УДК 533.72

Гермидер О.В., Попов В.Н.*, Юшканов А.А.***

** Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск)*

*** Московский государственный университет (Москва)*

ВЫЧИСЛЕНИЕ В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПОТОКА ТЕПЛА В ДЛИННОМ КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Аннотация. С использованием метода характеристик в рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о переносе тепла в длинном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе используется БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (уравнение Вильямса), а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. Построен профиль вектора потока тепла в канале, а также вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Проведен анализ полученных решений в предельном случае, когда один размеров канала много больше другого. Показано, что в этом случае полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты, полученные для плоского канала с бесконечными параллельными стенками.

Ключевые слова: течение газа в канале, модельные кинетические уравнения, кинетическое уравнение Вильямса, модели граничных условий.

O. Germider, V. Popov*, A. Yushkanov***

** Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk, Russia)*

*** Moscow State Regional University (Moscow, Russia)*

COMPUTATION OF HEAT FLOW IN A LONG, RECTANGULAR CHANNEL OF CONSTANT CROSS SECTION IN THE FRAMEWORK OF THE KINETIC APPROACH

Abstract. Using the method of characteristics in the framework of the kinetic approach, we have constructed an analytical solution to the problem of heat transfer in a long, rectangular channel of constant cross section. As the main equation describing the kinetics of the process, we use the BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) model of the kinetic Boltzmann equation with a frequency of collisions, which is proportional to the speed of molecules (Williams equation), and as a boundary condition on the walls of the channel, use is made of the diffuse reflection model. The profile of the heat flux vector in the channel is constructed and the heat flux through the cross section of the channel is calculated. The solutions obtained in the limiting case, when one of the channel dimensions is greater than the other, are analyzed. It is

shown that in this case the results of this paper are transferred to similar results obtained for a flat channel with infinite parallel walls.
Keywords: gas flow in the channel, model kinetic equations, kinetic Williams equation, model of boundary conditions.

Введение

К числу важнейших в прикладном значении задач динамики разреженного газа относятся задачи, связанные с описанием процессов переноса в каналах [1]. В общем случае решение этой задачи может быть получено с использованием численных методов [2–6]. Однако в ряде случаев задача может быть решена аналитически. Например, в случае течения разреженного газа между двумя бесконечными параллельными пластинами [7], в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, в канале цилиндрического сечения. Целью представленной работы является получение методом характеристик решения задачи о переносе тепла в канале постоянного прямоугольного сечения при наличии параллельного его стенкам градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе используется кинетическое уравнение Вильямса [8], а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. В качестве приложения в работе при различном соотношении поперечных размеров стенок канала построен профиль вектора потока тепла в канале, а также вычислен поток тепла через его поперечное сечение. Проведен анализ полученных решений в предельном случае, когда один из поперечных размеров канала много больше другого. Показано, что в этом случае полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты, полученные для канала с бесконечными параллельными стенками, представленными в [7].

Вывод основных уравнений

Рассмотрим канал прямоугольного сечения $a'\times b'$, стенки которого расположены в плоскостях $x'=\pm a'/2$ и $y'=\pm b'/2$, а ось симметрии канала совпадает с осью Oz' декартовой системы координат. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль оси Oz'. Кинетику процесса будем описывать на основе уравнения Вильямса, которое в выбранной системе координат записывается в виде [8]:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathrm{v}_y \frac{\partial f}{\partial y'} + \mathrm{v}_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f). \qquad (1)$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2 k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Параметры n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$ выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии. В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. Будем считать относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае задача допускает линеаризацию, и решение уравнения (1) в объеме газа можно записать в виде [8]

$$f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)\left[1 + 2C_z U_0 + G_T \left[\left(z - \frac{C_z}{C} \right) \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} C_z \right] \right]. \qquad (2)$$

Здесь $f(C) = n_0 (\beta/\sqrt{\pi})^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\,\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T_0$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, n_0 и T_0 – концентрация молекул и температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат, $z = z'/\gamma l_g$, G_T – безразмерный градиент температуры. Функция $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, определяемая выражением (2), является решением уравнения (1), однако она не удовлетворяет граничным условиям на стенках канала. Для того чтобы это условие выполнялось, поступим следующим образом.

Образуем на множестве функций, зависящих от модуля молекулярной скорости, скалярное произведение с весом $\rho(C)=C^5\exp(-C^2)$:

$$(f,g)=\int_0^{+\infty}\rho(C)f(C)g(C)dC. \quad (3)$$

Возьмем две ортогональные функции: $e_1(C)=1$ и $e_2(C)=C-\frac{5}{2C}$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю введенного выше скалярного произведения) и будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v})=f_\infty(\mathbf{r}',\mathbf{v})\left[1+G_TC_z\left[Z_1(x,y,c_x,c_y)+\left(C-\frac{5}{2C}\right)Z_2(x,y,c_x,c_y)\right]\right], \quad (4)$$

где $x=x'/\gamma l_g$, $y=y'/\gamma l_g$, $c_x=C_x/C$, $c_y=C_y/C$.

Подставив (4) в (1) и линеаризовав функцию $f_*(n_*,T_*,\mathbf{u}_*)$ относительно абсолютного максвеллиана, как это приведено в [8], приходим к уравнению:

$$C_z\left(C_x\frac{\partial Z_1}{\partial x}+C_y\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)+C_z\left(C-\frac{5}{2C}\right)\left(C_x\frac{\partial Z_2}{\partial x}+C_y\frac{\partial Z_2}{\partial y}\right)+$$

$$+CC_z\left(Z_1(x,y,c_x,c_y)+\left(C-\frac{5}{2C}\right)Z_2(x,y,c_x,c_y)\right)= \quad (5)$$

$$=\frac{C}{2\pi}\int C'\exp(-C'^2)k(\mathbf{C},\mathbf{C}')C_z'\left(Z_1(x,y,c_x',c_y')+\left(C'-\frac{5}{2C'}\right)Z_2(x,y,c_x',c_y')\right).$$

Здесь [8] $k(\mathbf{C},\mathbf{C}')=1+\frac{3}{2}\mathbf{C}\mathbf{C}'+\frac{1}{2}(C^2-2)(C'^2-2)$. Вычисляя интегралы, стоящие в правой части, уравнение (5) перепишем в виде

$$c_x\frac{\partial Z_1}{\partial x}+c_y\frac{\partial Z_1}{\partial y}+\left(C-\frac{5}{2C}\right)\left(c_x\frac{\partial Z_2}{\partial x}+c_y\frac{\partial Z_2}{\partial y}\right)+Z_1(x,y,c_x,c_y)+ \quad (6)$$

$$+\left(C-\frac{5}{2C}\right)Z_2(x,y,c_x,c_y)=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Z_1(x,y,c_x',c_y')\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi.$$

При вычислении интегралов мы перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей, полагая:

$$c_x=\sin\theta\cos\varphi,\quad c_y=\sin\theta\sin\varphi,\quad c_z=\cos\theta. \quad (7)$$

Здесь угол θ отсчитывается в пространстве скоростей от положительного направления оси C_z, а угол φ – от положительного направления оси C_x. С учетом ортогональности в смысле скалярного произведения (3) функций $e_1(C)=1$ и $e_2(C)=C-\dfrac{5}{2C}$ уравнение (6) расщепляется на два незацепленных уравнения:

$$c_x\frac{\partial Z_1}{\partial x}+c_y\frac{\partial Z_1}{\partial y}+Z_1(x,y,c_x,c_y)=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Z_1(x,y,c_x',c_y')\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$c_x\frac{\partial Z_2}{\partial x}+c_y\frac{\partial Z_2}{\partial y}+Z_2(x,y,c_x,c_y)=0. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях к полученным уравнениям. Учитывая, что

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v})\big|_s=f(C)\left[1+G_Tz\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\right],$$

а также принятую в работе модель граничного условия и способ линеаризации искомого решения, определяемый равенством (4), находим:

$$Z_1(x,y,c_x,c_y)\big|_s=\frac{2U_0}{G_T}+\frac{2}{3\sqrt{\pi}},$$

$$Z_2(x,y,c_x,c_y)\big|_s=1. \tag{9}$$

Так как $\int\exp(-C^2)C_z^2\left(C^2-\frac{5}{2}\right)Z_1(x,y,c_x,c_y)d^2\mathbf{C}=0$, функция $Z_1(x,y,c_x,c_y)$ не вносит вклад в поток тепла. Таким образом, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(x,y,c_x,c_y)$, определяемой уравнением (8) с граничными условиями (9). Решение (8) ищем в виде:

$$Z_2(x,y,c_x,c_y)=Z(x,y,c_x,c_y)-1. \tag{10}$$

С учетом (8) и (9) уравнение для нахождения функции $Z(x,y,c_x,c_y)$ примет вид:

$$c_x\frac{\partial Z}{\partial x}+c_y\frac{\partial Z}{\partial y}+Z(x;y;c_x;c_y)+1=0. \tag{11}$$

При этом граничные условия для функции $Z(x;y;c_x;c_y)$ на стенках канала записываются в виде

$$Z(x;y;c_x;c_y)=0,\quad x=\pm\frac{a}{2},\quad -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad xc_x<0, \tag{12}$$

$$Z(x;y;c_x;c_y)=0,\quad y=\pm\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2},\quad yc_y<0. \tag{13}$$

Построение функции распределения молекул газа

Решение уравнения (11) с граничными условиями (12), (13) ищем методом характеристик [9]. Система уравнений характеристик уравнения (11) имеет вид:

$$\frac{dx}{c_x}=\frac{dy}{c_y}=-\frac{dZ}{Z(x;y;c_x;c_y)+1}=dt. \tag{14}$$

Из (14) находим

$$x=x_0+c_xt,\quad y=y_0+c_yt,$$

$$Z(x;y;c_x;c_y)=e^{-t}-1. \tag{15}$$

Здесь, с учетом соотношений (12) и (13), значения параметра t при отражении от стенок канала имеют вид:

$$t_1=\frac{2x-a}{2c_x},\quad c_x<0 \text{ – на правой стенке } x_0=\frac{a}{2}, \tag{16}$$

$$t_2=\frac{2y-b}{2c_y},\quad c_y<0 \text{ – на верхней стенке } y_0=\frac{b}{2}, \tag{17}$$

$$t_3=\frac{2x+a}{2c_x},\quad c_x>0 \text{ – на левой стенке } x_0=-\frac{a}{2}, \tag{18}$$

$$t_4=\frac{2y+b}{2c_y},\quad c_y>0 \text{ – на нижней стенке } y_0=-\frac{b}{2}. \tag{19}$$

Соотношения (16) – (19) с учетом (6) позволяют определить характерные области интегрирования по углу φ. А именно:

– при отражении молекул от правой стенки:

$$\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x-a}+\pi\le\varphi\le\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x-a}+\pi; \tag{20}$$

– при отражении молекул от верхней стенки:

$$\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x-a}+\pi\le\varphi\le\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x+a}+2\pi\,; \qquad (21)$$

– при отражении молекул от левой стенки:

$$\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x+a}+2\pi\le\varphi\le\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x+a}+2\pi\,; \qquad (22)$$

– при отражении молекул от нижней стенки:

$$\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x+a}+2\pi\le\varphi\le\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x-a}+3\pi\,. \qquad (23)$$

Соотношения (15) – (23) полностью определяют решение уравнения (11) с граничными условиями (12), (13).

Вычисление потока тепла в канале

С учетом полученных результатов находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(x,y)$ и поток тепла через поперечное сечение канала J_Q:

$$q_z(x,y)=\pi^{-3/2}\int\exp(-C^2)C_z^2\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\left(C-\frac{5}{2C}\right)Z(x,y,\theta,\varphi)d^3\mathbf{C}=$$

$$=\pi^{-3/2}\sum_{k=1}^{4}\int_0^{+\infty}\exp(-C^2)C^3\left(C^2-\frac{5}{2}\right)^2dC\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_{M_k}^{N_k}[e^{-t_k}-1]d\varphi=$$

$$=\frac{9}{8\pi^{3/2}}\sum_{k=1}^{4}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_{M_k}^{N_k}[e^{-t_k}-1]d\varphi\,, \qquad (24)$$

$$J_Q=\frac{8}{a^2b}\int_0^{a/2}\int_0^{b/2}q_z(x,y)dxdy\,. \qquad (25)$$

Здесь, согласно (20) – (23)

$$M_1=\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x-a}+\pi\,,\quad N_1=\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x-a}+\pi\,,\quad t_1=\frac{2x-a}{2\sin\theta\cos\varphi}\,,$$

$$M_2=\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x-a}+\pi\,,\quad N_2=\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x+a}+2\pi\,,\quad t_2=\frac{2y-b}{2\sin\theta\sin\varphi}\,,$$

$$M_3=\operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x+a}+2\pi\,,\quad N_3=\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x+a}+2\pi\,,\quad t_3=\frac{2x+a}{2\sin\theta\cos\varphi}$$

$$M_4=\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x+a}+2\pi\,,\quad N_3=\operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x-a}+3\pi\,,\quad t_4=\frac{2y+b}{2\sin\theta\sin\varphi}\,.$$

Расчеты потока тепла согласно (25) выполнены с использованием пакета символьных вычислений Maple 17. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения J_Q, вычисленные согласно (25)

b'/l_g	a'/l_g				
	100	10	5	1	0,1
1000	0,0279	0,2636	0,4927	1,5907	4,1525
100	0,0278	0,2622	0,4903	1,5851	4,1448
10	0,0262	0,2482	0,4657	1,5292	4,0678
1	0,0159	0,1529	0,2934	1,0887	3,4248
0,1	0,0041	0,0407	0,0797	0,3425	1,7045

Анализ результатов

Сравним полученные выше результаты с аналогичными, полученными для канала, стенки которого образованы двумя бесконечными параллельными пластинами. В этом случае [10]:

$$q_z(x) = -\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{3}{4}\int_0^1 (1-\mu^2)\left[e^{-\frac{2x+a}{2\mu}} + e^{\frac{2x-a}{2\mu}}\right]d\mu\right], \tag{26}$$

$$J_Q = \frac{4}{a^2}\int_0^{a/2} q_z(x)dx \cdot \tag{27}$$

Результаты расчетов согласно (27) приведены в таблице 2.

Таблица 2

Значения J_Q, вычисленные согласно (27)

a'/l_g	100	10	5	1	0,1
J_Q	0,0279	0,2636	0,4927	1,5907	4,1525

Как видно из приведенных таблиц, значения потока тепла, вычисленные согласно (25) в случае, когда $b >> a$, хорошо согласуются с результатами расчетов, выполненных на основе (27). К подобному же выводу приводит и анализ предельных случаев для выражения (24).

1. Пусть $b >> a$. В этом случае

$$M_1 = \operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x-a} + \pi \approx -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$

$$N_1 = \operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x-a} + \pi \approx \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$M_2 = \operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x-a} + \pi \approx \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$N_2 = \operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$M_3 = \operatorname{arctg}\frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$N_3 = \operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \approx \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},$$

$$M_4 = \operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \approx \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},$$

$$N_4 = \operatorname{arctg}\frac{2y+b}{2x-a} + 3\pi \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Тогда

– на правой грани $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, соответственно, $c_x = \sin\theta\cos\varphi < 0$;

– на верхней грани $\frac{3\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, соответственно, $c_y = \sin\theta\sin\varphi < 0$;

– на левой грани $\frac{3\pi}{2} \le \varphi \le \frac{5\pi}{2}$, соответственно, $c_x = \sin\theta\cos\varphi > 0$;

– на нижней грани $\frac{5\pi}{2} \le \varphi \le \frac{5\pi}{2}$, соответственно, $c_y = \sin\theta\sin\varphi > 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае полученные выше границы интегрирования по азимутальному углу φ приводят к результатам, согласующимся с условиями (16–19). С учетом сказанного вектор, потока тепла при этом запишется в виде:

$$q_z(x,y) = -\frac{3}{2\pi^{1/2}}\left[1-\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[e^{-\frac{2x-a}{2\sin\theta\cos\varphi}}+e^{\frac{2x+a}{2\sin\theta\cos\varphi}}\right]d\varphi\right.$$

2. Пусть $a >> b$. В этом случае

$$M_1 = \text{arctg}\frac{2y+b}{2x-a}+\pi \approx \pi, \qquad N_1 = \text{arctg}\frac{2y-b}{2x-a}+\pi \approx \pi,$$

$$M_2 = \text{arctg}\frac{2y-b}{2x-a}+\pi \approx \pi, \qquad N_2 = \text{arctg}\frac{2y-b}{2x+a}+2\pi \approx 2\pi,$$

$$M_3 = \text{arctg}\frac{2y-b}{2x+a}+2\pi \approx 2\pi, \quad N_3 = \text{arctg}\frac{2y+b}{2x+a}+2\pi \approx 2\pi,$$

$$M_4 = \text{arctg}\frac{2y+b}{2x+a}+2\pi \approx 2\pi, \quad N_4 = \text{arctg}\frac{2y+b}{2x-a}+3\pi \approx 3\pi.$$

Тогда

– на правой грани $\pi \le \varphi \le \pi$, соответственно, $c_x = \sin\theta\cos\varphi < 0$;

– на верхней грани $\pi \le \varphi \le 2\pi$, соответственно, $c_y = \sin\theta\sin\varphi < 0$;

– на левой грани $2\pi \le \varphi \le 2\pi$, соответственно, $c_x = \sin\theta\cos\varphi > 0$;

– на нижней грани $2\pi \le \varphi \le 3\pi$, соответственно, $c_y = \sin\theta\sin\varphi > 0$.

Таким образом, и в этом случае границы интегрирования по азимутальному углу φ приводят к результатам, согласующимся с условиями (16) – (19). При этом

$$q_z(x,y) = -\frac{3}{2\pi^{1/2}}\left[1-\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left[e^{-\frac{2y-b}{2\sin\theta\sin\varphi}}+e^{\frac{2y+b}{2\sin\theta\sin\varphi}}\right]d\varphi\right]$$

Легко видеть, что в обоих предельных случаях полученные выражения для вектора потока тепла переходят в выражение (26).

Заключение

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла в канале постоянного прямоугольного сечения. Для различных размеров стенок канала построен профиль вектора потока тепла и вычислены значения потока тепла через поперечное сечение канала. Проведено сравнение с аналогичными асимптотическими выражениями, полученными для случая, когда один из размеров канала много больше другого. Показано, что в этом случае значения потока тепла хорошо согласуются с аналогичными результатами, полученными для каналов, стенки которых образованы двумя бесконечными параллельными пластинами.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (Проект № 3628).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
2. Loyalka S.K., Storvik T.S., Park H.S. Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channels in the molecular and transition flow regimes // J. Vac. Sci. Technol. A. 1976. V. 13. № 5. P. 1188–1192.
3. Sharipov F.M. Rarefied gas flow through a long rectangular channel // J. Vac. Sci. Technol. A. 1999. V. 17. № 5. P. 3062–3066.
4. Graur I., Sharipov F. Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2008. V. 27. № 3. P. 335–345.
5. Шахов Е.М. Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 7. С. 1107–1116.
6. Титарев В.А., Шахов Е.М. Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 7, С. 1285–1302.
7. Попов В., Тестова И., Юшканов А. Математическое моделирование течений газа в каналах: моногр. Germany, Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic publishing. 2012. 116 с.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: моногр. М.: Московский государственный областной университет, 2004. 271 с.
9. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой прямоугольной проволоки из металла // ЖЭТФ, 2006. Т. 129, Вып. 5. С. 938–944.
10. Гулакова С.В., Попов В.Н. Вычисление потока тепла в задаче о тепловом крипе на основе уравнения Вильямса // Физический вестник Института естественных наук и биомедицины. Сб. науч. трудов. Архангельск: ФГАОУ ВПО Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова. 2013. Вып. 12. С. 25–29.