermal sliding of a rarefied gas along a flat surface with mirror-diffusion boundary conditions // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 60–73.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-60-73.