РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 517.927

Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В.
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для оператора вида $B = I + (k+m)C_0 - mC_1$, где $C_0 y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t y(s)\,ds$, $C_1 y(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t sy(s)\,ds$, $C_0, C_1 : L_2[0,T] \to L_2[0,T]$ – операторы Чезаро, k, m – действительные константы, приведено описание области параметров (k,m), в которой оператор B является положительным. Получены эффективные оценки снизу нижней границы оператора B.
Ключевые слова: положительные операторы, сингулярные операторы, оператор Чезаро.

A. Abdullaev, E. Konopatskaya
Perm national research polytechnic university

ABOUT POSITIVITY OF THE MAIN PARTS OF SINGULAR DIFFERENTIAL OPERATORS OF SECOND ORDER

Abstract. For the operator $B = I + (k+m)C_0 - mC_1$, *where* $C_0 y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t y(s)\,ds$, $C_1 y(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t sy(s)\,ds$, $C_0, C_1 : L_2[0,T] \to L_2[0,T]$ *are the Cesaro operators and* k, m *are real constant, we present the description of the range of parameters* (k,m) *in which the operator* B *is positive. Effective lower estimates of the infimum of the operator* B *are obtained.*
Key words: positive operator, singular operator, Cesaro operator.

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = x''(t) + \frac{k}{t}x'(t) + \frac{m}{t^2}x(t),$$

где $t \in [0,T]$, k, m – действительные константы. Как известно, оператор A является левой частью однородного уравнения Эйлера [9, с. 154]. При различных значениях параметров k и m оператор A встречается в квазилинейных сингулярных дифференциальных уравнениях [5]. Кроме того, этот оператор возникает во многих математических моделях уравнений математической физики, например в уравнении Ванье-Штарка [8].

Пусть $L_2 = L_2[0,T]$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом по Лебегу функций $y:[0,T] \to R$, со скалярным произведением $(y_1, y_2) = \int\limits_0^T y_1(t)y_2(t)dt$ и нормой $\|y\|_{L_2} = \sqrt{(y,y)}$. Через $W_2^0[0,T]$ обозначим пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций, таких, что $x'' \in L_2[0,T]$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, с нормой $\|x\|_{W_2^0} = \|x''\|_{L_2}$.

В соответствии с общей теорией функционально-дифференциальных уравнений [4], под главной частью оператора A будем понимать линейный оператор B, действующий на $x''(t) = y(t)$. Этот оператор B имеет вид:

$$By(t) = y(t) + \frac{k}{t}\int\limits_0^t y(s)ds + \frac{m}{t^2}\int\limits_0^t (t-s)y(s)ds. \tag{1}$$

В работе оператор B будем рассматривать как оператор, действующий в L_2.

В предлагаемой работе получено описание области параметров (k, m), в которой оператор B является положительным. Для характеристики положительности оператора будем рассматривать функционал

$$\gamma(B) = \inf_{\|y\|=1}(By, y),$$

называемый нижней границей оператора [7]. Говоря о положительной определенности, подразумеваем выполнение неравенства $\gamma(B) > 0$. Отметим, что при $\gamma(B) > 0$ оператор является положительным, т.е. $(By, y) > 0$, при $y \neq 0$.

1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим операторы $C_0, C_1 : L_2 \to L_2$, определенные равенствами:

$$C_0 y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t y(s)ds, \qquad C_1 y(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t sy(s)ds.$$

Оператор C_0 называется оператором Чезаро [10], а C_1 – обобщенным оператором Чезаро. Этот оператор также известен как оператор Харди-Литтлвуда [6, с. 187].

Пусть I – тождественный оператор. Оператор B является суммой тождественного оператора I и линейной комбинации операторов Чезаро, т.е.

$$B = I + (k+m)C_0 - mC_1. \tag{2}$$

Воспользуемся некоторыми результатами, полученными в работах [2; 3]. При этом соответствующие утверждения [2] приведем в удобной для дальнейшего изложения форме.

Лемма 1. Операторы $C_0, C_1 : L_2 \to L_2$ являются ограниченным и $\|C_0\| = 2$, $\|C_1\| = \frac{2}{3}$.

Сопряженные с операторами C_0, C_1 операторы $C_0^*, C_1^* : L_2 \to L_2$ имеют вид:

$$C_0^* y(t) = \int_t^T \frac{y(s)}{s}ds, \qquad C_1^* y(t) = t\int_t^T \frac{y(s)}{s^2}ds.$$

Лемма 2. Для любого $y \in L_2$ справедливы равенства:

$$(C_0 y, y) = (y, C_0^* y) = \frac{1}{2}\|C_0^* y\|^2, \qquad (C_1 y, y) = (y, C_1^* y) = \frac{3}{2}\|C_1^* y\|^2.$$

Лемма 3. Для любого $y \in L_2$ справедливо неравенство $\|C_1^* y\| \le \|C_0^* y\|$.

2. Положительная определенность оператора *B*

В силу леммы 2 и представления (2) скалярное произведение (By, y) представим в следующем виде:

$$(By, y) = \|y\|^2 + \frac{k+m}{2}\|C_0^* y\|^2 - \frac{3m}{2}\|C_1^* y\|^2. \tag{3}$$

На плоскости параметров (k,m) определим следующие множества:

$$E_1 = \left\{(k,m)/\, k+m \ge 0;\, \frac{k}{2} - m \ge -\frac{9}{4}\right\},$$

$$E_2 = \left\{(k,m)/\, k+m < 0;\, m > 0;\, \frac{k}{2} - m \ge -\frac{1}{4}\right\},$$

$$E_3 = \left\{(k,m)/\, k+m < 0;\, m < 0;\, k+m \ge -\frac{1}{2}\right\}.$$

Положим $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$. На множестве E определим следующий функционал $\gamma_0(k,m)$ равенством

$$\gamma_0(k,m) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{9}\left(\frac{k}{2} - m\right), (k,m) \in E_1, \\ 1 + 4\left(\frac{k}{2} - m\right), (k,m) \in E_2, \\ 1 + 2(k+m), (k,m) \in E_3. \end{cases}$$

Теорема 1. Если параметры $(k,m) \in E$, то оператор B является положительно определенным, причем $\gamma(B) \ge \gamma_0(k,m)$.

Доказательство. Положим, что пара (k,m) принадлежит одному из дизъюнктивных множеств E_1, E_2, E_3.

Пусть $(k,m) \in E_1$. Тогда $k+m \ge 0$ и $\frac{k}{2} - m \ge -\frac{9}{4}$. В этом случае оценим снизу второе слагаемое (3), используя лемму 3. Получим:

$$(By,y) \ge \|y\|^2 + \left(\frac{k}{2} - m\right)\|C_1^* y\|^2.$$

Отсюда очевидно, что при $\frac{k}{2} - m \ge 0$ оператор B является положительным. Если же $\frac{k}{2} - m < 0$, то воспользуемся утверждением леммы 1 и получим следующую оценку:

$$(By,y) \ge \|y\|^2 + \left(\frac{k}{2} - m\right)\|C_1^*\|^2\|y\|^2 = \left(1 + \frac{4}{9}\left(\frac{k}{2} - m\right)\right)\|y\|^2 = \gamma_0(k,m)\|y\|^2.$$

Пусть $(k,m)\in E_2$. Следовательно, $k+m<0$, $m>0$ и $\frac{k}{2}-m\ge-\frac{1}{4}$. Для $-m<0$ применение леммы 3 к третьему слагаемому (3) позволяет получить следующую оценку:

$$(By,y)\ge\|y\|^2+\left(\frac{k}{2}-m\right)\|C_0^*y\|^2.$$

Так как выражения $\frac{k}{2}-m<0$, то согласно утверждению леммы 1 получим:

$$(By,y)\ge\|y\|^2+\left(\frac{k}{2}-m\right)\|C_0^*\|^2\|y\|^2=\left(1+4\left(\frac{k}{2}-m\right)\right)\|y\|^2=\gamma_0(k,m)\|y\|^2.$$

Пусть $(k,m)\in E_3$. Тогда $k+m<0, m<0, k+m\ge-\frac{1}{2}$. С учетом (2) и утверждения леммы 2 представим скалярное произведение в виде:

$$(By,y)=\|y\|^2+(k+m)(C_0y,y)-\frac{3}{2}m\|C_1^*y\|^2.$$

Для оценки последнего равенства снизу достаточно отбросить третье слагаемое и оценить второе, используя утверждение леммы 1. Получим:

$$(By,y)\ge\|y\|^2+(k+m)\|C_0^*\|\|y\|^2=(1+2(k+m))\|y\|^2=\gamma_0(k,m)\|y\|^2.$$

Переходя в полученных неравенствах к точной нижней грани по всем y, таким, что $\|y\|=1$, получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

В некоторых случаях имеют значение условия, при которых $\gamma(B)\ge1$.

Приведем соответствующее утверждение.

Теорема 2. Если $m\le0$ и $k+m\ge0$, то $\gamma(B)\ge1$.

Доказательство. Анализ выражения (3) показывает, что если $m\le0$ и $k+m\ge0$, то $(By,y)\ge\|y\|^2$. Следовательно, $\gamma(B)\ge1$.

Теорема доказана.

В качестве применения полученных утверждений рассмотрим следующую задачу Коши.

$$x''(t)+\frac{k}{t}x'(t)+\frac{m}{t^2}x(t)+(Sx)(t)=f(t), \tag{4}$$

$x(0)=0,\ x'(0)=0$,

где $t\in[0,T]$, $S:W_2^0\to L_2$ – линейный ограниченный оператор.

Теорема 3. Пусть параметры k,m таковы, что $(k,m)\in E$ и $\|S\|<\gamma_0(k,m)$. Тогда задача (4) для произвольной правой части $f\in L_2$ имеет единственное решение в пространстве W_2^0.

Доказательство. Для доказательства утверждения рассмотрим уравнение, эквивалентное задаче (4)

$$By+\widetilde{S}y=f .$$

Здесь оператор $B:L_2\to L_2$ определен равенством (1), а оператор $\widetilde{S}:L_2\to L_2$ имеет вид $\widetilde{S}=SV$, где $S:W_2^0\to L_2$, $V:L_2\to W_2^0$,

$$Vy(t)=\int_0^t (t-s)y(s)ds\cdot$$

Так как $\|Vy\|_{W_2^0}=\|y\|_{L_2}$, то $\|\widetilde{S}\|\le\|S\|$. Утверждение теоремы будет доказано, если установить справедливость неравенства $\gamma(B+\widetilde{S})>0$. Для этого воспользуемся свойством функционала $\gamma(\cdot)$ [1], а именно:

$$\gamma(B+\widetilde{S})>\gamma(B)-\|\widetilde{S}\|. \tag{5}$$

В силу (5) имеем:

$$\gamma(B+\widetilde{S})>\gamma(B)-\|\widetilde{S}\|>\gamma(B)-\|S\|.$$

Теорема доказана.

Для применения теоремы 3 к задаче вида (4) с конкретным оператором S достаточно оценить $\|S\|$. Для примера рассмотрим задачу вида (4) при $m=0$ с оператором $S=a(t)x(h(t))$, где $h:[0,T]\to[0,T]$ такая измеримая функция, что $0<h(t)\le T$. Тогда задача (4) примет вид:

$$x''(t)+\frac{k}{t}x'(t)+a(t)x(h(t))=f(t),$$

$x(0)=0,\ x'(0)=0$.

Если функция $a(\cdot)$ ограничена в существенном, т. е. $\|a\| = vrai\sup\limits_{t\in[0,T]}|a(t)| < \infty$, то норма оператора S имеет оценку $\|S\| \le \dfrac{T^{3/2}\|a\|}{\sqrt{3}}$. В общем же случае можно доказать справедливость оценки $\|S\| \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\int\limits_0^T a^2(t)h^3(t)\,dt\right)^{1/2}$. При $m=0$ из теоремы 1 следует оценка:

$$\gamma_0(k) = \gamma_0(k,m) \ge \begin{cases} 1+\dfrac{2}{9}k;\ k\ge 0, \\ 1+2k;\ -\dfrac{1}{2}\le k<0. \end{cases}$$

В частности, при $k>0$ и $\|a\|<+\infty$ неравенство $k > \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{T^{3/2}\|a\|}{\sqrt{3}} - 1\right)$ гарантирует существование единственного решения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В. About fixed sign as a steady property of linear operators // Вопросы трансформации образования. 2013. Т.1. С. 24–27.
2. Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В., Плехова Э.В. О дифференциальном операторе второго порядка с сингулярным потенциалом // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. № 6. С. 14–18.
3. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 4. С. 33–37.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений: Методы и приложения. М.: Инс–т компьютер. исслед. 2002. С. 384.
5. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Д. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы матем.: Новые достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. С. 400.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учеб. пособ. 2-е изд., стер. СПб.: Лань, 2009. С. 272.
8. Пожарский А.А. Об операторах типа Ванье-Штарка с сингулярными потенциалами // Алгебра и анализ, 2002. Т. 14. № 1. С. 158–193.
9. Симонов Н.И. Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 168.
10. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator // Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation, 1980. V. 22(45). № 1. P. 97–105.