УДК 514.7+517.3+517.926
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-15-30

О КЛАССАХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Петрова В.Т.[1], Дмитриева М.Н.[2], Сиviркина А.С.[3]
[1]Московский физико-технический институт
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Российская Федерация
[2]Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова
390026, г. Рязань, ул. Высоковольтная, д. 9, Российская Федерация
[3]Рязанский институт (филиал) Университета Машиностроения
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, д. 26/53, Российская Федерация

Аннотация. В статье выделено три класса римановых пространств, аффинные связности которых функционально абелевы, определено и доказано необходимое и достаточное условие того, что трехмерное риманово пространство имеет функционально абелеву связность.

Ключевые слова: мультипликативный интеграл, функционально абелева функция, функционально абелева связность, пространство аффинной связности, матрица связности, риманово пространство, метрика.

ON SOME CLASSES OF RIEMANNIAN SPACES WITH A FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION

V. Petrova[1], M. Dmitrieva[2], A. Sivirkina[3]
[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russia
[2]I.P. Pavlov Ryazan State Medical University ul. Vysokovol'tnaya 9, 390026 Ryazan, Russia
[3]Ryazan Institute (Branch) of Moscow State University of Mechanical Engineering, ul. Pravo-Lybedskaya 26/53, 390000 Ryazan, Russia

---

Abstract. We have defined three classes of Riemannian spaces whose affine connections are functionally Abelian. We have determined and proved a necessary and sufficient condition for a three-dimensional Riemann space to exhibit a functionally Abelian property

Key words: multiplicative integral, functionally Abelian function, space of affine connection, functionally Abelian connection, Riemannian space, metric, connection matrix, Jordan matrix, Teplitz matrix.

Описание свойств пространств аффинной связности в терминах мультипликативного интеграла [1; 2] в значительной мере связано с мультипликативной интегрируемостью в конечном виде матричных функций определенного геометрического содержания, а специфика мультипликативного интеграла вытекает из неперестановочности значений подынтегральной функции. Было доказано [3; 4], что матричная функция мультипликативно интегрируема, если она функционально абелева. Поэтому и возник интерес к задаче выделения римановых пространств с функционально абелевыми матрицами связности [1; 2–5; 10].

В настоящей работе для размерности 3 дается полное описание таких пространств и приводятся их примеры. Также показано, что кроме пространств нулевой кривизны существует достаточно большой класс римановых пространств с функционально абелевыми связностями, который не исчерпывается найденным в работе [5] конформным случаем.

Итак, пусть $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ (по $i, j = 1,2,3$ суммирование) – риманова метрика с матрицей $g = \|g_{ij}\|$ и матрицами связности $\Gamma_k = \|\Gamma^i_{jk}\|$, где, как обычно, $\Gamma^i_{jk} = g^{is}\Gamma_{sjk}$, $\Gamma_{\cdot k} = \|\Gamma_{ijk}\|$, а

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Для функционально абелевых матриц связности тензор кривизны:

$$R_{ij} = \left[\Gamma_j, \Gamma_i\right] + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i}. \tag{1}$$

При замене координат $x = C(x')x'$ матрица метрики преобразуется по правилу: $g' = C^{\mathrm{T}} g C$, а матрица связности – по правилу:

$$\Gamma'_j = C^{-1}\Gamma_j C c^j_i + C^{-1}C'_{x'^i}. \tag{2}$$

Из последней формулы видно, что, если преобразование координат $C = \|c_i^j\|$ постоянно, то связностью Γ'_j наследуется диагональный, треугольный или блочный вид матриц $C^{-1}\Gamma_i C$.

Согласно результатам В.В. Морозова [3], функционально абелевы матрицы разложимы в линейные комбинации постоянных попарно коммутирующих матриц с функциональными коэффициентами, и значит, для любого значения индекса i можно полагать, что матрицы связности $\Gamma_i = \sum_j \alpha_j(M) A_i^j$, где матрицы A_i^j – постоянны и попарно коммутируют. Если хотя бы одна из них имеет все собственные значения различными, то в базисе из её собственных векторов, к которому можно перейти постоянным преобразованием, все коммутирующие с ней матрицы диагональные, а значит, как отмечено выше, диагональны и матрицы связности Γ_i. В этом случае классификационная задача решена в [9].

Если же среди матриц A_i^j отсутствуют матрицы со всеми различными собственными значениями, но найдётся хотя бы одна матрица с двумя различными собственными значениями, то в базисе, составленном из её собственных векторов, все постоянные матрицы, коммутирующие с ней, будут блочно-треугольными, а значит, и матрицы связности также блочно-треугольные. Этот вид матриц связности был назван [6] функционально кратным жорданову и соответствующие им метрики были найдены для произвольной размерности.

Приведём примеры таких метрик: $a = a(x), b = b(y), c = c(z)$.

Пример 1.

$$g = \begin{Vmatrix} a^2 & \alpha ab & \beta ac \\ \alpha ab & b^2 & \gamma bc \\ \beta ac & \gamma bc & c^2 \end{Vmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma \neq 1.$$

$$\Gamma_1 = \frac{a'}{a} E_{11}; \qquad \Gamma_2 = \frac{b'}{b} E_{22}; \qquad \Gamma_3 = \frac{c'}{c} E_{33}; \qquad R_{ij} \equiv 0.$$

Пример 2.

$$g = \begin{Vmatrix} 1 & b & \beta c \\ b & b^2 + \alpha & \beta bc \\ \beta c & \beta bc & c^2 \end{Vmatrix}, \qquad \text{где} \qquad \alpha(1 - \beta^2) \neq 0.$$

$$\Gamma_1 \equiv 0; \qquad \Gamma_2 = b' E_{12}; \qquad \Gamma_3 = c' E_{33}; \qquad R_{ij} \equiv 0.$$

Пример 3.

$$g=\begin{Vmatrix} e^{2y} & xe^{2y} & \beta e^{y}c \\ xe^{2y} & x^2e^{2y}+\alpha & \beta xe^{y}c \\ \beta e^{y}c & \beta xe^{y}c & c^2 \end{Vmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha(1-\beta^2)\neq 0.$$

$$\Gamma_1\equiv E_{12}; \qquad \Gamma_2\equiv E_{11}+E_{22}; \qquad \Gamma_3=\frac{c'}{c}E_{33}; \qquad R_{ij}\equiv 0.$$

Пусть теперь все матрицы A_k^i имеют по одному собственному значению, тогда жорданов тип каждой из них есть либо трёхмерная клетка, либо двумерная и одномерная.

1⁰. Рассмотрим случай, когда среди постоянных матриц A_k^i найдётся матрица, жорданов вид которой – трёхмерная клетка, и тогда любая коммутирующая с ней матрица в базисе собственных векторов матрицы A_k^i – верхняя тёплицева, значит, такого же вида в этом же базисе и их линейные комбинации с функциональными коэффициентами, причем матрица перехода к базису постоянная.

Симметрия коэффициентов позволяет уточнить вид матриц связности в таком случае:

$$\Gamma_1=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \Gamma_2=\begin{Vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \Gamma_3=\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix}.$$

Понятно, что матрицы связности этого вида не только попарно коммутируют, но и являются функционально абелевыми, при этом коэффициенты тензора кривизны, согласно (1), находятся по формулам:

$$R_{21}=\frac{\partial a}{\partial x^1}\hat{E}_2+\left(\frac{\partial b}{\partial x^1}-\frac{\partial a}{\partial x^2}\right)\hat{E}_3,\ R_{31}=\frac{\partial a}{\partial x^1}E+\frac{\partial b}{\partial x^1}\hat{E}_2+\left(\frac{\partial c}{\partial x^1}-\frac{\partial a}{\partial x^3}\right)\hat{E}_3, \tag{3}$$

$$R_{32}=\frac{\partial a}{\partial x^2}E+\left(\frac{\partial b}{\partial x^2}-\frac{\partial a}{\partial x^3}\right)\hat{E}_2+\left(\frac{\partial c}{\partial x^2}-\frac{\partial b}{\partial x^3}\right)\hat{E}_3,$$

где E – единичная матрица, $\hat{E}_2=E_{11}+E_{22}$, $\hat{E}_3=E_{13}$, где $E_{ij}=\|\delta_{ij}\|$ – матрица, элементы которой $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$, а $\delta_{ii}=1$.

Координатная форма матричной системы $\Gamma_{\cdot k}=g\Gamma_k$, $(k=1,2,3)$ указанного выше типа матриц связности Γ_k даёт систему уравнений:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}=0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=2g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}=0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}=g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}=g_{11}b+2g_{12}a,$$

$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}=g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}=g_{11}b+g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}=g_{11}c+g_{12}b+2g_{13}a,$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=2g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=2(g_{12}b+g_{22}a), \tag{4}$$

$$\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} = g_{12}a,$$
$$\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} = g_{12}b + (g_{13} + g_{22})a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} g_{11}c + (g_{13} + g_{22})b + 2g_{23}a,$$
$$\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 2g_{13}a, \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2(g_{13}b + g_{23}a), \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 2(g_{13}c + g_{23}b + g_{33}c).$$

Условия интегрируемости этой системы:

$$g_{11}\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \qquad g_{11}\frac{\partial a}{\partial x^2} = 0, \qquad g_{12}\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \qquad g_{12}\frac{\partial a}{\partial x^2} = 0,$$
$$g_{11}\frac{\partial b}{\partial x^1} + 2g_{12}\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \quad g_{12}\frac{\partial b}{\partial x^1} + g_{22}\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0,$$
$$(g_{13} + g_{22})\frac{\partial b}{\partial x^1} + 2g_{23}\frac{\partial a}{\partial x^1} = g_{12}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^1}\right),$$
$$g_{11}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^1}\right) = g_{12}\frac{\partial b}{\partial x^1} + 2g_{13}\frac{\partial a}{\partial x^1}, \quad g_{13}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^1}\right) = g_{23}\frac{\partial b}{\partial x^1} + g_{33}\frac{\partial a}{\partial x^1}, \tag{5}$$
$$g_{11}\left(\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1}\right) = g_{12}\frac{\partial a}{\partial x^1}, \qquad g_{12}\left(\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1}\right) = (g_{13} + g_{22})\frac{\partial a}{\partial x^1},$$
$$g_{13}\left(\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1}\right) = g_{23}\frac{\partial a}{\partial x^1}, \quad g_{11}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 2g_{12}\frac{\partial a}{\partial x^2}, \quad g_{12}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = g_{22}\frac{\partial a}{\partial x^2},$$
$$g_{11}\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + g_{12}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 2g_{13}\frac{\partial a}{\partial x^3},$$
$$g_{12}\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + (g_{13} + g_{22})\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 2g_{23}\frac{\partial a}{\partial x^3},$$
$$g_{13}\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + g_{23}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = g_{33}\frac{\partial a}{\partial x^3}.$$

Чтобы определить коэффициенты матриц связности a, b и c, рассмотрим несколько случаев.

1^0.1. Если $g_{11} \neq 0$ или $g_{11} = 0$, но $g_{12} \neq 0$, то из последней системы исключаются g_{ij}, и

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \ \frac{\partial a}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial b}{\partial x^1} = 0, \ \frac{\partial c}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^2} = \frac{\partial a}{\partial x^3}, \ \frac{\partial c}{\partial x^2} = \frac{\partial b}{\partial x^3}. \tag{6}$$

Отсюда и из (1) следует, что $R_{ij} = 0$ для всех $i, j \ = \ 1,2,3$.

Интегрируя систему уравнений (6), получим в явном виде, что

$$a = a(x^3), \quad b = a'(x^3)x^2 + \psi'(x^3),$$
$$c = a'(x^3)x^1 + \psi''(x^3)x^2 + a''(x^3)(x^2)^2 + \varphi'(x^3), \tag{7}$$

где $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ – произвольные функции от переменной x^3, по крайней мере, дважды дифференцируемые. Это позволяет выписать и решения системы уравнений (5), обозначив функции:

$$A = \int a(x^3)dx^3\,, f = a(x^3)x^2 + \varphi(x^3), \ F = \frac{1}{2}f^2 + ax^1 + \frac{1}{2}a'(x^2)^2 + \varphi' x^2 + \varphi, \tag{8}$$

которые определяют метрики, матрицы которых следующие:

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 1 & f & F \\ f & f^2+\alpha & Ff+\alpha(f+\beta) \\ F & Ff+\alpha(f+\beta) & F^2+\alpha(f+\beta)^2+\gamma \end{Vmatrix}, \quad \text{где } \alpha\gamma \neq 0 \tag{9}$$

и

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & f \\ 1 & 2(f+\alpha) & F+(f+\alpha)^2 \\ f & F+(f+\alpha)^2 & 2(Ff+\alpha^2 f+\alpha f^2+\beta \end{Vmatrix}, \quad \text{где } \beta \neq 0 \tag{10}$$

1⁰.2. Если же положить нулевыми коэффициенты $g_{11} = g_{12} = 0$, то в системе уравнений (5) остаются только два нетривиальных условия:

$$\begin{cases} (g_{13}+g_{22})\left(\frac{\partial a}{\partial x^3}-\frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 0, \\ g_{13}\left(\frac{\partial b}{\partial x^3}-\frac{\partial c}{\partial x^2}\right)+g_{23}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3}-\frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

помимо того, что $\frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^2} = \frac{\partial b}{\partial x^1} = 0$ и $\frac{\partial a}{\partial x^3} = \frac{\partial c}{\partial x^1}$, которые обращают в нуль коэффициенты тензора кривизны R_{12} и R_{13}.

Если же дополнительно предположить, что $g_{13}+g_{22} \neq 0$, то из последней системы уравнений (11) следуют и остальные условия системы (6), как и равенство нулю последнего из коэффициентов тензора R_{23}. Тогда решение системы (3) определяет метрику с матрицей:

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & (1+\alpha)f \\ 1 & (1+\alpha)f & 2F+\alpha f^2 \end{Vmatrix}, \quad \text{где } \alpha \neq 0, \tag{12}$$

а функции a, b, c, A, f, F определяются формулами (8) и (7).

Налагая условие $g_{13}+g_{22} = 0$, получим, что

$$a = a(x^3), \quad b = b(x^2, x^3), \quad c = a'(x^3)x^1 + \tilde{c}(x^2, x^3),$$

(здесь $a(x^3)$– произвольная функция), и система (4) сведется к системе:

$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{при} \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} = 2g_{13}a, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 2g_{22}a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} = 2g_{23}a,$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 2g_{13}a, \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2(g_{13}b+g_{23}a), \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}2(g_{13}c+g_{23}b+g_{33}a).$$

Её решения и определяют метрику с матрицей вида:

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 2\Phi \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где α – произвольная функция, $\frac{\partial\Phi}{\partial x^1} = -\alpha$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x^2} = -b + \alpha a$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x^3} = -c + \alpha b$, причём $A = \int a(x^3)dx^3$. Существование этой функции обеспечивается последним из условий системы (11), которое принимает вид:

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + \alpha\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 0,$$

и коэффициент $R_{32} \neq 0$. Тем самым доказано утверждение.

Утверждение 1. Метриками с матрицами (8), (9), (12), (13) исчерпываются все трёхмерные римановы метрики, которые имеют матрицы связности функционально абелевыми и тёплицевыми.

Пример 4. Метрика с матрицей:

$$g = e^{2(x^3)^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2(x^3(x^2 - x^1) - (x^2)^2 \end{Vmatrix}$$

имеет матрицами своей связности матрицы:

$$\Gamma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & x^3 & 2x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{Vmatrix} x^3 & 2x^2 & x^1 + x^2 \\ 0 & x^3 & 2x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда получим (см. (1)), что $R_{12} = R_{13} = 0$, $R_{32} = E_{12} + E_{23} - 2E_{13}$.

Замечание 1. Метрика с матрицей (13) может быть постоянным преобразованием $C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ сведена к виду:

$$ds^2 = e^{2A}(-2dx^1dx^3 + (dx^2)^2 + 2\Phi(dx^3)^2),$$

где $R_{12} = R_{13} = 0$ и $R_{32} = \left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^1 dx^3}\right)\hat{E}_2 \neq 0$

2⁰. Рассмотрим второй случай, когда все постоянные матрицы, в линейные комбинации которых с функциональными коэффициентами разлагаются матрицы связности, имеют по одному собственному значению, но жорданов тип каждой из них – двумерная и одномерная клетки. Согласно [11], в базисе из их собственных векторов в этом случая коммутирующие с ней матрицы с одним собственным значением должны иметь блочно-треугольный вид, который переименованием второй и третьей координат (постоянным преобразованием, которому подвергаем, конечно, и метрику) можно свести к треугольному виду с равными элементами по диагонали. Причем матрицы связности метрики таковы:

$$\Gamma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \tilde{a} & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & \tilde{b} \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix}.$$

Условия их коммутирования:

$$a(M)\tilde{a}(N) = \tilde{a}(M)a(N),$$
$$b(M)\tilde{b}(N) = \tilde{b}(M)b(N),$$
$$\tilde{a}(M)\tilde{b}(N) = a(M)b(N),$$

приводят к необходимости рассмотреть случаи:

1) $\tilde{b} = \delta b,\ \ a = \delta\tilde{a}$, для $\delta \neq 0$.
2) $b \equiv 0,\ \ \tilde{a} \equiv 0$.
3) $\tilde{b} \equiv 0,\ a \equiv 0$.

При этом коэффициенты тензора кривизны имеют вид:

$$R_{21} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^1} E_{12} + \frac{\partial a}{\partial x^1} E_{23} + \left(\frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{\partial a}{\partial x^2}\right) E_{13},$$
$$R_{31} = \frac{\partial a}{\partial x^1} E + \frac{\partial b}{\partial x^1} E_{12} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} E_{23} + \left(\frac{\partial c}{\partial x^1} - \frac{\partial b}{\partial x^3}\right) E_{13}, \tag{14}$$
$$R_{32} = \frac{\partial a}{\partial x^2} E + \left(\frac{\partial b}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3}\right) E_{12} + \left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^2} - \frac{\partial a}{\partial x^3}\right) E_{23} + \left(\frac{\partial c}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^3}\right) E_{13}.$$

Аналогично (3) получим систему, по существу, её обобщающую:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 2g_{11}a, \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} = g_{11}\tilde{a}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} = g_{11}b + 2g_{12}a,$$
$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} = g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} = g_{11}b + g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} = g_{11}c + g_{12}\tilde{b} + 2g_{13}a,$$
$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 2g_{12}\tilde{a}, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} = 2(g_{12}b + g_{22}a), \tag{15}$$
$$\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} = g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} = g_{12}b + g_{13}\tilde{a} + g_{22}a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} = g_{12}c + g_{13}b + g_{23}\tilde{b} + 2g_{23}a,$$
$$\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 2g_{13}a, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2(g_{13}b + g_{23}a), \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 2(g_{13}c + g_{23}\tilde{b} + g_{33}a),$$

и условия её интегрируемости аналогичны условиям интегрируемости системы (4). Отсюда при всех допустимых значениях g_{ij} получим, что обязательны условия:

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^1} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^3},$$

из чего следует равенство нулю коэффициентов R_{12} и R_{13} в (14).

Дальше поступаем аналогично случаю трёхмерной жордановой клетки при решении системы уравнений (15).

2⁰.1. Если $g_{11} \neq 0$ или $g_{11} = 0$, но $g_{12} \neq 0$, то рассмотрим случаи:

2⁰.1.1. $\tilde{b} = \delta b$, $a = \delta\tilde{a}$ и $\delta \neq 0$, тогда имеем, что:

$$a = a(x^3), b = \tilde{a}'(x^3) \cdot x^2 + \psi'(x^3),$$

$$ca'(x^3) \cdot x^1 + \frac{1}{2}\tilde{a}'(x^3) \cdot (x^2)^2 + \psi''(x^3) \cdot x^2 + \varphi'(x^3).$$

Обозначим $A = \int a(x^3)dx^3, \quad \tilde{f} = \tilde{a}(x^3) \cdot x^2 + \psi(x^3), \quad f = \delta\tilde{f},$

$$F = \frac{1}{2}\delta\tilde{f}^2 + a \cdot x^1 + \frac{1}{2}\tilde{a}' \cdot (x^2)^2 + \psi' \cdot x^2 + \varphi,$$

где, как выше, функции $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ произвольны и достаточное число раз дифференцируемы. Это дает метрики нулевой кривизны с матрицами:

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 1 & \tilde{f} & F \\ \tilde{f} & f^2 + \alpha & F\tilde{f} + \alpha^2\delta(\tilde{f} + \beta) \\ F & F\tilde{f} + \alpha^2\delta(\tilde{f} + \beta) & F^2 + \alpha^2\delta^2\big(\tilde{f} + \beta\big) + \gamma \end{Vmatrix}, \text{ где } |\alpha| \neq |\gamma| \qquad (16)$$

или

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & f \\ 1 & 2(\tilde{f} + \alpha) & F + \delta(\tilde{f} + \alpha)^2 \\ f & F + \delta(\tilde{f} + \alpha)^2 & 2(Ff + \delta^2\alpha^2 f + \alpha f^2 + \gamma \end{Vmatrix}, \text{ где } \gamma \neq 0\,. \qquad (17)$$

2⁰.1.2. $b \equiv 0$, $\tilde{a} \equiv 0$, тогда получим, что:

$a = a(x^3), b \equiv 0, \mathrm{c} = a'(x^3) \cdot x' + \varphi'(x^3), \tilde{a} = 0, \tilde{b} = a'(x^3) \cdot x^2 + \psi'(x^3).$

Обозначим $A = \int a(x^3)dx^3, \quad u = a \cdot x^1 + \varphi, \quad v = a \cdot x^3 + \psi$.

Как и выше, функции $a(x^3), \varphi(x^3), \psi(\mathrm{x}^3)$ произвольны, интегрируя систему (15), получим метрики с нулевой кривизной и матрицами:

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & u + \alpha v \\ \alpha & \beta & \alpha u + \beta v + \gamma \\ u + \alpha v & \alpha u + \beta v + \gamma & u^2 + 2v(\alpha v + \gamma) + \beta v^2 + \delta \end{Vmatrix}, \qquad (18)$$

где $(\beta - \alpha^2)\delta \neq \gamma$,

или

$$g = e^{2A}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & v \\ 1 & \beta & u + \alpha v \\ v & u + \alpha v & 2uv + \alpha v^2 + \beta \end{Vmatrix}, \text{ где } \beta \neq 0\,. \qquad (19)$$

2⁰.1.3. в случае $\tilde{b} \equiv 0,\ a \equiv 0,$ решения системы (15) дают метрики вида:

$$g = \begin{Vmatrix} 1 & B & C \\ B & B^2 + \alpha & BC + \beta \\ C & BC + \beta & C^2 + \gamma \end{Vmatrix}, \quad \text{где } \alpha\gamma \neq \beta^2 , \tag{20}$$

или

$$g = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 2B & B + \alpha C \\ \alpha & B + \alpha C & 2(\alpha C + \gamma) \end{Vmatrix}, \text{ где } \gamma \neq 0. \tag{21}$$

Для функции $\mathcal{D}(x^2, x^3)$ двух переменных обозначены производные

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^2} = B, \qquad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^3} = C, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial B}{\partial x^2} = \tilde{a},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^3)^2} = \frac{\partial C}{\partial x^3} = c, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2 \partial x^3} = \frac{\partial B}{\partial x^3} = \frac{\partial C}{\partial x^2} = b,$$

где $\tilde{a} = \tilde{a}(x^2, x^3),\ b = b(x^2, x^3),\ c = c(x^2, x^3)$ и $\frac{\partial b}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3}, \frac{\partial c}{\partial x^2} = \frac{\partial b}{\partial x^3}$.

Всё это, в конце концов, обеспечивает равенство нулю всех компонент тензора кривизны: $R_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, 3$.

3⁰. Как и выше, интерес представляет случай, когда $g_{11} = g_{12} = 0$, при котором есть возможность иметь ненулевые коэффициенты кривизны R_{ij}. Условия интегрируемости системы (15), помимо соотношений:

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^1} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial c}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^3}$$

(из которых и системы (14) и следует, что $R_{12} = R_{13} = 0$) содержат уравнения:

$$\begin{cases} g_{13}\left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) + g_{22}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^2}\right) = 0, \\ g_{13}\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + g_{23}\left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^2}\right) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

которые обращаются в тривиальные, если $a \equiv 0,\ \tilde{b} \equiv 0$ или $\tilde{a} \equiv 0,\ b \equiv 0$ (случаи **3⁰.2**, **3⁰.3** – см. выше п. **2⁰**.) и дают $R_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1,2,3$ для метрик с матрицами, элементы которых в этом случае являются решениями системы уравнений (15) и дают метрику с матрицей:

$$g = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & B \\ 1 & B & 2C) \end{Vmatrix}, \qquad \text{где} \quad \alpha \neq 0, \tag{23}$$

и производные некоторой функции двух переменных $\mathcal{D}(x^2, x^3)$ обозначены $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^2} = B,\ \ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^3} = C.$

Тогда, обозначив:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^2)^2}=\frac{\partial B}{\partial x^2}=\tilde{a}\,,\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2 \partial x^3}=\frac{\partial B}{\partial x^3}=\frac{\partial C}{\partial x^2}=b\,,\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^3)^2}=\frac{\partial C}{\partial x^3}=c\,,$$

будем иметь матрицы найденной метрики связности:

$$\Gamma_1\equiv 0,\qquad \Gamma_2=\begin{Vmatrix}0 & \tilde{a} & b\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad \Gamma_3=\begin{Vmatrix}0 & b & c\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

или

$$g=e^{2A}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha B\\ 1 & \alpha B & 2C+\alpha B^2\end{pmatrix},\text{ где }\ \alpha\neq 0 \tag{24}$$

и $\frac{\partial B}{\partial x^2}=a,\ \frac{\partial B}{\partial x^3}=\frac{\partial C}{\partial x^2}=\tilde{b},\ \frac{\partial C}{\partial x^3}=c$, причем,

$$a=a(x^3),\qquad \tilde{b}=a'(x^3)\cdot x^2+\psi'(x^3),\qquad \mathrm{c}=a'(x^3)\cdot x^1+\varphi'(x^3)$$

для $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ – произвольных функций одной переменной x^3, а $A=\int a(x^3)dx^3$. Матрицы связности в этом случае таковы:

$$\Gamma_1=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad \Gamma_2=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad \Gamma_3=\begin{Vmatrix}\alpha & 0 & c\\ 0 & \alpha & b\\ 0 & 0 & \alpha\end{Vmatrix}.$$

3^0.1. При условии же $\tilde{b}=\delta\, b$, $a=\delta\tilde{a}$, причем $\delta\neq 0$ система уравнений (22) принимает вид:

$$\begin{cases}(g_{13}+\delta g_{22})\left(\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x^3}-\frac{\partial b}{\partial x^2}\right)=0,\\ g_{13}\left(\frac{\partial b}{\partial x^3}-\frac{\partial c}{\partial x^2}\right)+\delta g_{23}\left(\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x^3}-\frac{\partial b}{\partial x^2}\right)=0.\end{cases} \tag{25}$$

Из неё следует, что, если $g_{13}+\delta g_{22}\neq 0$, то $\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x^3}=\frac{\partial b}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial b}{\partial x^3}=\frac{\partial c}{\partial x^2}$, а

$$a=a(x^3), b=\tilde{a}(x^3)x^2+\psi'(x^3),$$

$$\mathrm{c}=a'(x^3)x^1+\frac{1}{2}\tilde{a}'(x^3)\cdot(x^2)^2+\psi''(x^3)\cdot x^2+\varphi'(x^3)$$

(для произвольных функций $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$). Если обозначить $A=\int a(x^3)dx^3$, то матрица метрики определится так:

$$g=e^{2A}\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & f\\ 1 & f & 2C+(1+\alpha\delta)\delta f^2\end{Vmatrix},\qquad \text{где}\qquad \alpha\neq 0, \tag{26}$$

$$f=\tilde{a}(x^3)x^2+\psi(x^3), \mathrm{c}=a'(x^3)x^1+\frac{1}{2}\tilde{a}''(x^3)(x^2)^2+\psi'(x^3)x^2+\varphi(x^3).$$

Когда же $g_{13}+\delta g_{23}=0$, то, вообще говоря, $R_{23}\neq 0$, а второе из уравнений системы (25) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x^3}-\frac{\partial c}{\partial x^2}\right)+\alpha\left(\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x^3}-\frac{\partial b}{\partial x^2}\right)=0.$$

Это условие обеспечивает существование такой функции $\varPhi(x^1, x^2, x^3)$, что $\frac{\partial\varPhi}{\partial x^1} = -\delta\alpha$, $\frac{\partial\varPhi}{\partial x^2} = -\delta b + \alpha\delta\tilde{a} = -\tilde{b} + \alpha a$, $\frac{\partial\varPhi}{\partial x^3} = -\delta c + \alpha\delta b = -\tilde{c} + \alpha\tilde{b}$, где функция $a(x^3)$ – произвольна, а $c(x^1, x^2, x^3) = a'(x^3)\cdot x^1 + \tilde{c}(x^2, x^3)$ для произвольных функций $\tilde{c}(x^2, x^3)$ и $b(x^2, x^3)$. Это дает решение системы уравнений (15), которое определяет метрику с матрицей

$$g = e^{2A}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 1 & \alpha \\ -\delta & \alpha & 2\varPhi \end{pmatrix} \tag{27}$$

при $\delta \neq 0$ и $A = \int a(x^3)dx^3$.

Таким образом, исследованы все возможности случая **2⁰** и тем самым установлено и доказано утверждение.

Утверждение 2. Метриками вида (16)–(21), (23), (24), (26), (27) исчерпываются все метрики, для которых матрицы связности разложимы в функциональные линейные комбинации постоянных матриц с одинаковыми собственными значениями и жордановым типом 2–1, которые функционально абелевы.

Замечание 1. Метрики (16)–(21), (23), (24), (26) обобщают метрики, найденные в случае 1^0, которые определяются формулами (2), (10), (12). Имея нулевые коэффициенты тензора кривизны, они могут быть получены из постоянной метрики преобразованием:

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 1 & f & F \\ 0 & 1 & \tilde{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

где функции $f, \tilde{f}, F$ таковы, что:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = \tilde{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^3} = b, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} = a,$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^3} = \tilde{b}, \quad \frac{\partial F}{\partial x^1} = a, \quad \frac{\partial F}{\partial x^2} = b + fa, \quad \frac{\partial F}{\partial x^3} = c + fb.$$

Замечание 2. Метрика (13) может быть преобразована в метрику (27) постоянным преобразованием: $C = \begin{Vmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Замечание 3. Обозначив $e^{2A} = f(x^3)$, и поменяв знак первой переменной, можно получить более удобную форму записи метрики (13):

$$ds^2 = f(x^3)(2dx^1dx^3 + (dx^2)^2 + \varPhi(x^1, x^2, x^3)(dx^3)^2)$$

с условием $\frac{\partial\varPhi}{\partial x^1} = \frac{f'}{f}$.

Обобщая эти замечания и результаты, полученные ранее в [9] и [10] имеем теорему.

Теорема классификации. Риманова метрика трехмерного пространства имеет функционально абелевы матрицы связности тогда и только тогда, когда она постоянным преобразованием сводится к одному из следующих видов:

1. $ds^2 = b(x,y)(dx^2+dy^2)+\mathrm{c}(z)dz^2$, где $b(x,y)$ и $\mathrm{c}(z)$ произвольные функции, а $R_{12}\neq 0$.

2. $ds^2 = f(z)(2dxdz+dy^2)+\Phi(x,y,z)dz^2$, где $\Phi=\Phi(x,y,z)$, $\Phi'_x = f'(z)$, а $R_{23}\neq 0$.

3. Или метрика ds^2 преобразованием координат $C\cdot C_0$ сводится к постоянной метрике, где преобразование C_0 определяется (28), а C – произвольное постоянное преобразование координат, а в этом случае все $R_{\mathrm{ij}} = 0,\ i,j=1,2,3$.

Пример 5. Метрика $ds^2 = z^2(2dxdz+dy^2)+2(zx+\varphi(y,z))dz^2$ имеет своими матрицами связности матрицы:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{z}E_{13},\ \ \Gamma_2 = \frac{1}{z}(-E_{12}+E_{23}),\ \ \Gamma_3 = \frac{1}{z}E+\frac{\varphi'_y}{z^2}(E_{12}-E_{23})+\left(\frac{\varphi'_z - x}{z^2}-\frac{2\varphi}{z^3}\right)E_{13}$$

и ненулевым коэффициент кривизны $R_{23} = \frac{\varphi''_{yy}-1}{z^2}(-E_{12}+E_{23})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мантуров О.В. Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. М.: МОПИ, 1983. С. 11–18. Деп. в ВИНИТИ 17.04.84. № 2384–84 деп.
2. Паланджянц Л.Ж. О геометрических приложениях мультипликативного интеграла// Некоторые приложения дифференциальной геометрии. М.: МОПИ., 1985. С. 94–117. Деп. в ВИНИТИ 22.06.85. № 4531–85 деп.
3. Морозов В.В. О коммутативных матрицах // Учёные записки Казанского государственного университета. 1952. Т. 119. № 5. С. 17–20.
4. Dollard J., Friedman Ch. Product integration with application to differential equations. London: Addisson-Wesley Publ. Comp. 1979. 254 p.
5. Петрова В.Т. Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инвариантные тензоры на однородных пространствах. М.: МОПИ. 1988. С. 118–139. Деп. в ВИНИТИ 28.11.88 № 8355-В 88 деп.

6. Петрова В.Т. Классификация недиагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Дифференциальная геометрия и мультипликативный интеграл. МОПИ. М., 1989. С. 128–148. Деп. в ВИНИТИ 17.05.89. № 3299-В89 деп.
7. Петрова В.Т. О некоторых классах римановых пространств с функционально абелевыми связностями // Однородные пространства и мультипликативный интеграл М.: МОПИ, 1990. С. 58–78. Деп. в ВИНИТИ 12.04. 90. № 248-В90 деп.
8. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2010. № 3 (21). С. 79–83.
9. Петрова В.Т., Сивиркина А.С. Проблема классификации диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 3. С. 15–24.
10. Петрова В.Т., Сивиркина А.С., Дмитриева М.Н. Проблема классификации недиагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 8–21.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
12. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

REFERENCES

1. Manturov O.V., Palandzhyants L.Zh. Mul'tiplikativnyi integral i uravneniya nulevoi krivizny [Multiplicate integral and equations of zero curvature] // Differentsial'naya geometriya i algebry Li. M., MOPI, 1983. pp. 11–18. Dep. v VINITI 17.04.84. no 2384–84 dep.
2. Palandzhyants L.ZH. O geometricheskikh prilozheniyakh mul'tiplikativnogo integral [Geometric applications of the multiplicative integral] // Nekotorye prilozheniya differentsial'noi geometrii. M., MOPI, 1985. pp. 94–117. Dep. v VINITI 22.06.85. no 4531–85 dep.
3. Morozov V.V. O kommutativnykh matritsakh [On commutative matrices] // Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta. 1952. Vol. 119. no 5. pp. 17–20.
4. Dollard J., Friedman Ch. Product integration with application to differential equations. London: Addisson-Wesley Publ. Comp. 1979. 254 p.
5. Petrova V.T. Klassifikatsiya diagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [Classification of diagonal Riemannian metrics with Abelian functional connections] // Invariantnye tenzory na odnorodnykh prostranstvakh. M. MOPI, 1988. pp. 118–139. Dep. v VINITI 28.11.88. no 8355-V 88 dep.
6. Petrova V.T. Klassifikatsiya nediagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami // Differentsial'naya geometriya i mul'tiplikativnyi integral

[Classification of off-diagonal Riemannian metrics with functionally Abelian connections // Differential geometry and multiplicative integral]. M., MOPI, 1989. pp. 128–148. Dep. v VINITI 17.05.89. no 3299-V89 dep.
7. Petrova V.T. O nekotorykh klassakh rimanovykh prostranstv s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [On some classes of Riemannian spaces with functionally Abelian connections] // Odnorodnye prostranstva i mul'tiplikativnyi integral M., MOPI, 1990. pp. 58–78. Dep. v VINITI 12.04. 90. no 248-V90 dep.
8. Cherkasova V.V. Mul'tiplikativnyi integral v differentsial'noi geometrii i prikladnykh zadachakh [The multiplicative integral in differential geometry and applications] // Vestnik Tatarskogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta. 2010. no 3 (21). pp. 79–83.
9. Petrova V.T., Sivirkina A.S. Problema klassifikatsii diagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [The problem of classification of diagonal Riemannian metrics with Abelian functional connections] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no 3. pp. 15–24.
10. Petrova V.T., Sivirkina A.S., Dmitrieva M.N. Problema klassifikatsii nediagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [The problem of classification of the off-diagonal Riemannian metrics with Abelian functional connections] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no 4. pp. 8–21.
11. Gantmakher F.R. Teoriya matrits. 5-e izd [The theory of matrices. 5th ed.]. M., Fizmatlit, 2004. 560 p.
12. Rashevskii P.K. Rimanova geometriya i tenzornyi analiz [Riemannian geometry and tensor analysis]. M., Nauka, 1967. 664 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Петрова Вера Тимофеевна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института;
e-mail: petrovavt@gmail.com

Дмитриева Мария Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и медицинской информатики, Рязанский государственный медицинский университет им. И.П. Павлова; e-mail: dmitrm05@mail.ru

Сивиркина Анна Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Рязанский институт (филиал) Московского университета машиностроения;
e-mail: SivirkinaAS@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Petrova Vera Timofeevna – doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, professor of the Moscow Institute of Physics and Technology (State University);
e-mail: petrovavt@gmail.com

Dmitrieva Mariya Nikolaevna – candidate of pedagogical sciences, assistant professor of the Chair of Mathematics, Physics and Medical Informatics at the I.P. Pavlov Ryazan State Medical University;
e-mail: dmitrm05@mail.ru

Sivirkina Anna Sergeevna – candidate of pedagogical sciences, assistant professor of the Chair of Higher Mathematics and Informatics at the Ryazan Institute (Branch) of the Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI);
e-mail: SivirkinaAS@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Петрова В.Т., Сивиркина А.С., Дмитриева М.Н. О классах римановых пространств с функционально абелевыми связностями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 15–30.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-15-30.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

V. Petrova, M. Dmitrieva, A. Sivirkina On some classes of riemannian spaces with a functionally abelian connection // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 15–30.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-15-30.