УДК 514.7+517.3+517.926

Петрова В.Т.*, Сиваркина А.С.**

**Московский физико-технический институт (МФТИ)*

***Рязанский институт (филиал) Университета Машиностроения (МАМИ)*

ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ ДИАГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Аннотация. Криволинейный мультипликативный интеграл был впервые использован в дифференциальной геометрии еще Шлезингером. В статье описаны его новые приложения в дифференциальной геометрии, поставлена и полностью решена задача классификации римановых пространств с диагональными метриками и функционально абелевыми связностями. Доказано, что если метрика некоторого n-мерного риманова пространства диагональная и определенные ею матрицы связности функционально абелевы, то это риманово пространство есть прямое произведение некоторого числа двумерных конформных плоскостей на прямое произведение прямых.

Ключевые слова: мультипликативный интеграл, мультипликативная производная, функционально абелева функция, пространство аффинной связности, риманово пространство, метрика, матрица связности.

V.Petrova*, A.Sivirkina**

**Moscow Physical Techniques Institute*

***Ryazan Institute (branch) of Moscow state engineering University (MAMI)*

THE PROBLEM OF CLASSIFYING DIAGONAL RIEMANNIAN METRICS WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION

Abstract. The curvilinear multiplicative integral was first used in differential geometry by Schlesinger. In this paper we have described a new application of this integral in differential geometry. We have formulated and completely solved the problem of classification of Riemannian spaces with diagonal metrics and functionally Abelian connections. It is proved that if the metric of an n-dimensional Riemann space is diagonal and its connectivity matrix is functionally Abelian, than the Riemannian space is the direct product of some number of two-dimensional conformal planes by the direct product of some number of straight lines.

Key words: multiplicative integral, multiplicative derivative, functionally Abelian function, space of affine connection, Riemannian space, metric, connection matrix.

Криволинейный мультипликативный интеграл был использован в дифференциальной геометрии впервые Шлезингером при выводе аналога формулы Грина [1]. Этим было положено начало описания геометрических свойств пространств аффинной связности в терминах мультипликативного интеграла. Интересное развитие этих идей было получено профессором Мантуровым О.В. и его учениками [2–7]. Возможность такого описания в значительной мере, связана с мультипликативной интегрируемостью в конечном виде матричных функций определенного геометрического истолкования вдоль некоторых типов кривых в пространствах с заданной аффинной связностью. Это возможно, если подынтегральное выражение является полной мультипликативной производной и коммутирует со своим обычным интегралом. Специфика обыкновенного мультипликативного интеграла (к нему, в конечном счете, сводится криволинейный) связана с неперестановочностью различных значений подынтегральной функции. В том же случае, когда ассоциативная алгебра с единицей, на которой определяется мультипликативный интеграл, матричная и все значения матричной функции перестановочны, т.е. $f(t_1)\cdot f(t_2) = f(t_2)\cdot f(t_1)$, функцию $f(t)$ называют функционально абелевой [2], мультипликативный интеграл может быть вычислен по формуле:

$$\int_{t_0}^{\cap t} E + f(\tau)d\tau = exp\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Таким образом, отыскание аффинных, и в частности римановых пространств с функционально абелевыми связностями позволяет выделить и описать еще некоторые классы задач (в частности, интегрирование в явном виде уравнений геодезических) в терминах мультипликативного интеграла в силу такой интегрируемости в конечном виде в этих случаях.

1^0. Постановка задачи. Пусть метрика g риманова пространства диагональная, то есть $ds^2 = g_{ii}(x^1, x^2, \dots x^n)\left(dx^i\right)^2, \quad i,j = 1,2,\dots n$. Тогда среди коэффициентов связности Γ^i_{jk} много нулевых. Разобьем решение проблемы отыскания аффинных (в частности, римановых) пространств с функционально абелевыми связностями на два этапа. Сначала найдем условия, которые налагаются на коэффициенты метрики условием равенства 0 коммутаторов $\left[\Gamma_i, \Gamma_j\right] = 0 \quad (i,j = 1,2,\dots n)$ в каждой точке области определения метрики g, а затем для суженного класса метрик – условием коммутирования матриц связности уже в различных точках.

2^0. Прежде всего рассмотрим трехмерный случай, обозначив для удобства $g_{11} = a(x,y,z)$, $g_{22} = b(x,y,z)$, $g_{33} = c(x,y,z)$. Тогда матрицы связности $\Gamma_j = \left\| \Gamma^i_{jk} \right\|$ имеют вид:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \frac{a_x}{a} & \frac{a_y}{a} & \frac{a_z}{a} \\ -\frac{a_y}{b} & \frac{b_x}{b} & 0 \\ -\frac{a_z}{c} & 0 & \frac{c_x}{a} \end{Vmatrix},\ \Gamma_2 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \frac{a_y}{a} & -\frac{b_x}{a} & 0 \\ \frac{b_x}{b} & \frac{b_y}{b} & \frac{b_z}{b} \\ 0 & -\frac{b_z}{c} & \frac{c_y}{c} \end{Vmatrix},\ \Gamma_3 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \frac{a_z}{a} & 0 & -\frac{c_x}{a} \\ 0 & \frac{b_z}{b} & -\frac{c_y}{b} \\ \frac{c_x}{c} & \frac{c_y}{c} & \frac{c_z}{c} \end{Vmatrix}.$$

Учитывая намеченное выше, будем решать относительно неизвестных a,b,c систему уравнений $[\Gamma_i, \Gamma_j] = 0$, где $i,j = 1{,}2{,}3$, точнее, ей равносильную: $4g[\Gamma_i, \Gamma_j] = 0$.

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\frac{a_x}{a}b_x + \frac{a_y}{b}b_y - \frac{a_z}{c}b_z - \frac{a_y^2}{a} + \frac{b_x^2}{b} & \frac{a_y}{b}b_z + \frac{a_z}{c}c_y - \frac{a_z}{a}a_y \\ -\frac{a_y^2}{a} + \frac{b_x^2}{b} - \frac{a_x}{a}b_x + \frac{a_y}{b}b_y + \frac{a_z}{c}b_z & 0 & \frac{b_x}{b}b_z - \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{c}c_x \\ -\frac{a_y}{b}b_z - \frac{a_y}{a}a_z + \frac{a_z}{c}c_y & \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{c}c_x + \frac{b_x}{b}b_z & 0 \end{Vmatrix} = 0;$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & \frac{a_y}{b}b_z + \frac{a_z}{c}c_y - \frac{a_y}{a}a_z & -\frac{a_x}{a}c_x - \frac{a_y}{b}c_y + \frac{a_z}{c}c_z - \frac{a_z^2}{a} + \frac{c_z^2}{c} \\ \frac{a_y}{a}a_z + \frac{a_y}{b}b_z - \frac{a_z}{c}c_y & 0 & \frac{a_y}{a}c_x - \frac{b_x}{b}c_y + \frac{c_x}{c}c_y \\ -\frac{a_z^2}{a} + \frac{c_x^2}{c} + \frac{a_y}{b}c_y + \frac{a_z}{c}a_y - \frac{a_y}{a}c_x & \frac{c_x}{c}a_y - \frac{a_y}{a}c_x - \frac{b_x}{b}c_y & 0 \end{Vmatrix} = 0;$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\frac{b_x}{b}b_z + \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{c}c_x & -\frac{a_y}{a}c_x + \frac{b_x}{b}c_y - \frac{c_x}{c}c_y \\ \frac{a_z}{a}b_x + \frac{b_z}{c}c_x - \frac{b_x}{b}b_z & 0 & -\frac{b_x}{b}c_x - \frac{b_y}{b}c_y + \frac{b_z}{c}c_z - \frac{b_z^2}{b} + \frac{c_y^2}{c} \\ \frac{c_x}{c}c_y - \frac{a_y}{a}c_x - \frac{b_x}{b}c_y & -\frac{b_z^2}{b} + \frac{c_y^2}{c} + \frac{b_x}{a}c_z - \frac{b_y}{a}c_y + \frac{b_z}{c}c_z & 0 \end{Vmatrix} = 0.$$

Замечая, что во всех коммутаторах элементы, симметричные относительно главной диагонали, отличаются только знаком одного слагаемого, можем выписать систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_z b_z = 0; \\ a_y b_z = 0; \\ a_z b_x = 0; \\ a_z c_y = 0; \\ a_y c_y = 0; \\ a_y c_x = 0; \\ b_x c_x = 0; \\ b_x c_y = 0; \\ b_x c_x = 0; \end{cases} \wedge \begin{cases} \frac{a_z}{c}c_y - \frac{a_z}{a}a_y = 0; \\ \frac{b_y}{b}b_z - \frac{b_y}{b}c_x = 0; \\ \frac{a_y}{b}b_z - \frac{a_y}{a}a_z = 0; \\ \frac{b_x}{b}c_y - \frac{c_x}{c}c_y = 0; \\ \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{b}b_x = 0; \\ \frac{a_y}{a}c_x - \frac{c_x}{c}c_y = 0; \end{cases} \wedge \begin{cases} -\frac{a_x}{a}b_x + \frac{a_y}{b}b_y - \frac{a_y^2}{a} + \frac{b_x^2}{b} = 0; \\ -\frac{a_x}{a}c_x + \frac{a_y}{c}c_z - \frac{a_z^2}{a} + \frac{c_x^2}{c} = 0; \\ -\frac{b_y}{b}c_y + \frac{b_z}{b}c_z - \frac{b_z^2}{b} + \frac{c_y^2}{c} = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Первые две подсистемы не содержат производные a_x, b_y, c_z; среди остальных же должно быть много нулей, поэтому несложно убедиться, что среди допустимых решений $\langle a_y, a_z, b_x, b_z, c_x, c_y\rangle$ имеют место только решения следующего вида:

$$\{\langle 0,0,0,0,0,0\rangle, \langle p,0,0,0,0,0\rangle, \langle 0,p,0,0,0,0\rangle, \langle 0,0,p,0,0,0\rangle, \langle 0,0,0,p,0,0\rangle,$$
$$\langle 0,0,0,0,p,0\rangle, \langle 0,0,0,0,0,p\rangle, \langle p,0,q,0,0,0\rangle, \langle 0,p,0,0,q,0\rangle, \langle 0,0,0,p,0,q\rangle\},$$

где p и q – произвольные ненулевые функции. Остается выяснить условия, налагаемые третьей подсистемой.

1. Очевидно, что $a_y = a_z = b_x = b_z = c_x = c_y = 0$ удовлетворяет и ей, таким образом, получаем первую метрику:

$$ds^2 = a(x)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2. \qquad (1)$$

2. Если $a_y \neq 0$, но $a_z = b_x = b_z = c_x = c_y = 0$, то последняя подсистема дает условие $\frac{b_y}{b} = \frac{a_y}{a}$, с которым получаем тип метрики:

$$ds^2 = a(x,y)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2. \qquad (2)$$

3. Если же $a_y \cdot b_x \neq 0$, но $a_z = b_z = c_x = c_y = 0$, то дополнительное условие следующее: $a_y\left(\frac{b_y}{b} - \frac{a_y}{a}\right) + b_x\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right) = 0$,

а метрика получается вида:

$$ds^2 = a(x,y)dx^2 + b(x,y)dy^2 + c(z)dz^2. \qquad (3)$$

Замечание 1. Можно видеть, что все остальные решения системы (*) сводятся к описанным случаям 2 или 3 переобозначением переменных.

Тем самым доказана лемма.

Лемма 1. Существует только три типа трехмерных римановых диагональных метрик с коммутирующими в каждой точке матрицами связности.

Замечание 2. Полученные выше метрики есть метрики прямого произведения двумерной плоскости на прямую.

Следствие 1. Матрицы связности указанных метрик следующие:

1. $\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{a'}{a}E_1^1,\ \Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{b'}{b}E_2^2,\ \Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{c'}{c}E_3^3.$

2. $\Gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_x}{a}E_1^1 + \frac{a_y}{a}E_2^1 - \frac{a'_y}{b}E_1^2\right),\ \ \Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{b'}{b}(E_1^1 + E_2^2),\quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{c'}{c}E_3^3;$

3. $\Gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_x}{a}E_1^1 + \frac{a_y}{a}E_2^1 - \frac{a'_y}{b}E_1^2 + \frac{b_x}{b}E_2^2\right),\quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_y}{a}E_1^1 - \frac{b_x}{a}E_2^1 + \frac{b_x}{b}E_1^2 + \frac{b_y}{b}E_2^2\right),$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{c'}{c}E_3^3.$$

Переходя к реализации второго этапа, будем находить среди этих метрик такие, чтобы их матрицы связности коммутировали уже в разных точках. Для первого типа метрик выполнимость этого очевидна, как и то, что в остальных случаях матрица Γ_3 коммутирует с матрицами Γ_i $(i = 1,2,3)$ в разных точках. Поэтому в силу замечания 2 можно ограничиться коммутаторами Γ_1 и Γ_2, суженными до размерности 2.

Тогда для метрики второго типа $\Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{b'}{b}\mathrm{E}$ и, значит, Γ_2 коммутирует в любой другой точке с любой другой матрицей связности, и существенны только условия, налагаемые коммутатором $[\Gamma_1(M),\ \Gamma_1(N)] = 0$, то есть:

$$\left\|\begin{matrix} \frac{a_y}{a}(M)\frac{a_y}{b}(N) - \frac{a_y}{a}(N)\frac{a_y}{b}(M) & \frac{a_x}{a}(M)\frac{a_y}{a}(N) - \frac{a_x}{a}(N)\frac{a_y}{a}(M) \\ \frac{a_y}{b}(N)\frac{a_x}{a}(M) - \frac{a_y}{b}(M)\frac{a_x}{a}(N) & -\frac{a_y}{a}(M)\frac{a_y}{b}(N) - \frac{a_y}{a}(N)\frac{a_y}{b}(M) \end{matrix}\right\| = 0,$$

что в совокупности с условием (2) дает систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a_y}{a} = \frac{b'}{b}; \\ a_x(M)a_y(N) = a_x(N)a_y(M); \\ b(M)a_y(N) = a_y(M)b(N); \\ \frac{a_x(M)}{a(M)}\cdot\frac{a_y(N)}{b(N)} = \frac{a_x(N)}{a(N)}\cdot\frac{a_y(M)}{b(M)}. \end{cases} \tag{4}$$

Из второго уравнения следует, что для функции $a(x,y)$ есть только три возможности: $a_y = 0$, или $a_y = a_x = 0$, или их пропорциональность.

Если $a_y = 0$, то удовлетворяются остальные уравнения системы, а из первого с необходимостью получим $b = const$ и метрику:

$$ds^2 = a(x)dx^2 + bdy^2 + c(z)dz^2,$$

но она – частный случай метрики первого типа.

Если к тому же $a_x = 0$, то получим, что $a(x,y) = k \cdot b(y)$ и метрику:

$$ds^2 = kb(y)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2 \tag{5}$$

Если же $a_x(x,y) = k \cdot a_y(x,y)$, $k \neq 0$, то, учитывая первое из условий системы (4), получим, что функции $b(y) = B \cdot e^{\alpha x}$ и $a(x,y) = A \cdot e^{\alpha(kx+y)}$ (где $\alpha \cdot A \cdot B \neq 0$), которые не могут удовлетворить третьему уравнению. Следовательно, метрика второго типа имеет функционально абелевы матрицы связности, только если она имеет вид (5).

В случае метрики третьего типа коммутаторы $[\Gamma_1(M),\ \Gamma_1(N)] = 0$, $[\Gamma_2(M),\ \Gamma_2(N)] = 0$ и $[\Gamma_1(M),\ \Gamma_2(N)] = 0$ порождают систему уравнений:

$$\begin{cases} a_y\left(\frac{a_y}{a}-\frac{b_y}{b}\right)+b_x\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)=0; \\ \frac{a_y}{a}(N)\left(\frac{a_x}{a}(M)-\frac{b_x}{b}(M)\right)=\frac{a_y}{a}(M)\left(\frac{a_x}{a}(N)-\frac{b_x}{b}(N)\right); \\ \frac{a_y}{b}(N)\left(\frac{a_x}{a}(M)-\frac{b_x}{b}(M)\right)=\frac{a_y}{b}(M)\left(\frac{a_x}{a}(N)-\frac{b_x}{a}(N)\right); \\ \frac{b_x}{a}(N)\left(\frac{a_y}{a}(M)-\frac{b_y}{b}(M)\right)=\frac{b_x}{a}(M)\left(\frac{a_y}{a}(N)-\frac{b_y}{b}(N)\right); \\ \frac{b_x}{b}(N)\left(\frac{a_y}{a}(M)-\frac{b_y}{b}(M)\right)=\frac{b_x}{b}(M)\left(\frac{a_y}{a}(N)-\frac{b_y}{b}(N)\right); \\ \frac{b_x}{a}(N)\left(\frac{a_x}{a}(M)-\frac{b_x}{b}(M)\right)=-\frac{a_y}{a}(M)\left(\frac{a_y}{a}(N)-\frac{b_y}{b}(N)\right); \\ \frac{b_x}{b}(N)\left(\frac{a_x}{a}(M)-\frac{b_x}{b}(M)\right)=-\frac{a_y}{a}(M)\left(\frac{a_y}{a}(N)-\frac{b_y}{b}(N)\right); \\ \frac{a_y}{a}(M)\frac{a_y}{b}(N)=\frac{a_y}{a}(N)\frac{a_y}{b}(M); \\ \frac{b_x}{a}(M)\frac{b_x}{b}(N)=\frac{b_x}{a}(N)\frac{b_x}{b}(M); \\ \frac{a_y}{a}(M)\frac{b_x}{b}(N)=\frac{a_y}{a}(N)\frac{b_x}{b}(M). \end{cases}$$

Последним трем уравнениям удовлетворяют функции $a(M)$ и $b(M)$, только если $a(M)\cdot b(N) = a(N)\cdot b(M) \neq 0$, тогда аналогично предыдущему случаю получим $a(x,y) = k\cdot b(x,y)$, где $k \neq 0$, и значит,

$$\frac{b_x}{b}=\frac{a_x}{a};\quad \frac{b_y}{b}=\frac{a_x}{a};\quad \frac{b_x}{b}=\frac{1}{k}\frac{a_x}{a};\quad \frac{b_y}{b}=\frac{1}{k}\frac{a_y}{a};\quad \frac{a_x}{b}=\frac{1}{k}\frac{a_x}{a};\quad \frac{a_y}{b}=\frac{1}{k}\frac{a_y}{a}.$$

Далее проверкой можно убедиться в том, что тогда и все предыдущие уравнения системы удовлетворяются. Это дает метрику вида:

$$ds^2 = k\cdot b(x,y)dx^2 + b(x,y)dy^2 + c(z)dz^2. \qquad (6)$$

Замечание 3. Метрики (5) и (6) заменой переменных приводятся к виду:

$$ds^2 = b(y)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2, \qquad (5')$$

$$ds^2 = b(x,y)dx^2 + b(x,y)dy^2 + c(z)dz^2. \qquad (6')$$

Очевидно, что (5') представляет собой частный случай (6').

Итак, доказана теорема.

Теорема 1: *Существует только два типа диагональных трехмерных римановых метрик с функционально абелевыми матрицами связности:*

1''. $$ds^2 = a(x)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2.$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{a'}{a}E_1^1,\ \ \Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{b'}{b}E_2^2,\ \ \Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{c'}{c}E_3^3.$$

2''. $$ds^2 = b(x,y)dx^2 + b(x,y)dy^2 + c(z)dz^2.$$

$$\Gamma_1 = \frac{b_x}{b}\frac{1}{2}\frac{b_x}{b}\frac{b_x}{b}(E_1^1 + E_2^2) + \frac{1}{2}\frac{b_y}{b}(E_2^1 - E_1^2),$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{b_y}{b}\frac{b_y}{b}(E_1^1 + E_2^2) - \frac{1}{2}\frac{b_x}{b}(E_2^1 - E_1^2),\quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{c'}{c}E_3^3.$$

Замечание 4. Доказанная выше теорема составит базу индукции при решении задачи классификации для произвольной размерности.

3^0. Теорема 2. *Если метрика некоторого n-мерного риманова пространства диагональная и определенные ею матрицы связности функционально абелевы, то она есть метрика прямого произведения некоторого числа двумерных конформных плоскостей на прямое произведение прямых.*

Доказательство. Предположим, что утверждение имеет место при всех $k < n$. Так как коэффициенты связности $\Gamma_{jk}^i \neq 0$, только если среди индексов *i*, *j*, k есть одинаковые, то в матрице Γ_i могут быть ненулевыми только элементы диагонали, *i*-ой строки и *i*-ого столбца:

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x^i} & & & -\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_i}{\partial x^1} & & \\ & \frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x^i} & & -\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_i}{\partial x^2} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^1} & \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^2} & \cdots & \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^i} & \cdots & \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^n} \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{g_n}\frac{\partial g_i}{\partial x^n} & & \frac{1}{g_n}\frac{\partial g_n}{\partial x^n} \end{Vmatrix}$$

(здесь для удобства обозначений $g_s = g_{ss}(x^1, x^2, \dots x^n)$).

При вычислении коммутатора $[\Gamma_i, \Gamma_k]$ получим матрицу, в которой ненулевыми могут быть только *i*-ая и *k*-ая строки и столбцы, а диагональ обязательно нулевая. Вычислив матрицу $4g[\Gamma_i, \Gamma_k] = 0$ и сравнив элементы, симметричные относительно главной диагонали, получим:

$$a_{ik} = -\sum_{s=1}^{n} g_s \frac{\partial g_i}{\partial x^s}\frac{\partial g_k}{\partial x^s} + 2\frac{1}{g_k}\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\frac{\partial g_k}{\partial x^k} - \frac{1}{g_k}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\right)^2 + \frac{1}{g_i}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)^2,$$

$$a_{ki} = \sum_{s=1}^{n} g_s \frac{\partial g_i}{\partial x^s}\frac{\partial g_k}{\partial x^s} - 2\frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^i} + \frac{1}{g_k}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{g_i}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)^2$$

и уравнения:

$$\frac{1}{g_k}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{g_i}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)^2 + \frac{1}{g_k}\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\frac{\partial g_k}{\partial x^k} - \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^i} = 0;$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{g_s}\frac{\partial g_i}{\partial x^s}\frac{\partial g_k}{\partial x^s} - \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^i} + \frac{1}{g_k}\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\frac{\partial g_k}{\partial x^k} = 0.$$

Симметричные относительно главной диагонали элементы k-ой строки и столбца ($j \neq k, j \neq i$)

$$a_{jk} = \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{1}{g_j}\frac{\partial g_j}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^j} + \frac{1}{g_k}\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial g^j};$$

$$a_{kj} = \frac{1}{g_k}\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^j} - \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\frac{\partial g_i}{\partial x^j} - \frac{1}{g_j}\frac{\partial g_k}{\partial x^j}\frac{\partial g_j}{\partial g^i}$$

дают уравнения:

$$\frac{1}{g_k}\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^j} - \frac{1}{g_j}\frac{\partial g_j}{\partial x^i}\frac{\partial g_k}{\partial x^j} = 0;$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x^i}\frac{\partial g_i}{\partial x^j} = 0.$$

Аналогичные вычисления для i-ой строки и столбца дают:

$$\frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\frac{\partial g_i}{\partial x^j} - \frac{1}{g_j}\frac{\partial g_j}{\partial x^k}\frac{\partial g_i}{\partial x^j} = 0;$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x^j}\frac{\partial g_i}{\partial x^k} = 0.$$

Объединяя их в систему и несколько упростив ее, получим систему дифференциальных уравнений четырех типов, всего же $(2n-3)(n-1)n$ уравнений.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{g_p}\left(\dfrac{\partial g_p}{\partial x^q}\right)^2+\dfrac{1}{g_q}\left(\dfrac{\partial g_q}{\partial x^p}\right)^2+\dfrac{1}{g_q}\dfrac{\partial g_p}{\partial x^q}\dfrac{\partial g_q}{\partial x^q}-\dfrac{1}{g_p}\dfrac{\partial g_p}{\partial x^p}\dfrac{\partial g_q}{\partial x^p}=0; \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{g_s}\frac{\partial g_p}{\partial x^s}\frac{\partial g_q}{\partial x^s}-\frac{1}{g_p}\frac{\partial g_p}{\partial x^p}\frac{\partial g_q}{\partial x^p}+\frac{1}{g_q}\frac{\partial g_p}{\partial x^q}\frac{\partial g_q}{\partial x^q}=0; \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial x^p}\dfrac{\partial g_q}{\partial x^i}=0; \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial x^p}\dfrac{\partial g_i}{\partial x^q}=0; \end{cases}$$

$(i, p, q = 1, 2, \dots, n;\ i \neq p, i \neq q, p \neq q)$.

Выделим подсистему, содержащую все уравнения с индексами 1 и 2:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\frac{\partial g_q}{\partial x^1}=0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\frac{\partial g_1}{\partial x^q}=0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\frac{\partial g_2}{\partial x^p}=0; \tag{9}$$

$$-\frac{1}{g_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x^1}\right)^2+\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\frac{\partial g_2}{\partial x^2}-\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x^1}\frac{\partial g_2}{\partial x^1}=0; \tag{10}$$

$$-\frac{1}{g_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x^q}\right)^2+\frac{1}{g_q}\left(\frac{\partial g_q}{\partial x^1}\right)^2+\frac{1}{g_q}\frac{\partial g_1}{\partial x^q}\frac{\partial g_q}{\partial x^q}-\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x^1}\frac{\partial g_q}{\partial x^1}=0; \tag{11}$$

$$-\frac{1}{g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x^q}\right)^2+\frac{1}{g_q}\left(\frac{\partial g_q}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{g_q}\frac{\partial g_2}{\partial x^q}\frac{\partial g_q}{\partial x^q}-\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x^2}\frac{\partial g_q}{\partial x^2}=0; \tag{12}$$

$$\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_p}{\partial x^1}\frac{\partial g_q}{\partial x^1}+\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_p}{\partial x^2}\frac{\partial g_q}{\partial x^2}+\sum_{s=3}^{n}\frac{1}{g_s}\frac{\partial g_p}{\partial x^s}\frac{\partial g_q}{\partial x^s}-\frac{1}{g_p}\frac{\partial g_p}{\partial x^p}\frac{\partial g_q}{\partial x^p}+\frac{1}{g_q}\frac{\partial g_p}{\partial x^q}\frac{\partial g_q}{\partial x^q}=0; \tag{13}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{g_s}\frac{\partial g_1}{\partial x^s}\frac{\partial g_p}{\partial x^s}-\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x^1}\frac{\partial g_p}{\partial x^1}+\frac{1}{g_p}\frac{\partial g_1}{\partial x^p}\frac{\partial g_p}{\partial x^p}=0; \tag{14}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{g_s}\frac{\partial g_2}{\partial x^s}\frac{\partial g_p}{\partial x^s}-\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x^2}\frac{\partial g_p}{\partial x^2}+\frac{1}{g_p}\frac{\partial g_2}{\partial x^p}\frac{\partial g_p}{\partial x^p}=0; \tag{15}$$

$$\sum_{s=3}^{n}\frac{1}{g_s}\frac{\partial g_1}{\partial x^s}\frac{\partial g_2}{\partial x^s}=0. \tag{16}$$

Из предположения $\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \neq 0$ и уравнений (7), (8), (9), (14) немедленно следует, что $\frac{\partial g_q}{\partial x^1}=0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x^q}=0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x^p}=0$, $\frac{\partial g_p}{\partial x^2}=0$, которые, в свою очередь, обращают в тождество уравнения (11), (12), (15), (16). Уравнение же (13) теряет слагаемые с индексами 1 и 2. Резюмируем полученное выше:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x^p} = 0, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x^p} = 0, \qquad \frac{\partial g_p}{\partial x^1} = 0, \qquad \frac{\partial g_p}{\partial x^2} = 0,$$

где $p = 3, 4, \dots, n$ и

$$-\frac{1}{g_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{1}{g_2}\frac{\partial g_1}{\partial x^2}\frac{\partial g_2}{\partial x^2} - \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x^1}\frac{\partial g_2}{\partial x^1} = 0,$$

все остальные уравнения не содержат в своей записи индексы 1 и 2. Это означает, что получено прямое произведение двумерной конформной плоскости на пространство размерности $n-2$, которое по предположению индукции есть прямое произведение некоторого числа двумерных конформных плоскостей и прямых. Шаг индукции выполнен и доказана теорема классификации для диагональных метрик произвольной размерности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Schlesinger L. Parallel Serschiebung und Krummungs tensor // Math. Ann. 1928. V. 99. P. 413–434.
2. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. – Майкоп, 2011. С. 93.
3. Мантуров О.В. Об одной задаче теории мультипликативного интеграла // Дифференциальная геометрия и приложения. МОПИ. Деп. в ВИНИТИ № 1442–83 Деп.
4. Мантуров О.В., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных // Прикладные вопросы дифференциальной геометрии. МОПИ. Деп. в ВИНИТИ № 5570–83 Деп.
5. Мантуров О.В. Паланждянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. МОПИ. Деп. в ВИНИТИ № 2384–84 Деп.
6. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1990. Т. 22. С. 167–215.
7. Петрова В.Т. Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инварианты дифференциальной группы. МОПИ. Деп. в ВИНИТИ № 8155–88 Деп.
8. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник ТГГПУ. 2010. № 3 (21).