РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 517.57

Алгазин О.Д., Копаев А.В.*, Попов В.С.*, Латышев А.В.***

**Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

***Московский государственный областной университет*

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Аннотация. На примерах решения краевых задач для уравнения Лапласа (задачи Дирихле для полупространства и смешанной краевой задачи Дирихле – Неймана для бесконечного слоя) рассмотрены применения преобразования Фурье. Приведены решения задач фильтрации под точечной плотиной с использованием полученных формул.

Ключевые слова: преобразование Фурье, уравнение Лапласа, краевые задачи, аппроксимативная единица, теория фильтрации.

O. Algazin, A. Kopaev*, V. Popov*, A. Latyshev***

** Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russia)*

***Moscow State Regional University (Moscow, Russia)*

APPLIED ASPECTS OF TEACHING THE TOPIC "FOURIER TRANSFORM" IN THE SUBJECT "EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS"

Abstract. Using the examples of solving boundary-value problems for the Laplace equation (the Dirichlet problem for the half-space and the mixed boundary-value Dirichlet – Neumann problem for an infinite layer), we consider the application of the Fourier transform. We present the solutions to the filtration problems of seepage flows below the dam using the above formulas.

Keywords: Fourier transform, Laplace equation, boundary–value problems, approximate identity, theory of filtration.

Введение

Студенты изучают интегральное преобразование Фурье в рамках дисциплины «Уравнения математической физики». Свойства одномерного преобразования Фурье и его простейшие применения к решению уравнений математической физики описаны в [1]. Между тем, основным методом решения краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами для полупространства является многомерное преобразование Фурье [2], которому и посвящена настоящая работа.

Мы ограничились рассмотрением краевых задач только для уравнения Лапласа, так как гармонические функции двух и трех переменных описывают многие стационарные процессы, происходящие в подземной гидродинамике, электростатике, магнитостатике и др. [3]. Рассмотрены первая краевая задача для полупространства n-мерного пространства, а также смешанная краевая задача для бесконечного слоя в n-мерном пространстве. Получена новая форма решения смешанной краевой задачи для бесконечного слоя в виде интеграла, ядро которого содержит только элементарные функции в случае пространства четной размерности, а в случае пространства нечетной размерности – еще и функции Бесселя. Практическое применение полученных результатов проиллюстрировано несколькими примерами построения фильтрационных течений под плотиной.

Материал статьи может быть полезен преподавателям и использован ими для дополнительных занятий со студентами, а также студентам при написании курсовых работ по дисциплине «Уравнения математической физики».

Обозначения

Введем следующие обозначения:

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\quad (x,y)=(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1},\quad y\in\mathbb{R};$$

$$|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2};\ xt=x_1t_1+\ldots+x_nt_n;\quad dx=dx_1\cdots dx_n;$$

$\Delta u(x,y)=\Delta u=u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n}+u_{yy}$ – оператор Лапласа;

$$F(t)=\mathcal{F}\left[f\right](t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ixt}dx$$

– преобразование Фурье суммируемой функции $f(x)$. Если суммируемая по x функция $f(x,y)$ зависит от переменных x и y, то ее преобразование Фурье по x будем обозначать

$$\mathcal{F}_x\left[f\right](t,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)e^{ixt}dx\ .$$

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье суммируемой функции $F(t)$:

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[F\right](x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t)e^{-ixt}dt$$

и суммируемой по t функции $F(t,y)$:

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left[F\right](x,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t,y)e^{-ixt}dt.$$

Определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста приведены в [4].

Задача Дирихле для полупространства. Интеграл Пуассона

В задаче Дирихле требуется найти ограниченное при $y\to+\infty$ решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y)=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<y,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению Лапласа, обозначив

$$U(t,y)=\mathcal{F}_x\left[u\right](t,y);\ \ \Phi(t)=\mathcal{F}\left[\varphi\right](t).$$

Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t\in\mathbb{R}^n$:

$$-\left|t\right|^2 U(t,y)+U_{yy}(t,y)=0;$$
$$U(t,0)=\Phi(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$U(t,y)=c_1(t)e^{-|t|y}+c_2(t)e^{|t|y}.$$

Полагая $c_2(t)=0,$ получаем решение краевой задачи

$$U(t,y)=\Phi(t)e^{-|t|y}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим решение задачи Дирихле в виде свертки (если эта свертка существует):

$$u(x,y)=\varphi(x)*P_n(x,y), \tag{1}$$

где $P_n(x,y)$ – ядро Пуассона,

$$P_n(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-|t|y}e^{-itx}dt.$$

Для вычисления этого интеграла перейдем к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^n$ [4; 5], обозначив $|x|=r,$ $|t|=\rho,$ σ_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$:

$$P_n(x,y)=\frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty e^{-\rho y}\rho^{n/2}d\rho\int\limits_0^\pi e^{-ir\rho\cos\theta}\sin^{n-2}\theta d\theta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}r^{n/2-1}}\int\limits_0^\infty e^{-\rho y}\rho^{n/2}J_{n/2-1}(r\rho)d\rho,$$

где $J_{n/2-1}(r\rho)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\nu=n/2-1.$ Эта формула справедлива и при $n=1,$ что легко проверить. Использовав для последнего интеграла формулу (6. 623. 2) из [6, с. 726], получим:

$$P_n(x,y)=\frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}.$$

Легко проверить, что ядро Пуассона обладает следующими свойствами:

1) $P_n(x,y)>0;$

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^n}P_n(x,y)dx=1;$

3) для $\forall\delta > 0$ $\lim\limits_{y\to+0}\sup\limits_{|x|\geq\delta} P_n\left(x, y\right) = 0.$

Эти свойства означают, что $P_n(x, y)$ является *аппроксимативной единицей*, или δ–образной системой функций от x (с параметром *y*), и при $y \to +0$ $P_n(x, y)$ слабо сходится к δ-функции $\delta(x)$.

Если $\varphi(x)$ является ограниченной кусочно-непрерывной функцией, то свертка (1) существует и может быть записана в виде интеграла, называемого *интегралом Пуассона*:

$$u(x, y) = \frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(t) y}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt. \qquad (2)$$

Ядро Пуассона является аппроксимативной единицей, следовательно,

$$\lim_{y\to+0} u(x, y) = \varphi(x)$$

в точках непрерывности $\varphi(x)$. Это равенство означает, что интеграл Пуассона представляет классическое решение задачи Дирихле. Для обобщенных функций медленного роста $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ при условии существования свертки (1) функция

$$u(x, y) = \varphi(x) * P_n(x, y)$$

является обобщенным решением задачи Дирихле в пространстве $\mathcal{S}'$:

$$\lim_{y\to+0} u(x, y) = \varphi(x).$$

Например, если $\varphi(x) = \delta(x)$, то решением задачи Дирихле будет ядро Пуассона:

$$u(x, y) = \delta(x) * P_n(x, y) = P_n(x, y);$$

$$\lim_{y\to+0} P_n(x, y) = \delta(x).$$

Для случая $n = 1$ интеграл Пуассона имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Свойства интеграла Пуассона для $n=1$ подробно описаны в [7], для $n>1$ — в [8].

В качестве примера применения формулы Пуассона рассмотрим решение известной задачи теории фильтрации об описании течения под точечной плотиной. Фильтрация жидкости (воды) вызывается разностью давления на верхнем ($P_1=-\varphi_1$) и нижнем ($P_2=-\varphi_2$) бьефах (рис. 1). Поле скоростей фильтрующейся жидкости описывается вектором $\vec{v}=k\,\overrightarrow{grad\,u}$, где коэффициент k характеризует проницаемость среды (грунта) [3; 9; 10]:

$$\Delta u(x,y)=0,\ -\infty<x<\infty,\ y>0;$$

$$u(x,0)=\varphi_1,\ x<0,\ u(x,0)=\varphi_2,\ x>0.$$

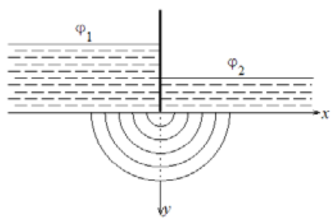

Рис. 1. Фильтрационное течение под точечной плотиной.

Решение задачи получают с помощью интеграла Пуассона:

$$u(x,y)=\frac{\varphi_1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt+\frac{\varphi_2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt=$$

$$=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\ .$$

Сопряженная гармоническая функция (с точностью до постоянного слагаемого)

$$v(x,y)=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}\ln(x^2+y^2),$$

уравнения линий тока $v(x,y)=\mathrm{const}$ (см. рис. 1).

Заметим, что если определяющая плотность интеграла Пуассона (2) обладает свойством $\varphi(-t_1,t_2,\ \dots,\ t_n)=\varphi(t_1,t_2,\ \dots,\ t_n)$, то интеграл Пуассона удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Если определяющая плотность интеграла Пуассона (2) обладает свойством $\varphi(-t_1, t_2, \ldots, t_n) = -\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, то интеграл Пуассона удовлетворяет условию:

$$u(0, x_2, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Сделанное замечание позволяет описать фильтрационное течение под точечной плотиной (в точке $x = a > 0$), область фильтрации под которой ограничена вертикальной непроницаемой преградой $x = 0$ (рис. 2).

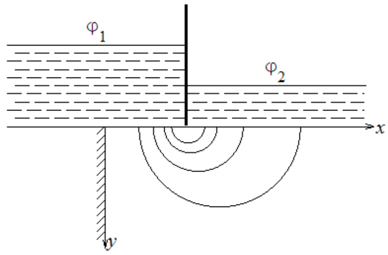

Рис. 2. Фильтрационное течение под точечной плотиной при наличии вертикальной непроницаемой преграды.

Для этого достаточно решить задачу Дирихле с краевым условием

$$u(x,0) = \begin{cases} \varphi_1, & \text{если } |x| < a; \\ \varphi_2, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

В результате получаем

$$u(x,y) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} + \varphi_2.$$

Сопряженная гармоническая функция

$$v(x,y) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2},$$

уравнения линий тока $v(x,y) = \text{const}$ (см. рис. 2).

Отметим, что, с одной стороны, мы решали задачу Дирихле, а с другой – можно считать, что мы решали смешанную краевую задачу по краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1,\text{ если }0<x<a;$$
$$u(x,0)=\varphi_2,\text{ если }x>a;$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0.$$

Указанное обстоятельство демонстрирует актуальность смешанной краевой задачи, в которой на одной части границы задана искомая функция, а на другой – ее нормальная производная.

Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя.

Эта задача рассмотрена в статье [11]. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y)=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<y<a,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n;$$
$$u_y(x,a)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению Лапласа, обозначив

$$U(t,y)=\mathcal{F}_x\left[u\right](t,y);\ \ \Phi(t)=\mathcal{F}[\varphi](t);\ \ \Psi(t)=\mathcal{F}[\psi](t).$$

Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t\in\mathbb{R}^n$:

$$-|t|^2U(t,y)+U_{yy}(t,y)=0;$$
$$U(t,0)=\Phi(t);\ \ U_y(t,a)=\Psi(t).$$

Решением этой краевой задачи будет функция

$$U(t,y)=\Phi(t)\frac{\operatorname{ch}\left(|t|(a-y)\right)}{\operatorname{ch}(a\,|\,t\,|)}+\Psi(t)\frac{\operatorname{sh}\left(|t|\,y\right)}{|t|\operatorname{ch}\left(a|t|\right)}\ .$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим решение исходной смешанной краевой задачи в виде свертки:

$$u(x,y)=\varphi(x)*K_n(x,y)+\psi(x)*L_n(x,y),\tag{3}$$

где для ядер введены обозначения

$$K_n(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[k_n\right](x,y),\ k_n(|t|,y)=\frac{\operatorname{ch}\left(|t|(a-y)\right)}{\operatorname{ch}(a\,|\,t\,|)},\quad t\in\mathbb{R}^n;$$

$$L_n(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[l_n\right](x,y),\ \ l_n(|t|,y)=\frac{\operatorname{sh}\left(|t|\,y\right)}{|t|\operatorname{ch}\left(a|t|\right)}\ ,\ t\in\mathbb{R}^n.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y}l_n\left(|t|,y\right)=k_n\left(|t|,a-y\right),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial y}L_n(x,y)=K_n(x,a-y)$$

и $\partial L_n(x,y)/\partial y$ ведет себя при $y\to a-0$ так же, как ядро $K_n(x,y)$ при $y\to+0.$

Легко видеть, что $k_n\left(|t|,y\right)$ и $l_n\left(|t|,y\right)$ – бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие функции от $t\in\mathbb{R}^n$, т. е. принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [5], но они еще и сферически симметричные, поэтому при вычислении обратного преобразования Фурье можно перейти к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $|x|=r$, $|t|=\rho$, σ_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Для любой сферически симметричной функции $h_n\left(|t|\right)=h_n(\rho)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$H_n\left(|x|\right)=H_n(r)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[h_n\right](x)\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}h_n\left(|t|\right)e^{-i<x,t>}dt=$$

$$=\frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty h_n(\rho)\rho^{n/2}d\rho\int\limits_0^\pi e^{-ir\rho\cos\theta}\sin^{n-2}\theta d\theta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}r^{n/2-1}}\int\limits_0^\infty h_n(\rho)\rho^{n/2}J_{n/2-1}(r\rho)d\rho,$$

где $J_{n/2-1}(r\rho)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\nu=n/2-1$ [4; 5].

Эта формула справедлива и при $n=1,$ что легко проверить.

Дифференцируя предыдущее равенство по r и учитывая формулу из теории бесселевых функций [12]

$$\frac{\nu J_\nu(r\rho)}{r\rho} - J'_\nu(r\rho) = J_{\nu+1}(r\rho),$$

получаем рекуррентную формулу:

$$H_{n+2}(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}H_n(r).$$

При использовании этой формулы нам нужно знать ядра $K_n(x,y)$ и $L_n(x,y)$ только для $n=1$ и $n=2$.

Преобразование Фурье переводит пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя, ядра $K_n(x,y) = K_n^*\left(|x|, y\right)$ и $L_n(x,y) = L_n^*\left(|x|, y\right)$ $\forall y \in (0,a)$ являются сферически симметричными функциями от x из пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Свертка (3) существует для любых обобщенных функций медленного роста $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и имеет вид

$$\varphi(x) * K_n(x,y) + \psi(x) * L_n(x,y) =$$
$$= \left(\varphi(t),\ K_n(x-t,y)\right) + \left(\psi(t),\ L_n(x-t,y)\right).$$

Когда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции полиномиального роста, свертка (3) выражается суммой интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) K_n(x-t,y)\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) L_n(x-t,y)\,dt.$$

Легко проверить выполнимость следующих свойств в области D:

1) $K_n(x,y) > 0;$

2) $\int_{\mathbb{R}^n} K_n(x,y)\,dx = 1;$

3) для $\forall \delta > 0$ $\lim\limits_{y\to+0} \sup\limits_{|x|\geq\delta} K_n(x,y) = 0.$

Эти свойства означают, что $K_n(x,y)$ является *аппроксимативной единицей,* или δ–образной системой функций от x (с параметром y), и при $y \to +0$ $K_n(x,y)$ слабо сходится к δ-функции $\delta(x)$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} L_n(x,y) = K_n(x, a-y),$$

то $\partial L_n(x,y)/\partial y$ является аппроксимативной единицей при $y \to a-0$.

Если $\varphi(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то формула (1) позволяет получить обобщенное решение задачи:

$$\lim_{y\to+0} u(x,y)=\varphi(x);$$

$$\lim_{y\to a-0} u_y(x,y)=\psi(x).$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – обычные функции полиномиального роста, то в каждой точке непрерывности

$$\lim_{y\to+0} u(x,y)=\varphi(x);\ \lim_{y\to a-0} u_y(x,y)=\psi(x).$$

В случае двух переменных, учитывая четность функций по t $\left(k_1(|t|,y)=k_1(t,y),\ l_1(|t|,y)=l_1(t,y)\right)$, находим обратное преобразование Фурье по таблицам [13, с.187, формула (7.112); с. 188, формула (7.116)]:

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left[k_1\right](x,y)=\frac{1}{a}\frac{\sin\left(\pi y/2a\right)\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi x/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}=K_1(x,y);$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left[l_1\right](x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)+\sin\left(\pi y/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)-\sin\left(\pi y/2a\right)}\right)=L_1(x,y).$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи выражается интегральной формулой:

$$u(x,y)=\frac{1}{a}\sin\left(\pi y/2a\right)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t\right)\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)+\sin\left(\pi y/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)-\sin\left(\pi y/2a\right)}\right)dt\ .$$

Решение этой задачи известно, но ядро является суммой бесконечного ряда [14, с. 426, формула (7.2.2–8)].

Для трех переменных ядра не могут быть определены через элементарные функции:

$$K_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0\left(\rho|x|\right)d\rho;$$

$$L_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0\left(\rho|x|\right)d\rho.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи выражается интегральной формулой

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)dt\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0\left(\rho|x-t|\right)d\rho\ +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(t)dt\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0\left(\rho|x-t|\right)d\rho\ .$$

И в этом случае решение рассматриваемой задачи известно и ядро является суммой бесконечного ряда [14, с. 479, формула (8.2.2–7)].

В качестве примера применения формулы для двух переменных рассмотрим решение известной задачи теории фильтрации об описании течения под точечной плотиной с водоупором:

$$\Delta u(x,y)=0,\ -\infty<x<\infty\ ,\ 0<y<a;$$

$$u(x,0)=\varphi_1,\ x<0;\quad u(x,0)=\varphi_2,\ x>0;$$

$$u_y(x,a)=0,\ -\infty<x<\infty.$$

Решением этой задачи будет функция:

$$u(x,y)=\frac{\varphi_1}{a}\sin\left(\pi y/2a\right)\int_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}dt+$$

$$+\frac{\varphi_2}{a}\sin\left(\pi y/2a\right)\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}dt=$$

$$=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\pi x/2a\right)}{\sin\left(\pi y/2a\right)}\right)+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

Сопряженная гармоническая функция

$$v(x,y)=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)+\cos\left(\pi y/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)-\cos\left(\pi y/2a\right)}\right),$$

уравнения линий тока $v(x,y)=\mathrm{const}$ (рис. 3).

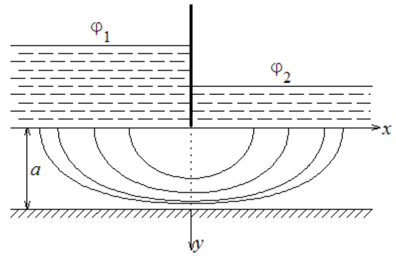

Рис. 3. Фильтрационное течение под точечной плотиной с водоупором.

В заключение отметим, что преобразование Фурье позволяет решать и другие краевые задачи для уравнения Лапласа (например, задачу Дирихле для четверти пространства, для бесконечного слоя и др.).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 227 с. (Математика в техническом университете, вып. XI).
2. Комеч А.И. Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. 1988. Т. 31. С. 127–261.
3. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. С. 320.
5. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. С. 360.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. С. 1108.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. С. 716.
8. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. С. 336.
9. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.:, Высшая школа, 1972. С. 367.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977, С. 664.
11. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки». 2015. № 1. С. 3–13.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:, Изд–во Моск. ун-та, 1999. С. 798.

13. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. С. 524.
14. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. С. 576.