

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.774.8+519.176

Птицына И.В.

Московский государственный областной университет

СЕТИ ШТЕЙНЕРА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ: СЛУЧАЙ ПРЯМОЙ И ПАРЫ ТОЧЕК

Аннотация. Статья посвящена задаче построения минимальных сетей, связывающих дискретное множество точек и гладкую кривую или поверхность в евклидовом пространстве и является одним из обобщений проблемы Штейнера. В случае двух точек и прямой на евклидовой плоскости описаны множества расположений точек для всех типов абсолютно минимальных графов, а также минимальных остовных графов и графов Штейнера; вычислены длины всех видов минимальных графов и отношения длин графов Штейнера и длин минимальных остовных графов:

множество таких отношений совпадает с множеством точек полуинтервала $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2 \right)$.

В частности, показано, что отношение Штейнера для прямой и пары точек

равно $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ключевые слова: проблема Штейнера, остовный граф, граф Штейнера, точка Штейнера, отношение Штейнера.

Ptitsyna I.V.

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

STEINER NETWORKS WITH A MOVING BOUNDARY: THE CASE OF A STRAIGHT LINE AND A PAIR OF POINTS

Abstract. The paper is devoted to the problem of constructing minimal networks spanning a discrete set of points and a smooth curve, or a surface in Euclidean space. The problem represents one of the generalizations of the Steiner problem. In the case of two points and a line in the Euclidean plane, we describe sets of points for all types of absolutely

minimal graphs, as well as minimal spanning graphs and Steiner graphs; the lengths of all kinds of minimal graphs and ratio of the lengths of Steiner graphs to the lengths of the minimal spanning graphs are calculated: a set of such ratios coincides with the set

of points in the interval $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2 \right)$. In particular, it is shown that the Steiner ratio

for a straight line and a pair of points is equal to $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Keywords: Steiner problem, spanning graph, Steiner graph, Steiner point, Steiner ratio.

Введение

Проблема Штейнера имеет множество различных постановок. Одной из них является поиск на евклидовой плоскости графа с суммарной наименьшей длиной ребер, соединяющего конечный набор точек. Обобщением данной проблемы является поиск графов (сетей), соединяющих не только конечные, но и счетные множества точек в евклидовых, а также в произвольных метрических пространствах, причем как глобально минимальных, так и локально минимальных сетей различной топологии. Одним из наиболее полных обзоров по проблеме Штейнера является монография А.О. Иванова и А.А. Тужилина [1].

Другим направлением обобщения проблемы Штейнера является поиск сетей, соединяющих произвольные, не обязательно дискретные, подмножества евклидова пространства. В [2] данная задача решается для прямой и пары точек в трехмерном евклидовом пространстве, причем рассматривается принципиально не плоский случай. Для прямой и пары точек на евклидовой плоскости в [2] дается ссылка на работу G.X. Chen, The shortest path between two points with a (linear) constraint (in Chinese), Knowledge and Appl. Math., Vol. 4 (1980), pp. 1–8. Данная работа, однако, недоступна. Кроме того, в [2] не рассматривается вопрос об отношении Штейнера.

Цель нашей статьи – дать полное описание минимальных сетей на плоскости, соединяющих прямую и пару точек, вычислить их длины и отношение Штейнера, а в случае минимальных остовных графов, соединяющих кривую (поверхность) и конечный набор точек, предложить алгоритм их построения.

1. Постановка задачи

Пусть γ – гладкая кривая на плоскости, M – конечное множество точек этой плоскости, не принадлежащих кривой γ . Наша задача – построить граф G с суммарной наименьшей длиной ребер, соединяющий M и γ . Поскольку положение вершин искомого графа, принадлежащих кривой γ , заранее не определено, то такие графы будем называть графами с подвижными вершинами. Подвижными вершинами будем называть построенные вершины, принадлежащие кривой γ . Неподвижными вершинами будем называть вершины множества M .

Мы будем рассматривать следующие типы искомым графов.

Если граф G не имеет других вершин вне кривой γ , кроме вершин множества M , то такой граф будем называть остовным графом между M и γ и обозначать $G_{sp;M,\gamma}$.

Если остовный граф имеет минимальную длину среди всех остовных графов между M и γ , то такой граф не имеет циклов (в противном случае его длину можно уменьшить), и мы будем называть его минимальным остовным графом между M и γ . В соответствии с традиционными обозначениями теории сетей Штейнера будем обозначать такой граф $MST_{M,\gamma}$.

Если множество вершин графа G , не принадлежащих кривой γ , содержит заданное множество M и имеет наименьшую возможную длину среди всех графов, множество вершин которых содержит M , то такой граф будем называть абсолютно минимальным графом между M и γ , или минимальным графом Штейнера, и обозначать $SMT_{M,\gamma}$.

Вершины минимального графа Штейнера $SMT_{M,\gamma}$, не принадлежащие множеству M и кривой γ , будем называть точками Штейнера. Это третий вид вершин искомого графа. Известно, что если точка Штейнера имеет степень 3, то ребра графа образуют в этой точке углы 120° ; если же точка Штейнера имеет степень 2, то ребра графа образуют в этой точке угол, не меньший чем 120° . Среди вершин минимального графа Штейнера, отличных от точек множества M , не может быть точек Штейнера степени 2, так как при

выбрасывании таких вершин с входящими в них ребрами суммарная длина графа уменьшается.

Если для любой точки T графа G и для любой ее окрестности $O(T)$, не содержащей вершин графа, кроме случая, когда сама точка T является вершиной, граф $G \cap \overline{O(T)}$ является абсолютно минимальным деревом с множеством неподвижных вершин $\Gamma = G \cap \partial O(T)$, то граф G будем называть графом Штейнера (или локально минимальным графом) между M и γ и обозначать $G_{St;M,\gamma}$. В данной работе мы рассматриваем естественную топологию на плоскости. $\overline{O(T)}$ обозначает замыкание окрестности $O(T)$.

Для всех типов графов их ребра являются отрезками прямых.

Единственным ограничением на множество $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ и кривую γ является условие, что для каждой вершины M_i из множества отрезков $M_i H_{i_\alpha}$, $H_{i_\alpha} \in \gamma$, которыми можно соединить точку M_i с кривой γ можно выбрать отрезок наименьшей длины, который мы обозначаем $M_i H_i$. Если таких отрезков несколько, то возьмем любой из них. Также считаем кривую γ связной.

Нашей задачей также является сравнение длин графов $SMT_{M,\gamma}$ и $MST_{M,\gamma}$, $G_{St;M,\gamma}$ и $MST_{M,\gamma}$, а именно вычисление отношения Штейнера

$$\frac{\rho(SMT_{M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} \text{ и отношения } \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}.$$

2. Алгоритм построения минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$

Рассмотрим полный граф G_f с вершинами $M = \{M_1, \dots, M_n\}$. Если некоторые ребра графа G_f пересекаются с кривой γ , то разобьем множество вершин M на такое наименьшее число m , $m \leq n$, подмножеств, что ребра соответствующих им полных графов G_{f_m} не пересекаются с кривой γ . Рассмотрим тогда объединение полных графов $\bigcup_m G_{f_m}$.

Для каждой вершины M_i выберем отрезок $M_i H_i$, $H_i \in \gamma$, наименьшей длины среди всех отрезков $M_i H_{i_a}$, которыми можно соединить точку M_i с кривой γ . Точки H_i соединим дугами $H_i H_j$ кривой γ .

Рассмотрим граф $(\cup_m G_{f_m}) \cup (\cup_i M_i H_i) \cup (\cup_{i,j} H_i H_j)$, который является объединением множества полных графов G_{f_m} , множества всех отрезков $M_i H_i$ и множества всех дуг $H_i H_j$.

В качестве весов построенного графа припишем всем ребрам их длины, кроме ребер $H_i H_j$, которым припишем вес 0.

Применим любой из алгоритмов построения минимального остовного дерева к полученному графу, например, алгоритм Краскала или алгоритм Прима. После выбрасывания, если необходимо, некоторого количества ребер в соответствии с выбранными алгоритмами получим минимальное остовное дерево G_T .

Удалим из G_T все ребра $H_i H_j$. Получим искомый минимальный остовный граф $MST_{M,\gamma}$.

Заметим, что, несмотря на то что G_T – связный граф, граф $MST_{M,\gamma} = G_T \setminus (\cup_{i,j} H_i H_j)$ может состоять из нескольких связных компонент G_k , $k \leq n$, каждая из которых является минимальным остовным деревом для некоторого подмножества множества вершин M и некоторой точки $H_k \in \gamma$ (корня k -го дерева G_k). Заметим также, что графов $MST_{M,\gamma}$ может оказаться несколько.

Данный алгоритм применим и в случае, когда вершины M_i заданы в пространстве. Вместо кривой γ можно рассматривать произвольную гладкую поверхность. Также объемлющее пространство (в нашем случае просто плоскость) может не быть односвязным. В этом случае ребра $M_i M_j$ и $M_i H_i$ могут не быть отрезками.

Если γ – прямая на плоскости, то $M_i H_i$ – перпендикуляры, опущенные из вершин M_i на прямую γ .

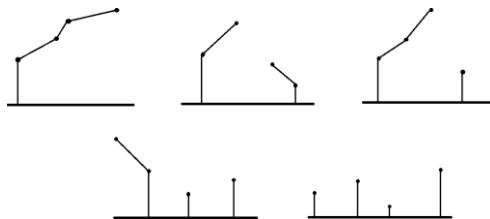


Рис. 1. Примеры минимальных остовных графов для четырех точек ($n = 4$), лежащих по одну сторону от прямой.

3. О графах Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ и остовных графах $G_{sp;M,\gamma}$

Для данного множества $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ неподвижных граничных вершин и данной кривой γ могут быть построены как различные графы Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ между M и γ , так и различные остовные (в том числе минимальные остовные $MST_{M,\gamma}$) графы $G_{sp;M,\gamma}$ между M и γ . Абсолютно минимальных графов $SMT_{M,\gamma}$ между M и γ тоже может быть несколько. Некоторые из графов могут оказаться связными, а некоторые – несвязными.

Граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$, как и остовный граф $G_{sp;M,\gamma}$, может содержать циклы. Связные компоненты и графа Штейнера, и остовного графа могут иметь более одной подвижной вершины. Абсолютно минимальный граф $SMT_{M,\gamma}$, как и минимальный остовный граф $MST_{M,\gamma}$, циклов не содержит, связные компоненты этих графов содержат ровно по одной подвижной вершине.

Абсолютно минимальный граф $SMT_{M,\gamma}$ может являться графом Штейнера без циклов (деревом Штейнера) или минимальным остовным деревом, или объединением деревьев Штейнера и минимальных остовных деревьев для некоторых подмножеств множества неподвижных вершин M и кривой γ .

Пусть p – число связных компонент абсолютно минимального графа $SMT_{M,\gamma}$ между $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ и $\gamma: SMT_{M,\gamma} = \bigcup_p G_p$, $p \leq n$.

Пусть k – число связных компонент минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$ между $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ и $\gamma: MST_{M,\gamma} = \bigcup_k G_k$, $k \leq n$.

Множество из p подвижных вершин какого-либо абсолютно минимального графа между M и γ в общем случае не совпадает со множеством из k подвижных вершин какого-либо минимального остовного графа между M и γ .

Возможны различные случаи: $p > k$, $p < k$ и $p = k$ (рисунок 2).

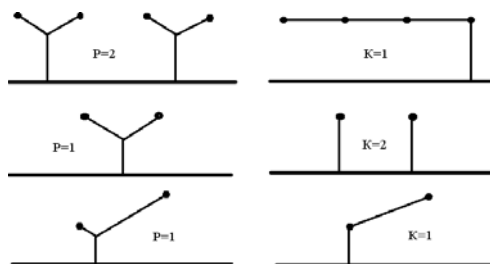


Рис. 2. Примеры различного количества связных компонент $SMT_{M,\gamma}$ и $MST_{M,\gamma}$.

Направления ребер, выходящих из подвижных вершин минимального графа Штейнера и минимального остовного графа, не произвольны. В частности, если γ – прямая на плоскости, то такие ребра ей перпендикулярны.

Все ребра, выходящие из подвижных вершин минимального остовного графа, соединяют подвижные вершины с неподвижными. Ребра, выходящие из подвижных вершин графа Штейнера, могут соединять подвижные вершины с точками Штейнера степени 3. Положение таких точек Штейнера также предстоит найти.

4. Решение задачи для прямой и двух неподвижных вершин

Рассмотрим задачу построения минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$ и абсолютно минимального графа $SMT_{M,\gamma}$ для прямой γ

и множества M , состоящего всего из двух точек M_1, M_2 , расположенных по одну сторону от прямой γ .

4.1 Минимальные остовные графы $MST_{M,\gamma}$

Пусть неподвижная вершина M_1 фиксирована. Для каждого расположения второй неподвижной вершины M_2 на плоскости найдем вид и длину минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$.

Пусть H_1, H_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точек M_1, M_2 на прямую γ . Будем считать, что $H_1 \neq H_2$, так как в противном случае минимальный остовный граф является отрезком, перпендикулярным прямой γ . Возможны три вида остовных графов между M и γ : $G_1 = M_1H_1 \cup M_1M_2$, $G_2 = M_2H_2 \cup M_1M_2$, $G_3 = M_1H_1 \cup M_2H_2$ (рисунок 3). Графы G_1, G_2 являются деревьями, а граф G_3 – объединением двух деревьев.

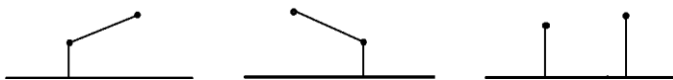


Рис. 3. Три вида остовных графов между $M = \{M_1, M_2\}$ и прямой.

Обозначим их длины через $\rho(G_1), \rho(G_2), \rho(G_3)$ соответственно и выясним, при каком расположении точек M_1, M_2 относительно друг друга следует выбрать G_1, G_2 или G_3 в качестве минимального остовного графа.

Отметим, что для вершин M_1, M_2 , не лежащих на одном перпендикуляре к прямой γ , мы не рассматриваем остовный граф, состоящий из пары отрезков M_1H и M_2H , где $H \in \gamma$: длина такого графа больше суммарной длины двух перпендикуляров M_1H_1 и M_2H_2 к γ .

Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы прямая γ совпала с осью Ox , а точка M_1 принадлежала оси Oy . Тогда $H_1 = O$. Можно

считать, что точка M_1 имеет координаты $(0;1)$, а точка M_2 – координаты $(x_2; y_2)$, причем $x_2 > 0$, $y_2 > 0$.

Утверждение 4.1. Пусть P_i , $i=1...7$, подмножества первой четверти I , определенные условиями:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ (x; y) \left| x > 0, y > 1, y > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\}, \\ P_2 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x < 1, 0 < y < 1, y > 1 - \sqrt{1 - x^2} \right. \right\}, \\ P_4 &= \left\{ (x; y) \left| x > 1, y > 1, y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\}, \\ P_5 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x < 1, 0 < y < 1, y = 1 - \sqrt{1 - x^2} \right. \right\}, \\ P_6 &= \{(x; y) | 0 < x < 1, y = 1\}, \\ P_7 &= \{(1; 1)\}, \quad P_3 = I \setminus \left(\bigcup_{i=1...7, i \neq 3} P_i \right). \end{aligned}$$

Пусть точка M_1 имеет координаты $(0; 1)$; точка $M_2(x_2; y_2)$, $x_2 \neq 0$, принадлежит первой четверти I , H_1, H_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точек M_1, M_2 на ось абсцисс. Пусть $G_1 = M_1H_1 \cup M_1M_2$, $G_2 = M_2H_2 \cup M_1M_2$, $G_3 = M_1H_1 \cup M_2H_2$ – три типа остовных графов, соединяющих точки M_1, M_2 и ось абсцисс, а $\rho(G_1)$, $\rho(G_2)$, $\rho(G_3)$ – их длины соответственно.

Тогда:

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho(G_1) &= |M_1H_1| + |M_1M_2| = 1 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}, \\ \rho(G_2) &= |M_1M_2| + |M_2H_2| = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} + y_2, \\ \rho(G_3) &= |M_1H_1| + |M_2H_2| = 1 + y_2; \end{aligned}$$

2) при $M_2 \in P_1$ минимальным остовным графом является граф G_1 ; при $M_2 \in P_2$ минимальным остовным графом является граф G_2 ; при $M_2 \in P_4$ минимальными остовными графами являются графы G_1, G_3 , их длины равны; при $M_2 \in P_5$ минимальными остовными графами являются графы G_2, G_3 , их

длины равны; при $M_2 \in P_6$ минимальными остовными графами являются графы G_1, G_2 , их длины равны; при $M_2 \in P_7$ минимальными остовными графами являются графы G_1, G_2, G_3 , их длины равны; при $M_2 \in P_3$ минимальным остовным графом является граф G_3 .

Доказательство.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение.

Рассмотрим случай $|M_1H_1| < |M_2H_2|$. В этом случае требуется сравнить длины $\rho(G_1), \rho(G_3)$ графов G_1, G_3 соответственно, что равносильно сравнению длин отрезков $|M_1M_2|$ и $|M_2H_2|$.

Расстояние от точки M_2 до точки M_1 равно расстоянию от точки M_2 до прямой Ox тогда и только тогда, когда точка M_2 является точкой параболы с фокусом M_1 , директрисой Ox и осью Oy . Получим уравнение этой параболы: $\sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} = y_2$ тогда и только тогда, когда $y_2 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}$, или точка M_2 лежит на параболе с уравнением $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Обозначим параболу через p . Мы получили, что $\rho(G_1) = \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда $M_2 \in p$; $\rho(G_1) < \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит над параболой p ; $\rho(G_3) < \rho(G_1)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит под параболой p .

Рассмотрим случай $|M_1H_1| > |M_2H_2|$. В этом случае требуется сравнить длины $\rho(G_2), \rho(G_3)$ графов G_2, G_3 соответственно, что равносильно сравнению длин отрезков $|M_1M_2|$ и $|M_1H_1|$.

Расстояние от точки M_2 до точки M_1 равно расстоянию от точки M_1 до прямой Ox тогда и только тогда, когда точка M_2 является точкой окружности с центром M_1 и радиусом $R = |M_1H_1| = 1$. Уравнение этой окружности: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Обозначим окружность через r . Мы получили, что $\rho(G_2) = \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда $M_2 \in r$; $\rho(G_2) < \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит внутри окружности r ; $\rho(G_2) > \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит вне окружности r .

В случае $|M_1 H_1| = |M_2 H_2|$ длины графов G_1 , G_2 равны $\rho(G_1) = \rho(G_2)$.

При $|M_1 M_2| < 1$ минимальными остовными графами являются G_1 , G_2 . При $|M_1 M_2| > 1$ минимальным остовным графом является граф G_3 . При $|M_1 M_2| = 1$ все три графа G_1 , G_2 , G_3 являются минимальными, так как их длины равны $\rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3) = 2$.

Мы получили разбиение первой четверти I на подмножества. Зная, какому подмножеству принадлежит точка M_2 , можно указать минимальный остовный граф и найти его длину (рисунок 4). Утверждение 4.1 доказано.

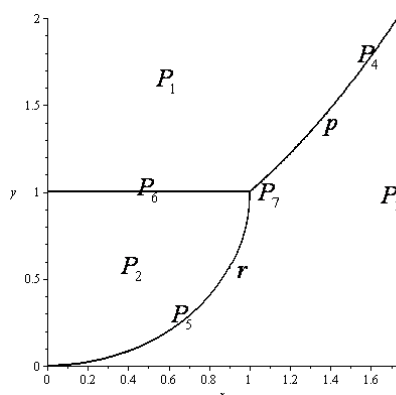


Рис. 4. Подмножества первой четверти, соответствующие различным типам $MST_{M,\gamma}$.

$$\text{Следствие 4.1. } \rho(MST_{M,\gamma}) = \begin{cases} \rho(G_1), & \text{если } M_2 \in P_1, \\ \rho(G_2), & \text{если } M_2 \in P_2, \\ \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_3, \\ \rho(G_1) = \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_4, \\ \rho(G_2) = \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_5, \\ \rho(G_1) = \rho(G_2), & \text{если } M_2 \in P_6, \\ \rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_7. \end{cases}$$

4.2 Графы Штейнера $G_{St;M,\gamma}$

Пусть для данных вершин M_1, M_2 можно построить граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$, S – его точка Штейнера, и H – основание перпендикуляра, опущенного из точки S на прямую γ . Выясним, для какого расположения точки M_2 в первой четверти можно построить такой граф Штейнера.

Утверждение 4.2.

$$\text{Пусть } Q = \left\{ (x; y) \left| x > 0, y < \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right. \right\}.$$

Пусть точка M_1 имеет координаты $(0; 1)$; точка $M_2(x_2; y_2)$ принадлежит первой четверти I .

Тогда при $M_2 \in Q$ и только для таких точек M_2 существует граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$, соединяющий точки M_1, M_2 и ось абсцисс, длина $G_{St;M,\gamma}$ равна $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$.

Доказательство.

Так как точка Штейнера S отлична от точек M_1, M_2 , то направления ребер M_1S, M_2S, SH однозначно определены. В частности, прямая SH перпендикулярна оси Ox , прямая M_2S образует с осью Ox угол 30° , а прямая M_1S образует с осью Ox угол 150° .

Рассмотрим прямые l_1 и l_2 , проходящие через точку M_1 под углами 30° и 150° к оси Ox : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ и $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$. Прямой l_2 принадлежит ребро M_1S . Прямая l_2 пересекает ось Ox в точке $F(\sqrt{3}; 0)$. Рассмотрим также прямую l_3 , параллельную прямой l_1 и проходящую через точку F : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$. Прямые l_1 , l_2 и l_3 ограничивают на плоскости в первой четверти I открытую полуполосу $Q = \left\{ (x; y) \mid x > 0, y < \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right\}$. Тогда при $M_2 \in Q$ граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ можно построить (рисунок 5).

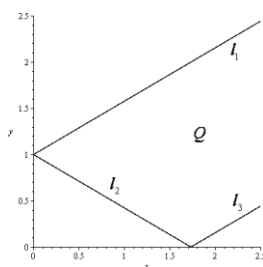


Рис. 5. Подмножество точек M_2 в первой четверти, для которых существуют $G_{St;M,\gamma}$

Найдем длину $\rho(G_{St;M,\gamma})$ графа Штейнера $G_{St;M,\gamma}$: $\rho(G_{St;M,\gamma}) = |M_1S| + |SM_2| + |SH|$.

Точка Штейнера S лежит на прямой l_2 и является пересечением l_2 с прямой SM_2 . Прямая SM_2 параллельна прямой l_1 , следовательно, имеет уравнение $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_2) + y_2$. Координаты точки S найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_2) + y_2. \end{cases}$$

$$\text{Получим } S\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1); \frac{1}{2}(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + 1)\right).$$

Следовательно,

$$|M_1 S| = \left| y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1 \right| = -\left(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1 \right),$$

$$|SM_2| = \left| y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1 \right| = y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1,$$

$$|SH| = \frac{1}{2}(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + 1).$$

При раскрытии модулей мы использовали положение точки S относительно прямых l_1 и l_2 . Окончательно получим

$$\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1).$$

Утверждение 4.2 доказано.

4.3 Абсолютно минимальные графы $SMT_{M,\gamma}$

Из п. 4.1 и 4.2 следует, что для всех точек M_2 , принадлежащих полуполосе Q , существуют и минимальный остовный граф $MST_{M,\gamma}$ (графы G_i), $i=1,2,3$, и граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$. Наша задача: для каждой точки $M_2 \in Q$ из найденных графов выбрать абсолютно минимальный граф $SMT_{M,\gamma}$.

Теорема 4.3. Пусть R_i , $i=1...9$, – подмножества первой четверти I , определенные условиями:

$$R_1 = \left\{ (x; y) \left| x > 0, y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\} = P_1 \setminus Q,$$

$$R_2 = \left\{ (x; y) \left| x > 0, 0 < y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > 1 - \sqrt{1 - x^2} \right. \right\} = P_2 \setminus Q,$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, y < 1 - \sqrt{1 - x^2}; \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}, y < \sqrt{3}x - 1; \right. \right. \\
&\quad \left. \left. x > \sqrt{3}, y < \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right\} = P_3 \setminus \left\{ (x; y) \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \sqrt{3}, y \geq \sqrt{3}x - 1 \right. \right\}, \\
R_4 &= \left\{ (x; y) \left| x \geq \sqrt{3}, y \geq 2, y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\}, \\
R_5 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < y \leq \frac{1}{2}, y = 1 + \sqrt{1 - x^2} \right. \right\}, \\
R_6 &= R = \left\{ (x; y) \left| x > 0, y < \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \sqrt{3}x - 1 \right. \right\}, \\
R_7 &= \left\{ (x; y) \left| \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}, y = \sqrt{3}x - 1 \right. \right\}.
\end{aligned}$$

Пусть точка $M_1(0;1)$, а точка $M_2(x_2; y_2)$ принадлежит первой четверти I . Пусть G_1 , G_2 , G_3 и $G_{St;M,\gamma}$ – три типа остовных графов и граф Штейнера, соединяющие точки M_1 , M_2 и ось абсцисс соответственно.

Тогда при $M_2 \in R_1$ абсолютно минимальным графом $SMT_{M,\gamma}$ является граф G_1 ; при $M_2 \in R_2$ – граф G_2 ; при $M_2 \in R_3$ – граф G_3 ; при $M_2 \in R_4$ – графы G_1 , G_3 ; при $M_2 \in R_5$ – графы G_2 , G_3 ; при $M_2 \in R_6$ – граф $G_{St;M,\gamma}$; при $M_2 \in R_7$ – графы $G_{St;M,\gamma}$, G_3 .

Доказательство.

Рассмотрим последовательно несколько случаев: $M_2 \in Q \cap P_i$, $i = 1, \dots, 7$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_1$. Сравнивая длины $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$ и $\rho(G_1) = 1 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_2$. Сравнивая длины $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$ и $\rho(G_2) = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} + y_2$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_2)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_3$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$ и $\rho(G_3) = 1 + y_2$. Рассмотрим прямую l_4 с уравнением $y = \sqrt{3}x - 1$. Для $M_2(x; y)$: при $y > \sqrt{3}x - 1$ получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_3)$, при $y = \sqrt{3}x - 1$ получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \rho(G_3)$, при $y < \sqrt{3}x - 1$ получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) > \rho(G_3)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_4$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_1) = \rho(G_3)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1) = \rho(G_3)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_5$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_2) = \rho(G_3)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_2) = \rho(G_3)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_6 = P_6$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_1) = \rho(G_2)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1) = \rho(G_2)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_7 = P_7$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3)$.

Рассмотрим треугольник ΔM_1CD , ограниченный прямыми l_1 , l_2 и l_4 , и его внутренность $R = \Delta M_1CD$.

Заметим, что $C(\sqrt{3}; 2)$ – точка пересечения прямой l_1 , прямой l_4 и параболы p , а G_{St} – точка пересечения прямой l_2 , прямой l_4 и окружности r .

Тогда для любой точки $M_2 \in R$ абсолютно минимальным графом $SMT_{M,\gamma}$ является граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$. Для точек $M_2 \in (CD)$ абсолютно минимальными графами являются два графа: граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ и минимальный остовный граф G_3 ; их длины равны: $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \rho(G_3)$. Для точки $M_2 = C$ абсолютно минимальными графами являются два минимальных остовных графа G_1 и G_3 : $\rho(G_1) = \rho(G_3)$. Для точки $M_2 = D$ абсолютно минимальными графами также являются два минимальных остовных графа G_2 и G_3 : $\rho(G_2) = \rho(G_3)$.

Следствие 4.3.2. Допустимыми множествами типов $G_1, G_2, G_3, G_{St;M,\gamma}$ являются множества $\Gamma_1 = R_1 \cup R_4, \Gamma_2 = R_2 \cup R_5, \Gamma_3 = R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_7, \Gamma_4 = R_6 \cup R_7$ соответственно.

Вычисление отношения $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$

Теорема 4.4. Пусть $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(MST_{M,\gamma})$ – длины графов Штейнера и минимальных остовных графов соответственно для прямой и двух точек на плоскости. Тогда множество отношений $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ совпадает с множеством

всех точек полуинтервала $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2 \right)$.

Доказательство.

1) Рассмотрим длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(MST_{M,\gamma})$ графов Штейнера и минимальных остовных графов соответственно, построенных для точек M_2 из подмножеств R_6, R_7 на плоскости.

Для точек M_2 из R_7 длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(MST_{M,\gamma})$ равны. Поэтому отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} = 1$.

Для точек M_2 из R_6 только граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ является абсолютно минимальным; $\rho(SMT_{M,\gamma}) = \rho(G_{St;M,\gamma})$. Поэтому отношение

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} < 1.$$

Выясним, какие значения может принимать это отношение.

Рассмотрим три криволинейных треугольника $\Delta M_1 CP_7, \Delta M_1 DP_7, \Delta CDP_7$, где точки M_1, C, D, P_7 имеют соответственно координаты $(0;1), (\sqrt{3}/2), (\sqrt{3}/2; 1/2), (1;1)$. Внутри каждого треугольника исследуем

соответствующие

отношения

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_1)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}},$$

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_2)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{y_2 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}}, \quad \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + y_2}.$$

Для этого для

каждого отношения мы найдем производную по направлению к точке P_7 и покажем, что она отрицательна. В частности, заметим, что на отрезке M_1P_7

равны отношения $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_1)} = \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_2)}$, на дуге CP_7 параболы – отношения

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_1)} = \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}, \quad \text{на дуге } DP_7 \text{ окружности} - \text{отношения}$$

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_2)} = \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}.$$

Следовательно, от любой точки $M_2 \in R$ в направлении точки P_7 отношения убывают. В единственной точке $P_7(1;1)$ они принимают наименьшее значение, равное $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ (рисунок 7).

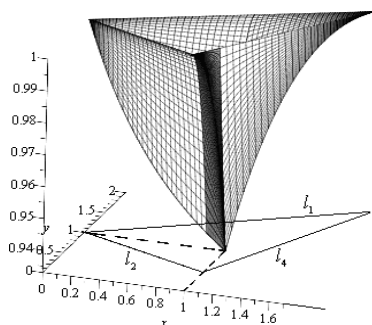


Рис. 7. График отношения $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ для точек $M_2(x; y)$ из допустимого множества Γ_4 .

2) Для всех точек полуполосы Q , расположенных вне треугольника ΔM_1CD , отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} > 1$. Так как $MST_{M,\gamma} = G_3$, то найдем все

точки $M_2 \in Q \setminus \Delta M_1 CD$ такие, что $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = c$, где $c = const$.

Из $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + y_2} = c$ получим $y = \frac{\sqrt{3}}{2c-1}x - 1$. Следовательно, линиями уровня искомого отношения являются прямые. Обозначим прямую с таким уравнением через $l_5(c)$. Мы получили, что отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}$

постоянно для всех точек M_2 , лежащих на прямой $l_5(c)$.

Найдем угловой коэффициент прямой $l_5(c)$. Интересующие нас точки M_2 принадлежат углу, образованному прямой l_3 и прямой l_4 . Уравнение прямой l_3 : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$, уравнение прямой l_4 : $y = \sqrt{3}x - 1$. Следовательно, $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2c-1} < \sqrt{3}$. В частности, $2c - 1 > 0$. Решая предпоследнее неравенство, получаем $1 < c < 2$.

Выясним, для каких точек достигается равенство

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + y_2} = 2. \text{ При } c = 2 \text{ уравнение прямой } l_5(c)$$

принимает вид $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$, то есть $l_5(c)$ совпадает с прямой l_3 . Итак,

отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}$ достигает наибольшего значения, равного 2, для точек

M_2 , лежащих на прямой l_3 . Для таких сетей отрезок SH вырождается в точку, так как $S \in l_3$, поэтому такие сети мы не рассматриваем в качестве сетей Штейнера. Однако для любого числа $c < 2$ для всех точек M_2 прямой $l_5(c)$

отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ равно c .

Мы получили, что для прямой и двух точек на плоскости множество таких отношений $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ совпадает с множеством всех точек полуинтервала $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2\right)$. Теорема 4.4 доказана.

Следствие 4.4. Отношение Штейнера для прямой и пары точек, расположенных на плоскости по одну сторону от прямой, равно $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Напомним, что отношение Штейнера для трех точек равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, то в случае прямой и пары точек на плоскости сети Штейнера дают меньший выигрыш в длине, чем сети Штейнера для трех точек.

Кроме того, отношение Штейнера для трех точек достигает минимума, если точки расположены в вершинах равностороннего треугольника. В этом случае можно построить наибольшее число минимальных остовных графов, соединяющих эти точки. В случае прямой и пары точек ситуация аналогичная: отношение Штейнера достигает минимума для пары точек, расположенных от прямой и друг от друга на одинаковом расстоянии. Если считать прямую «точкой», то вместе с данными точками она образует «равносторонний треугольник». Отметим также, что функция длины $\rho(MST_{M,\gamma})$ в точке, для которой отношение Штейнера достигает минимума, имеет максимум.

Автор выражает благодарность А.О. Иванову и А.А. Тужилину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 424.
2. R. Booth, D.A. Thomas, and J.F. Weng, Shortest Networks for One line and Two Points in Space // Advances in Steiner Trees edited by Ding-Zhu, J.M. Smith and J.H. Rubinstein, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 2000. P. 15–27.