УДК 533.72.

Зудина М. Н.
Московский государственный областной университет

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА СИЛЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГАЗОПОДОБНОМ ОБЛАКЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

Аннотация. Рассмотрена задача определения плотности момента силы в газоподобной среде. Для статистической модели нестационарного газоподобного облака в однородном поле потенциальных сил построен кинетический оператор плотности момента силы. Найдены компоненты тензора плотности момента силы. Ненулевые компоненты момента силы лежат на плоскости, ортогональной внешнему полю. Дан анализ и графическое представление полученных формул.
Ключевые слова: кинетика, вихревые движения, газоподобная среда, момент силы.

M. Zudina
Moscow State Regional University

STATISTICAL THEORY OF DISTRIBUTION MOMENT OF FORCE IN NON¯ STATIONARY GAS¯LIKE CLOUD, ARE IN THE FIELD OF POTENTIAL FORCES

Abstract. The problem of determining the density of the moment of force for a gas-like medium is analyzed. The kinetic functional of the density of the moment of force for a statistical model of a nonstationary gas-like cloud in a uniform field of potential forces is constructed. The components of the tensor of the density of the moment of force are obtained. Nonzero components of the moment of force lie on a plane orthogonal to the external field. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.
Key words: kinetics, vortex motion, gas-liked medium, moment of force.

Вихревые движения в нестационарных газоподобных системах широко распространены в природе, а также происходят в ряде технических процессов. Однако в имеющейся литературе [1; 2; 7 и др.] недостаточно объяснена эволюция вихрей, включая их возникновение и затухание. К тому же большинство авторов предпочитают исследовать несжимаемые среды, исходя обычно из уравнений гидродинамики. В наших предыдущих работах [3; 4; 5] был рассмотрен ряд задач с целью теоретического описания вихревых движений при эволюции нестационарных газоподобных облаков на основе

© Зудина М.Н., 2015.

микроскопической теории. Были найдены строгие аналитические выражения плотности потока вещества j и вихря этого вектора rot j для некоторых моделей. В связи с этим возникает задача выявления и микроскопического описания других характеристик вращательного движения неоднородной газоподобной среды. Такая среда описывается кинетической теорией на основе статистико-механической модели системы молекул или дисперсных частиц. В данной работе ставится задача нахождения распределения плотности момента силы в неоднородной газоподобной среде.

Рассмотрим эту задачу на примере модели облака частиц, расширяющегося из неподвижного малого источника в однородном внешнем поле (например, гравитационном). При отсутствии внешнего поля расширение облака сферически симметрично; эта задача была рассмотрена в [9]. Очевидно, что при наличии поля эта сферическая симметрия нарушается и возникает анизотропия задачи относительно направления поля (далее выбрана по оси z). Когда облако находится в однородном изотропном пространстве и в начальный момент времени не вращается в целом, а внешнее потенциальное поле – однородное, очевидно, что суммарный момент сил, действующих на облако, равен нулю в начальный момент и сохраняет это значение при любом $t>0$. Однако в общем случае на любую частицу облака действует внешняя сила и, следовательно, момент этой силы не равен нулю. В таком случае мы имеем картину распределения плотности момента силы в объеме облака, причем эта плотность знакопеременна, так что интеграл от нее по всему объему равен нулю. Это распределение мы и будем искать далее. Распределение момента импульса в данной работе не рассматривается, но, очевидно, в задаче выполняется закон сохранения момента импульса в интегральной форме.

Для такой модели была получена [4; 6] нестационарная функция распределения системы в виде:

$$F_N = Z^{-1}\cdot\exp\left\{-k_1\cdot p_{i\alpha}p_{i\alpha}+k_3\cdot p_{i\alpha}q_{i\alpha}-b\cdot q_{i\alpha}q_{i\alpha}-k_1\cdot p_{i3}p_{i3}-k_2\cdot p_{i3}+k_3\cdot p_{i3}q_{i3}-k_4\cdot q_{i3}-b\cdot q_{i3}q_{i3}-k_6\right\}, \quad (1)$$

где $i = 1\ldots N$, $\alpha = 1,\ 2$ и подразумевается сумма по всем значениям повторяющихся индексов, как это принято в тензорном исчислении. Значение $\alpha = 3$ закреплено для z-проекций фазовых переменных. Z – Статистический интеграл, p и q – обобщенные координаты и импульсы, b – константа задачи, определяемая из дополнительных условий.

Для однородных частиц коэффициенты $k_1 \dots k_6$ одни и те же для любого i, причём:

$$k_1 = au\,;\;\; k_3 = c + \frac{2bt}{m}\,, \tag{2}$$

как в [4; 6]. Так как здесь принят неподвижный источник, то выражения других коэффициентов упрощаются (сравнительно с [4]) и имеют вид:

$$k_2 = -2aft - \frac{3cft^2}{2m} - \frac{bft^3}{m^2}\,;\quad k_4 = cft + \frac{bft^2}{m}\,;\;\; k_6 = af^2t^2 + \frac{cf^2t^3}{2m} + \frac{bf^2t^4}{4m^2}\,, \tag{2а}$$

причём:

$$u = 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}\,;\;\; w = 1 - \frac{c^2}{4ab}\,;\quad Z = \left(\pi / \sqrt{abw}\right)^{3N} \tag{2б}$$

Выше и далее: m – масса частицы, f – действующая на неё сила, a, c – константы задачи, определяемые из дополнительных условий, t – время.

Функция (1) была использована в [3; 4] для получения выражений плотности ρ, плотности потока вещества j и вихря этого вектора $rot\ j$ в рассматриваемой модели.

По аналогии с другими динамическими величинами, вводимыми в кинетической теории [8], для нахождения плотности момента силы предложен оператор плотности момента силы в виде:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}_{i\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(q_{i\alpha} f_{i\beta} - q_{i\beta} f_{i\alpha}) \cdot \delta\left(q_{i\alpha} - x_\alpha\right) \cdot \delta\left(q_{i\beta} - x_\beta\right). \tag{3}$$

Это – антисимметричный тензор, причём индексы α, β принимают значения 1, 2, 3. При этом плотность момента силы по определению кинетической теории [8] выражается антисимметричным тензором 2-го ранга:

$$\mu_{\alpha\beta} = \int_\Gamma d\Gamma \cdot \hat{M}_{\alpha\beta} \cdot F_N = \frac{1}{2} N \int_\Gamma d\Gamma \cdot F_N \cdot (q_{i\alpha} f_{i\beta} - q_{i\beta} f_{i\alpha}) \cdot \delta\left(q_{i\alpha} - x_\alpha\right) \cdot \delta\left(q_{i\beta} - x_\beta\right), \tag{4}$$

где $f_{i\alpha}$ – проекции вектора силы, действующей на каждую i-ю частицу, $d\Gamma$ – элемент фазового объёма. Ось z направлена вдоль поля, так что ненулевая только проекция f_{i3}.

Для одинаковых частиц в однородном поле при любом i имеем $f_{i3} = f_3$. Три независимые недиагональные компоненты выражения (4) образуют псевдовектор плотности момента силы.

Из (4), используя найденное выражение F_N (1), получим компоненты плотности момента силы:

$$\mu_{12} = 0; \quad \mu_{13} = \frac{x_1 f_3 \rho}{2m} \; ; \quad \mu_{23} = \frac{x_2 f_3 \rho}{2m} \;, \tag{5}$$

где плотность

$$\rho = Nm\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-\beta\left[r^2 + \left(z - \frac{ft^2}{2m}\right)^2\right]\right\}, \tag{6}$$

Здесь обозначено: $\beta = bw/u$, $r^2 = x^2 + y^2$, $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

Таким образом, найдены компоненты псевдовектора плотности момента силы в квазинепрерывной среде, эффективно представляющей статистическую систему по представлениям кинетической теории. Этот момент создаётся совокупностью действий внешнего поля (например, гравитационного) на множество движущихся частиц нестационарной, пространственно неоднородной системы. Для стационарной, пространственно однородной системы это явление не обнаруживается. Ненулевые компоненты момента силы лежат на плоскости, ортогональной внешнему полю.

Исследование найденных формул показывает, что: 1) полученные функции нечетные и меняют знак при x_2 , $x_3 = 0$; 2) они удовлетворяют асимптотическим условиям обращения в нуль при x_2, $x_3 \to \pm\infty$ и при $t \to \infty$; 3) они пропорциональны плотности среды; 4) они имеют экстремумы при конечных x_2, x_3, причем эти экстремумы удаляются со временем от нуля, одновременно понижаясь. Общей закономерностью является «расползание» плотности момента силы по пространству при одновременном его асимптотическом убывании со временем к нулю. Очевидно, что на оси z плотность момента силы всегда равна 0. Свойства функций μ_{13} и μ_{23} таковы, что интегралы от них по неограниченному объёму равны нулю. Таким образом, полный момент силы равен нулю при ненулевой (знакопеременной) локальной плотности его.

Для некоторых задач имеет значение модуль псевдовектора плотности момента силы, находимый из компонент (5), который приводится к виду:

$$\mu = \frac{f_3 r \rho}{2m} . \tag{7}$$

Для этой неотрицательной функции имеется радиальный максимум, который движется по закону:

$$r_m = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}\right)}}{\sqrt{2bw}}$$

(при любом конечном z), и максимум по оси z, движущийся (при r≠0) по закону:

$$z_m = ft^2 / 2m$$

Примечательно, что движение r_m зависит от коэффициента a, который в подобных задачах обратно пропорционален температуре [9]. «Расползание» момента силы асимптотически определяется тепловой скоростью частиц среды. «Чистая» гидродинамика не объясняет это расползание.

Поведение найденных компонент тензора плотности момента силы и модуля плотности момента силы иллюстрируется представленными ниже графиками.

На рис. 1 представлены трехмерные графики компоненты μ_{23}, т. е. x-проекции плотности момента силы, как функции радиальной переменной r и полярного угла α (в плоскости xy) при z = 0 в разные моменты времени.

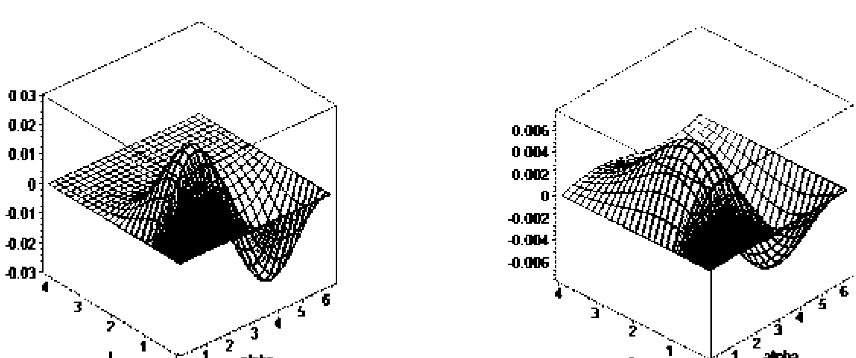

Рис. 1. Компонента плотности момента силы μ_{23}, как функция r, α при z = 0 для t = 0; 1.

На графиках видно, как с течением времени максимум функции понижается и смещается в пространстве в область больших *r*. Также видны области с противоположным знаком функции, причём знак меняется при $\alpha = \pi$. В двух полупространствах имеем вихревые движения, направленные в разные стороны, что соответствует указанному выше обращению в нуль интегрального значения момента силы. Поведение компоненты μ_{13} вполне аналогично.

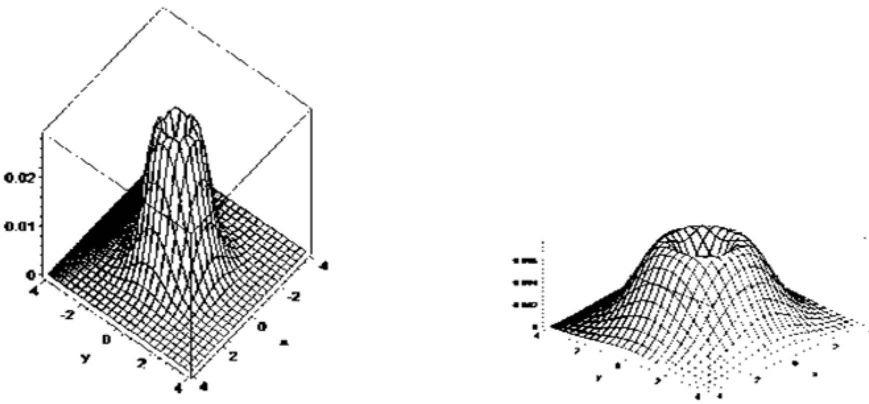

Рис. 2. Модуль плотности момента силы как функция x, y при z = 0 для t = 0; 1.

На рис. 2 представлены трехмерные графики модуля плотности момента силы μ как функции декартовых координат в плоскости xy при z = 0 в разные моменты времени.

Трехмерные графики модуля плотности момента силы имеют характерный «кратерообразный» вид. Из рисунков видно, что вихрь имеет осесимметричную структуру с нулевым минимумом на оси z и с течением времени расплывается при понижении максимума.

Итак, мы получили распределение плотности момента силы в неоднородной газоподобной среде. Эта величина знакопеременна и зависит от времени. Она определяется нестационарной плотностью среды, силой действия внешнего поля и массой частиц среды. В ходе эволюции облака поле плотности момента силы изменяется по сложным пространственно-временным закономерностям и асимптотически со временем обращается в нуль, что вызвано рассеянием облака в пространстве. При этом суммарный момент сил, действующих на облако в целом, остается равным нулю. Это согласуется с законом сохранения момента импульса облака, который также остается равным нулю, если облако не было закручено изначально.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей // Новосибирск: Ин–т теплофизики СО РАН, 2003. С. 504.
2. Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д. Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере // М.: Янус-К, 2000, 444 с.
3. Голов А.Н., Зудина М.Н. Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–Математика. 2012. № 1. С. 39–43.
4. Голов А.Н., Зудина М.Н. Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 3. С. 50–55.
5. Голов А.Н., Зудина М.Н., Перов А.А., Шутов А.И. Кинетическая теория вихревых движений газоподобного облака, движущегося в потенциальном поле с начальной скоростью, ортогональной полю // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–Математика. 2013. № 2. С. 11–16.
6. Голов А.Н., Харитонов А.П. Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2008. № 3–4. С. 12–21.
7. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981, 366 с.
8. Гуров К.П. Основания кинетической теории. М: Наука, 1966, 351 с.
9. Яламов Ю.И., Голов А.Н. Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем М.: Изд–во. МГОУ, 2011, 230 с.