РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 512

Забелина С.Б., Пинчук И.А

Московский государственный областной университет

О РАЗВИТИИ КОГНИТИВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕНТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Аннотация. В статье обсуждается когнитивная составляющая исследовательской компетентности будущих учителей математики, и рассматриваются уровни строгости изложения математического знания при изучении математических дисциплин в целях развития когнитивной составляющей исследовательской компетентности, раскрыта методика работы преподавателя согласно уровня строгости учебного материала. Выделенные уровни строгости изложения иллюстрируются возможными подходами к построению поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел.

Ключевые слова: математические дисциплины, математическое доказательство, показатели строгости доказательства, уровни строгости, исследовательская компетентность.

S. Zabelina, I. Pinchuk

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

ON THE COGNITIVE COMPONENT OF THE RESEARCH COMPETENCE OF STUDENTS IN THE STUDY OF SPECIAL PROFESSIONAL MATHEMATICAL DISCIPLINES

Abstract. This paper discusses the cognitive component of the research competence of future teachers of mathematics and examines levels rigor of mathematical knowledge in the study of *mathematical disciplines in order to develop the cognitive component of research competence, discloses a technique for working pre– feeder according to severity level of educational material. These selected levels rigor are illustrated by possible approaches to the construction of the complex numbers as an extension of the field of real numbers.*

Key words: mathematics, mathematical proof, indicators of stringency of evidence, levels of stringency, research competence.

Когнитивная составляющая исследовательской компетентности раскрывается через знания об актуальных направлениях исследований математической и педагогической науке, нацеленность на открытие нового, способность целенаправленно управлять своей умственной деятельностью, умение выявлять причинно - следственные связи, устанавливать новые связи между явлениями; умение применять логический анализ, умение синтезировать научные знания и исследовательский опыт. Развитие когнитивной составляющей исследовательской компетентности учителей математики осуществляется в процессе их профессиональной подготовки в педагогических вузах при освоении в частности математических дисциплин. Для обеспечения этого процесса обучение студентов математическим дисциплинам должно иметь направленность на решение проблем восприятия, познания обучающимися математических фактов, внешних и внутренних их логических связей, на приобретение, обработку, структурирование, сохранение и использование знаний для проектирования будущих обучающих стратегий. В условиях введения новых государственных образовательных стандартов меняются объем и подходы к освоению учебного материала, наборы задач по специальным математическим дисциплинам, что естественно влечет изменения в уровне строгости изложения математического знания.

В математических дисциплинах понятие доказательства играет центральную роль, так как статус любых математических результатов определяется присутствием доказательств и их корректностью. Корректность математического доказательства - сложное качество. Приступая к доказательству математического предложения, мы определяем некоторое число исходных посылок - аксиом, предполагая, что не потребуется никакой другой внешней по отношению к выявленным аксиомам информации необходимой для осуществления доказательства теоремы. Таким образом, корректное, или строгое доказательство - это доказательство, выводимое из конечного числа явных утверждений, и «герметичное» по отношению к ним [1]. Математическое доказательство является строгим, если также мы предполагаем, что примененные в нем логические правила вывода адекватные, надежные, безупречные. Различные доказательства используют более или менее богатый набор логических схем, но с принципиальной стороны это несущественно. Свойства герметичности и адекватности логических норм не исчерпывают собой показатели строгости математического доказательства. Может оказаться так, что в системе предпосылок осуществленного доказательства можно доказать и противоположное утверждение. В этом случае доказательство перестает быть для нас таковым. Следовательно, для строгости доказательства математического утверждения необходимо также обосновать непротиворечивость всех утверждений, выводимых из выбранной системы аксиом.

С понятием строгости доказательства связано понятие его достоверности. Достоверность характеризует доказательство с позиции предмета рассуждения, с фактического положения дел в некоторой внутриматематической реальности. Достоверное доказательство – значит, гарантированное от контрпримеров.

Возвращаясь к вопросу об уровне строгости изложения математических знаний в процессе преподавания математических дисциплин, мы будем вынуждены расширить границы понимания строгости доказательства, точнее привнесем в наши представления о математической строгости методический аспект, что превратит последнее в доказательство содержательное, психологическое. В.А. Успенский отмечает, что доказательство есть «рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других с помощью этого же рассуждения» [2, с. 12]. Доказательство должно не только формально убеждать обучающегося в истинности той или иной теоремы, но и объяснять смысл доказываемого утверждения, воспитывать интуицию к суждениям, выявлению закономерностей, формировать у студента исследовательский тип поведения.

Постижение студентом логики процесса математического доказательства должно проходить постепенно, согласно с его познавательными возможностями, через противопоставление с интуицией и эвристическими методами рассуждений. Мы выделяем три уровня строгости изложения математических знаний в процессе преподавания математических дисциплин: элементарный, функциональный, преобразующий. По мере изучения предмета уровень строгости изучаемых теорем должен возрастать. Каждый уровень строгости должен быть подготовлен преподавателем, а обучающиеся должны «дорасти» до него, должны испытать внутреннюю потребность в таком усилении логической строгости. На элементарном уровне строгости изложения математических знаний преподавателю необходимо выработать такой подход к проведению математического доказательства, в котором дидактически целесообразно соотносились бы интуиция и логика.

На функциональном уровне строгости изложения математических знаний преподаватель выстраивает доказательства из логически строгих путем изъятия из них некоторых частей, которые восстанавливаются самими студентами в ходе их самостоятельной работы. Методическая задача в этом случае состоит в том, чтобы, исходя из строгого доказательства теоремы, сконструировать такое ее доказательство, которое бы не нарушало логики, не содержало математической ошибки. Примером могут служить доказательства, в которых не рассмотрены до конца все возможные случаи, при условии, что их рассмотрение происходит аналогично. Или дается лишь общая логическая схема доказательства без углубления в его детали.

На преобразующем уровне строгости изложения математических курсов преподаватель выстраивает строгие доказательства, активизируя студентов на поиск, отбор исходных положений, выбор метода рассуждений, подбор аргументов.

Для примера рассмотрим возможные доказательства, связанные с построением поля комплексных чисел [3]. Напомним один из возможных способов такого построения. Пусть $M = \{(a, b) | a, b \in R\}$ – декартов квадрат поля действительных чисел R, на котором определяются операции сложения и умножения пар: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc +$

ad). Проверяется, что для так заданных операций выполняются все аксиомы из определения поля, причем некоторую часть этих аксиом можно предложить доказать студентам самостоятельно, ориентируясь на доказательства, проведенные преподавателем. Таким образом, получаем, что M – поле. На следующем этапе выбираем подмножество $T = \{(a, 0) | a \in R\}$ поля M и проверяем, что оно является его подполем, изоморфным полю действительных чисел R. Это означает, что подмножество T замкнуто относительно операций, определенных в M, и существует биективное отображение $f: T \to R$, заданное условием $f(a, 0) = a$, сохраняющее операции. Далее на функциональном уровне строгости изложения математических знаний можно предложить студентам отождествить поле T с полем действительных чисел, то есть каждую пару вида $(a, 0)$ считать действительным числом a. Тогда M превращается в расширение поля действительных чисел и называется полем комплексных чисел. На преобразующем уровне строгости изложения рассмотрим множество$K = (M \backslash T) \cup R$ и превратим его в поле. Для определения операций в Kиспользуем отображение $\varphi: M \to K$, определенное условиями: для всех $(a, b) \in M \backslash T \varphi(a, b) = (a, b)$; для всех $(a, 0) \in T$ $\varphi(a, 0) = f(a, 0) = a$. φ – биективное отображение, так как на множестве $M \backslash T$ это отображение тождественно, а на T совпадает с отображением f. Для любых элементов $u, v \in K$ зададим их сумму и произведение следующим образом

$$u + v = \varphi\left(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)\right);$$
$$u \cdot v = \varphi\left(\varphi^{-1}(u) \cdot \varphi^{-1}(v)\right).$$

Покажем, что относительно этих операций K является полем. Биективное отображение φ, очевидно, является изоморфизмом, а, следовательно, множество K как множество, изоморфное полю, является полем, и поле действительных чисел R его подполем. Таким образом, поле K есть расширение поля действительных чисел, оно называется полем комплексных чисел.

Каким должно быть соотношение между уровнями строгости математических доказательств при изучении математических дисциплин? Это зависит от многих факторов: кому читается данный курс, какие цели ставятся по его изучению, сколько времени на него отводится и т. п. Однако стоит отметить, что изучение строгих математических доказательств составляет ту сторону математики, которая в большей степени развивает мышление, воспитывает целеустремленность и настойчивость. Кроме того, строгие математические доказательства помогают глубже раскрыть смысл вводимых математических понятий, овладеть ими и правильно применять на практике, помогают установить логические связи между отдельными частями математического курса. Они позволяют полнее овладеть математическими методами, выработать необходимые для их использования умения, лучше осознать границы применимости этих методов. Преподавание математических курсов в педвузе будущим учителям математики на наш взгляд должно быть преимущественно строго доказательным. Те, кто в будущем сами будут обучать математике, должны как можно большую часть своего предмета изучить, опираясь на логически строгие доказательства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Перминов В.Я., Развитие представлений о надежности математического доказательства / М.: Едиториал УРСС, 2004. Изд. 2-е. 240 с.
2. Успенский В.А., Простейшие примеры математических доказательств. М.: Изд-во МЦНМО, 2012. Изд. 2-е. 56 с.
3. Д.К. Фаддеев, Лекции по высшей алгебре. М.: Изд-во Лань, 2005. 416 с.