РАЗДЕЛ III.
ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378

Власова Е.А.[*]***, Попов В.С***[*]***, Латышев А.В.***[**]

[*]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

[**]*Московский государственный областной университет*

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аннотация. Обобщен опыт преподавания дисциплины «Линейная алгебра» студентам технического университета. Описаны место и назначение курса в рамках профессионального математического образования. Указана важность дисциплины в формировании у студента познавательных, творческих и общепрофессиональных компетенций. Представлены методические проблемы преподавания дисциплины, основные идеи их разрешения, методы и приемы обучения, организации самостоятельной работы студентов, педагогические инструменты достижения поставленных целей. Обозначены наиболее важные проблемы, возникающие при переходе к модульно-рейтинговой системе оценивания учебных достижений, указаны возможные пути их преодоления.

Ключевые слова: линейная алгебра, линейные (векторные) пространства, евклидовы пространства, линейные отображения (линейные операторы), линейные формы, билинейные формы, квадратичные формы, методические проблемы преподавания, приемы обучения, оценочные средства, модульно-рейтинговая система.

***E. Vlasova*[*], *V. Popov*[*], *A. Latyshev*[**]**
[*] *Bauman Moscow State Technical University*
[**] *Moscow State Regional University*

METHODOLOGICAL ASPECTS OF THE SUBJECT «LINEAR ALGEBRA» AT THE TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. We summarize the experience of teaching the course 'Linear algebra' to students of a technical University. The place and purpose of the course within the professional mathematics education are described. The importance of the subject in the formation of a student's cognitive, creative and professional competencies is outlined. We report the methodological problems of teaching, the main ideas of their solution, teaching methods and techniques, organization of independent work of students, and pedagogical tools to achieve the goals. The most important issues arising from the transition to the rating system of evaluation of educational achievements are described, and possible ways of their overcoming are presented.
Key words: linear algebra, linear (vector) spaces, Euclidean spaces, linear mappings, linear operators, linear forms, bilinear forms, quadratic forms, methodological problems of teaching, teaching techniques, assessment tools, module-rating system.

Введение. Линейная алгебра – это раздел алгебры, в котором изучаются линейные (векторные), евклидовы пространства, линейные отображения (линейные операторы), линейные, билинейные и квадратичные формы. Исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В связи с решением СЛАУ возникло понятие определителя, в 1750 г. было получено правило (формулы Крамера) для решения СЛАУ, где число уравнений равнялось числу неизвестных, и определитель системы отличен от нуля. На основе изучения систем линейных уравнений и их определителей возникло понятие матрицы, ранга матрицы (1877 г., Г. Фробениус), что позволило сформулировать условия совместности и определенности систем линейных алгебраических уравнений (теорема Кронекера-Капелли). Тем самым в конце XIX в. завершилось построение общей теории СЛАУ. В XX в. основным содержанием линейной алгебры становятся понятие линейного пространства и связанные с ним понятия линейных преобразований, линейной, билинейной функций на линейном пространстве. За последующие десятилетия методы линейной алгебры глубоко проникли почти во все области математики. Основой для широких приложений линейной алгебры является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов, например, функций, мер или уравнений, а целых классов таких объектов. Линейная алгебра с ее методами представляет аппарат для единообразного изучения различных линейных физических и математических процессов. С помощью методов линейной алгебры изучаются и нелинейные задачи на основе линеаризации; многие нелинейные методы испытываются на линейных моделях. Линейная алгебра дает весьма важную возможность установить связи между различными разделами в самой математике. Поэтому изучение линейной алгебры, как одного из сложных курсов высшей математики, с ее языком, «психологией» и методами стало необходимым элементом серьезного математического образования, и преподавание ее основ включено в учебные планы технических специальностей университетов.

Остановимся на особенностях преподавания этой дисциплины, учитывая опыт изложения линейной алгебры в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Цели и задачи дисциплины. Дисциплина «Линейная алгебра» входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла учебного плана студентов. Продолжительность изучения – половина семестра. Трудоемкость дисциплины – 3 зачетные единицы. На аудиторную работу отводится около 60% времени, остальное – для самостоятельной работы.

Основными целями изучения дисциплины являются приобретение теоретических знаний основ линейной алгебры, теории линейных операторов и практических навыков по использованию стандартных методов решения типовых задач, в том числе прикладных.

Главные задачи освоения дисциплины состоят в том, чтобы ознакомить студентов с основами теории линейных, евклидовых пространств, теории линейных операторов, квадратичных форм в конечномерных пространствах с приложением этих теорий к различным задачам геометрии и физики, а также привить умение самостоятельно изучать литературу, развивать логическое и алгоритмическое мышление, научить строго излагать свои мысли, выработать способность к математическому исследованию прикладных вопросов и умение перевести практическую задачу на математический язык.

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» должно способствовать формированию навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении дисциплин математического, естественнонаучного и профессионального циклов образовательной программы [1; 2].

Для успешного освоения дисциплины «Линейная алгебра» требуется интеграция знаний, полученных при изучении дисциплин математического цикла: математического анализа, аналитической геометрии.

Дисциплина имеет два модуля одинаковой трудоемкости: «Линейные и евклидовы пространства» и «Линейные операторы и квадратичные формы». В состав каждого модуля входит самостоятельная работа студентов, которая предусматривает выполнение домашнего задания и рубежного контроля. Оценка результатов освоения каждого модуля и дисциплины в целом проводится на основе модульно-рейтинговой системы.

Результаты освоения дисциплины. Необходимо отметить важность изучения дисциплины «Линейная алгебра» в формировании у студентов познавательных, творческих и общепрофессиональных компетенций (в частности, способности к саморазвитию, творческому применению полученных знаний), современных функционально-аналитических методов решения прикладных задач.

В результате изучения дисциплины у обучающихся на основе полученных знаний и приобретенных умений и навыков должны быть сформированы следующие профессиональные компетенции.

Студент должен:

– владеть терминологией основных разделов дисциплины: теории линейных и евклидовых пространств, линейных, самосопряженных, ортогональных операторов, квадратичных форм;

– иметь представление об основных источниках информации по дисциплине (печатных и электронных учебниках, учебных и методических пособиях, электронных конспектах лекций, справочных изданиях), в том числе Интернет-ресурсах (математических журналах и сайтах);

– самостоятельно работать со справочной и учебно-методической литературой для приобретения знаний и поиска решений типовых задач дисциплины;

– иметь представление о сущности и прикладном характере основных понятий и теорем дисциплины, таких как линейное пространство, базис, размерность линейного пространства, евклидово пространство, ортогональные системы, ортонормированные базисы, процесс ортогонализации Грама-Шмидта; линейные операторы и их матрицы, собственные векторы и собственные значения линейного оператора; самосопряженные операторы и их матрицы, ортогональные операторы и их матрицы, квадратичные формы, их канонический вид;

– использовать основные пакеты прикладных математических программ для численных и аналитических расчетов (Maple, Mathematica, MATLAB, MATHCad и др.), в частности, для решения различных задач линейной алгебры: вычисление координат векторов при переходе к новому базису, нахождение подобных матриц, вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы, нахождение характеристического многочлена, приведение квадратичной формы к каноническому виду;

– владеть методиками выполнения типовых заданий по дисциплине, таких как преобразование координат вектора при переходе к новому базису, вычисления в ортонормированном базисе, ортогонализация системы векторов, вычисление матрицы линейного оператора, преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса; вычисление собственных значений и собственных векторов линейного оператора, приведение симметрической матрицы к диагональному виду, приведение квадратичной формы к каноническому виду;

– быть готовым к применению полученных теоретических и практических навыков для поиска и решения стандартных задач линейной алгебры в других дисциплинах и исследовательской работе;

– демонстрировать ответственность и работоспособность, быть готовым выполнять задания в установленные сроки, успешно использовать преимущества модульно-рейтинговой системы оценки знаний [3];

– проявлять инициативу и заинтересованность в учебе, осознавать необходимость в получении дополнительных теоретических знаний и практических навыков (выступать с докладами и презентациями по темам, выделенным на самостоятельную подготовку: жорданова нормальная форма матрицы, билинейные формы; решать дополнительные задачи повышенной трудности, изучать дополнительную литературу).

В процессе изучения такой абстрактной дисциплины, как линейная алгебра, у студентов появляется способность выявлять, формулировать, преобразовать поставленную задачу и принимать верные решения, самостоятельно выбирать способ решения проблемы из нескольких вариантов, переносить знания из одной области в другую, решать нестандартные задачи, в том числе за пределами профессионального поля деятельности. В результате изучения дисциплины формируются такие компетенции, как:

- компетенция профессиональной мобильности: способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности;
- компетенция системного аналитического мышления: способность к системному мышлению и анализу, к аналитической оценке событий и процессов в природе, технике и обществе;
- компетенция креативности: способность к творчеству, генерации новых идей, созданию нового знания;
- компетенция обобщения и презентации результатов исследований: способность к самостоятельному формированию выводов и подготовке научных и аналитических отчетов, публикаций и презентаций результатов научных и аналитических исследований.

Проблемы обучения. В начале обучения возникает большой поток новой информации с высоким уровнем абстракции и специфичной терминологией, что создает значительные трудности при освоении дисциплины. Рекомендуется разработать компактный и удобный в использовании справочный материал, содержащий основные определения, понятия, свойства линейных, евклидовых пространств и др. Решение каждой задачи на семинарах рекомендуется начинать с повторения определений, понятий, которые содержатся в формулировке условия. Следует решать больше совсем простых задач, поясняющих суть того или иного отдельного понятия. Для успешного освоения материала и методов решения задач нужны всевозможные учебные и методические пособия, в которых содержится теоретический материал и подробные решения большого количества задач по каждой изучаемой теме.

Оценочные средства. Контроль знаний учащихся – неотъемлемая часть процесса обучения, оценки качества образования.

Оценка результатов освоения дисциплины «Линейная алгебра» проводится на основе модульно-рейтинговой системы [3]. Эта система предполагает непрерывность контроля работы и успеваемости студентов в течение всего срока обучения. Такая система призвана активизировать и систематизировать учебную работу студентов, повысить мотивацию студентов к получению знаний и поднять их уровень, способствовать повышению качества образования [4]. Проведение промежуточных рейтинговых аттестационных оценок полученных знаний должно способствовать равномерному освоению дисциплин, снизить перегрузки и напряженность в работе студентов, упорядочить их самостоятельную учебную работу.

Блочно-модульная система преподавания позволяет осуществлять проверку полученных студентами теоретических и практических знаний более одного раза в течение семестра, и тем самым неоднократно в семестр объективно оценивать уровень таких знаний и принимать меры по корректировке учебного материала индивидуально для каждого студента [1].

Модульно-рейтинговая система предполагает, что учебная дисциплина (курс) делится на модули, каждый из которых состоит из набора разделов курса и представляет собой логически завершенную часть этого курса [3]. Таких модулей может быть несколько в зависимости от конкретной учебной дисциплины, ее объема, специфики. Модуль (блок) содержит набор контрольных мероприятий, каждое из которых оценивается некоторым числом баллов, называемым рейтингом. Рейтинги по всем отдельным модулям, входящим в состав учебного курса, а также «премиальные» баллы (активность работы на семинарах, посещаемость занятий, качественное и своевременное выполнение домашних и текущих заданий) складываются, и таким образом определяется рейтинг студента за работу в течение семестра (промежуточный рейтинг). Итоговый рейтинг за изучение дисциплины складывается из промежуточных рейтингов и рубежного рейтинга – баллов, набранных студентом за сдачу экзамена (зачета). В дальнейшем итоговый рейтинг переводится (согласно принятой таблице) в пятибалльную оценку. В случае если программой по дисциплине не предусмотрен итоговый контроль (экзамен или зачет), то итоговый рейтинг совпадает с промежуточным рейтингом. Очевидно, что такой принцип стимулирует студента к непрерывной работе в семестре, своевременной сдаче домашних заданий, серьезной подготовке к контрольным мероприятиям.

Программа дисциплины «Линейная алгебра» предусматривает в каждом из двух модулей проведение двух контрольных мероприятий в форме домашнего задания и рубежного контроля [2]. Выполнение домашнего задания связано с проработкой и закреплением теоретического материала и применением его на практике. Рубежный контроль проходит в письменной форме, обязательно включает теоретические вопросы (несколько вопросов на определения основных понятий, формулировки теорем, один вопрос с доказательством) и практические задания.

Опыт показал, что насыщенность теоретического материала абстрактного характера, мало подкрепленного практическими занятиями, не позволяет его усваивать в должной степени в отведенный промежуток времени. Появление в расписании студентов контролируемой самостоятельной работы (КСР) способствовало улучшению ситуации с успеваемостью.

В течение изучения курса на занятиях, проводимых под контролем преподавателя (КСР), можно проводить тестирование студентов. Текущий контроль в форме тестирования позволяет выявить знания и на их основе строить и совершенствовать технологию преподавания. Тестовый контроль дает возможность оперативно проверить знания студентов, психологически меньше нагружает и студентов, и преподавателей. На этапе текущего контроля знаний основной упор должен быть сделан на отслеживание движения учащихся по ступенькам знаний, на установление причин непонимания материала. Поэтому тестовый материал должен содержать задания, проверяющие знание и понимание определений и теорем, предлагающие устанавливать причинно-следственные отношения, проводить классификации, позволяющие проводить сравнения, сопоставления, распознавать противоречия в предлагаемых вариантах решений. При этом тестовые задания должны быть очень наглядными и несложными для выполнения. Для проверки терминологии это могут быть задания открытой формы с пропусками слов, знание определений можно эффективно проверить с помощью заданий закрытого типа с большим числом вариантов ответов. При конструировании тестовых заданий следует помнить, что освоение любого теоретического материала может быть у студента чисто механическим. Задача преподавателя – выяснить, понимает ли он содержание заученного. В этом помогут задания на соответствие. Для диагностирования причинно-следственных знаний и умений можно конструировать цепные задания, в которых правильный ответ на последующее задание зависит от ответа на предыдущее. Так, например, для проверки и закрепления знаний по разделу «Линейные пространства» может быть предложен следующий тест:

А. В следующих заданиях вставьте пропущенные слова или выражения.

Для того чтобы система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ была ________________, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы являлся линейной комбинацией остальных.

Система элементов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно ____________________ .

Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют ________________________ в этом базисе.

Максимальное количество линейно независимых векторов в линейном пространстве называют _____________ линейного пространства.

Б. В следующих заданиях выберите правильный ответ.

Какова размерность линейного пространства квадратных матриц второго порядка, элементами которых являются действительные числа?

а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 0.

Пусть вектор x в базисе $\{e\}=(e_1,e_2,e_3)$ имеет координаты $\{1,2,3\}$. Вектор x в базисе $\{e'\}=(e_1',e_2',e_3')$, где $e_1'=e_1+2e_3$, $e_2'=e_2+e_3$, $e_3'=-e_1-e_2-2e_3$ имеет координаты:

а) $\{-1,0,2\}$, б) $\{0,-1,0\}$, в) $\{0,1,2\}$, г) $\{0,1,-1\}$, д) $\{-2,0,1\}$.

В линейном пространстве V^3 заданы два базиса $\{f\}=(f_1,f_2,f_3)$ и $\{g\}=(g_1,g_2,g_3)$, где

$$f_1=\{1,1,1\},\quad f_2=\{2,1,1\},\quad f_3=\{1,1,3\};$$

$$g_1=\{0,1,1\},\quad g_2=\{1,0,1\},\quad g_3=\{1,0,2\}.$$

Матрица перехода P от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$ равна:

$$\text{а) }\begin{pmatrix}2&1&1\\0&4&-1\\-1&-2&0\end{pmatrix},\quad \text{б) }\begin{pmatrix}2&-3/2&-2\\-1&1&1\\0&1/2&1\end{pmatrix},\quad \text{в) }\begin{pmatrix}2&1/2&-1\\0&-1&1\\1/2&-2&1\end{pmatrix},$$

$$\text{г) }\begin{pmatrix}-1&3/2&-2\\-1&0&1\\1/2&-2&2\end{pmatrix},\qquad \text{д) }\begin{pmatrix}0&1&1\\2&4&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Пусть в линейном пространстве R^2 задана система векторов:

$a_1=\{1,0\}$, $a_2=\{0,-1\}$, $a_3=\{2,3\}$, $a_1=\{1,1\}$.

Число базисов, которые можно построить, используя данные векторы, равно:

а) 2, б) 4, в) 6, г) 10, д) 12 .

При постоянной тестовой проверке у студентов формируется полезная привычка читать лекции и учебно-методическую литературу, вникать в их содержание, а не обращаться к ним от случая к случаю. Студента, правильно выполнявшего тестовые задания в течение семестра, можно поощрить дополнительными рейтинговыми баллами.

Рейтинг. Максимальная сумма баллов, которую студент может набрать по дисциплине, составляет 100 баллов. Программа учебной дисциплины предусматривает итоговую аттестацию в виде экзамена, его прохождение является обязательным для студента контрольным мероприятием. На экзамен выделяется 30 баллов из 100. Экзамен считается сданным, если за него студент получил не менее 16 баллов. Экзамен проводится в два этапа: сначала в письменной форме по билетам, утвержденным на заседании кафедры, затем в виде беседы с преподавателем. Полностью отказываться от устного ответа на экзамене нецелесообразно, поскольку именно в процессе беседы с преподавателем студент учится последовательно и логически излагать свои мысли и отстаивать свою точку зрения. Рейтинг студента по дисциплине за семестр определяется как сумма баллов, полученных им за все дисциплинарные модули, и баллов за экзамен. Рейтинговый балл за каждый модуль складывается из баллов, полученных за выполнение домашнего задания и рубежного контроля. Баллы за домашнее задание составляют не более 30 % от баллов за модуль. Таким образом, в системе начисления баллов за отдельный модуль акцент сделан на успешную сдачу рубежного контроля. Все контрольные мероприятия проводятся во всех группах в одни и те же сроки по единым комплектам заданий и оцениваются по единой системе. Каждое задание контрольного мероприятия оценивается по трехбалльной системе: 0, 1, 2 (возможно с некоторым весом), что дает возможность уменьшить субъективность при выставлении оценок разными преподавателями. Затем набранные баллы, согласно общим правилам, пересчитываются в рейтинговый балл контрольного мероприятия. Для каждого контрольного мероприятия и модуля в целом установлен минимальный балл. Необходимым условием положительной аттестации студента по модулю является получение за домашнее задание и рубежный контроль количества баллов не ниже установленного минимального балла. Разработана система начисления премиальных баллов за своевременную сдачу контрольных мероприятий, активность на занятиях и КСР. Таким образом, студент может набрать за работу в семестре максимально 70 баллов и дополнительно 30 баллов по результатам экзамена. Окончательная оценка за дисциплину выставляется, согласно шкале перевода рейтингового балла в экзаменационную оценку.

Заключение. Преподавание в техническом университете такой сложной и абстрактной дисциплины, как «Линейная алгебра» требует особого методического обеспечения, включающего большое количество справочной литературы, методических пособий и указаний к решению как простейших, так и сложных задач, различных иллюстраций работы общих абстрактных принципов в конкретных и прикладных случаях, четко продуманной модульно-рейтинговой системы оценки знаний учащихся.

Приложение 1

Рубежный контроль

Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства

Вариант № 1

Дать определение линейного пространства и доказать следствия из его аксиом.

Даны векторы $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Доказать, что $\{\vec{a};\vec{b}\}$ – базис линейного пространства R^2. Найти координаты вектора $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{a};\vec{b}\}$.

Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов из R^4: $a_1=(1,-1,1,1)$, $a_2=(2,3,1,2)$, $a_3=(4,1,3,4)$,.

Найти ортонормированный базис в линейном подпространстве свободных векторов, параллельных плоскости $3x=y+2z=0$.

Вариант № 2

Дать определение нормы вектора в евклидовом пространстве. Вывести неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.

Доказать, что векторы $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,2)$, $e_3 = (0,2,1)$. образуют базис в R^3 и найти координаты вектора $x = (-2, 2, -6)$ в этом базисе.

Выяснить, является ли система векторов $a_1 = (1,3,-1,0,2)$, $a_2 = (5,1,6,1,1)$, $a_3 = (-7,7,-15,-2,4)$ линейно зависимой в линейном пространстве R^5. Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами.

Применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к системе векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

Модуль 2. Линейные операторы и квадратичные формы

Вариант № 1

Сформулировать определения собственного значения и собственного вектора линейного оператора. Доказать, что характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса линейного пространства.

Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ – базис линейного пространства R^2. Найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{a}; \vec{b}\}$.

Доказать, что отображение A: $R^3 \to R^3$, задаваемое формулой $A(x_1; x_2; x_3) = (-2x_1 + x_3; 3x_2; x_1 - 2x_3)$, является линейным оператором. Записать матрицу линейного оператора A в каноническом базисе линейного пространства R^3.

Квадратичная форма в некотором ортонормированном базисе имеет вид $2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. Записать этот канонический вид.

Вариант № 2

Сформулировать определение матрицы линейного оператора. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Доказать, что оператор поворота на угол $\pi/4$ вокруг оси Ox в V^3 является линейным. Выписать матрицу этого оператора и найти образ вектора $x=\{1,1,1\}$. Ответ проверить геометрически.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A: R^3 \to R^3$, задаваемого формулой $A(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3,-4x_2,2x_1+x_3)$. Записать матрицу этого преобразования в базисе из собственных векторов.

Привести уравнение поверхности $3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2-x_3=0$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Указать связь между исходными и каноническими координатами. Назвать поверхность.

Вариант № 3

Сформулировать определение самосопряженного линейного оператора. Доказать, что линейный оператор является самосопряженным, если его матрица в некотором ортонормированном базисе симметрическая.

Пусть А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного оператора $A: L \to L$ в базисе $\{e\}=(e_1,e_2)$. Найти его матрицу в базисе $\{e'\}=(e'_1,e'_2)$, если $e'_1=e_1-2e_2$, $e'_2=2e_1+e_2$.

Доказать, что преобразование, действующее в пространстве геометрических векторов V^3 по формуле $Ax=[a,x]$, где $a=i+2j+k$, линейное.

Привести уравнение поверхности $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3-15=0$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Указать связь между исходными и каноническими координатами. Назвать поверхность.

Приложение 2

Домашнее задание

Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства

Даны векторы p и q евклидова пространства E_4 с координатами в базисе $\{a\}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, векторы которого определены относительно некоторого ортонормированного базиса этого пространства.

1) Применяя процесс ортогонализации, ортонормировать базис $\{a\}$, т.е. получить базис $\{b\}$.

2) Найти матрицу перехода от полученного ортонормированного базиса $\{b\}$ к исходному базису $\{a\}$.

3) Найти координаты векторов p и q в ортонормированном базисе $\{b\}$.

4) Вычислить скалярное произведение (p,q) в базисе $\{b\}$.

5) Вычислить угол φ между векторами p и q в ортонормированном базисе $\{b\}$.

Вариант №1

$$p=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix}_{\{a\}},\quad q=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}_{\{a\}},\quad a_1=\begin{pmatrix}4\\0\\3\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\7\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}-1\\5\\-7\\0\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}1\\5\\7\\5\end{pmatrix}.$$

Вариант №2

$$p=\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\\-2\end{pmatrix}_{\{a\}},\quad q=\begin{pmatrix}4\\2\\0\\2\end{pmatrix}_{\{a\}},\quad a_1=\begin{pmatrix}4\\1\\2\\2\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}6\\-1\\3\\-2\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}5\\3\\5\\-4\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Вариант №3

$$p=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}_{\{a\}},\quad q=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\\0\end{pmatrix}_{\{a\}},\quad a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\2\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}3\\7\\-1\\5\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}1\\6\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Модуль 2. Линейные операторы и квадратичные формы

Уравнение линии второго порядка (а) на плоскости Ox_1x_2 и уравнение поверхности второго порядка (б) в пространстве $Ox_1x_2x_3$ привести к каноническому виду, указав:

1) одно из преобразований перехода от заданной прямоугольной декартовой системы координат к канонической системе координат (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания);

2) канонический вид уравнения линии (а) и поверхности (б), значения всех параметров, характеризующих форму линии и поверхности;

3) на плоскости Ox_1x_2 построить каноническую систему координат, линию (а) и найти в системе Ox_1x_2 для центральной линии координаты центра, вершин, фокусов, уравнения асимптот (для гиперболы), а для параболы – координаты вершины, фокуса, уравнение директрисы;

4) в канонической системе координат построить поверхность (б), используя метод сечений для исследования формы поверхности, заданной каноническим уравнением.

Вариант №1

а) $-16x_1^2+8x_1x_2-x_2^2+6\sqrt{17}x_1-10\sqrt{17}x_2+51=0$,

б) $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+6x_1x_3-4x_1+2\sqrt{2}x_2-2\sqrt{2}x_3+25=0$.

Вариант №2

а) $5x_1^2+4x_1x_2+8x_2^2-32x_1-56x_2+80=0$,

б) $x_1^2+5x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3-2x_1+6x_2+2x_3=0$.

Вариант №3

а) $9x_1^2+24x_1x_2+16x_2^2-230x_1+110x_2-475=0$,

б) $2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2-2x_1-4x_2-4x_3+2=0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Власова Е.А., Попов В.С. Принципы блочно-модульной системы преподавания математики // Проблемы совершенствования качества образования в вузе: мат–лы второй науч.-практ. конф., Орехово-Зуево, 5 февраля 2010 г. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2010. С. 88–93.
2. Власова Е.А., Попов В.С. О разработке вузовских учебных программ математических дисциплин // Проблемы совершенствования качества образования: мат-лы четвертой междунар. науч.- практ. конф., Орехово-Зуево, 17 февраля 2012 г. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2012. С. 52–57.
3. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 93–99.
4. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно–рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 1. С. 48–53.