# РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК: 572.33+519.634

**Е.А. Бедрикова, А.В. Латышев**
*Московский государственный областной университет*

## ЗАДАЧА КУЭТТА ДЛЯ БОЗЕ-ГАЗА

*Аннотация.* Построено решение задачи Куэтта в плоском канале. В качестве основного уравнения используется модель Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) с почти зеркальными граничными условиями. Найдена функция распределения молекул газа и вычислены макропараметры газа. Сделан предельный переход к классическим газам, показывающий полное совпадение полученных результатов с известными результатами для классических газов. Проведен анализ макропараметров газа.
*Ключевые слова:* бозе-газ, задача Куэтта, течение Куэтта, течение газа в канале.

**E. Bedrikova, A. Latyshev**
*Moscow State Regional University*

## COUETTE PROBLEM FOR BOSE GAS

*Abstract.* The solution of Couette problem in the flat channel is constructed. As the main equation the model of Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) with almost specular boundary conditions is used. Function of distribution of molecules of gas is found and gas macroparameters are calculated. Limit transition to classical gases is made which shows full coincidence of the received results to known results for classical gases. Gas macroparameters are analysed.
*Keywords:* Bose gas, Couette problem, Couette flowing, flowing of gas in the channel.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время течение Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками достаточно подробно исследовано при помощи численных методов [1-5]. Задача Куэтта аналитическими методами исследована в работах [6-7]. Данные работы посвящены классическим газам. При описании движения газа в канале рассматриваются как правило чисто диффузные граничные условия, поскольку техника нахождения аналитического решения, применимая для полупространственных задач, в данном случае не может быть применена. Целью настоящей работы является продолжение работ [6-7] и построение математической модели течения Куэтта на основе БГК (Бхатнагар–Гросс–Крук) модели кинетического уравнения Больцмана для квантовых газов, а именно для бозе-газа. В качестве граничных условий рассматривается почти зеркальные граничные условия при малых коэффициентов аккомодации.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бозе-газ, который движется в плоском канале с бесконечными параллельными стенками. Толщина канала $2d$ ($|x| < d$), стенки канала движутся в своих плоскостях в противоположных направлениях со скоростями $U$ и $-U$. Введем декартову систему координат с центром в середине канала. Ось $x$ проведем перпендикулярно плоскостям стенок канала. Ось $z$ направим вдоль направления движения стенок канала.

Рассмотрим обобщение кинетического уравнения квантового бозе-газа:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathrm{v}\nabla f) = \nu(f_{eq} - f), \qquad (1.1)$$

функция $f_{eq}$ - локально – равновесная функция Бозе,

$$f_{eq} = \frac{1}{-1+\exp\left(\dfrac{\varepsilon_* - \mu}{kT}\right)}, \quad \varepsilon_* = \frac{m}{2}(\mathrm{v}-u)^2 \;, \; -\infty < \mu < 0 .$$

Здесь $\mu$ – химический потенциал молекул.

Будем считать, что движение носит стационарный характер. Рассмотрим случай, когда скорость движения стенок канала много меньше скорости звука в газе. В этих условиях задача допускает линеаризацию. Линеаризуем задачу относительно равновесной функции распределения бозе-газа $f_B$

$$f_B = \frac{1}{-1+\exp\left(\dfrac{\varepsilon - \mu}{kT}\right)}, \quad \varepsilon = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \quad -\infty < \mu < 0 .$$

Получаем следующее выражение:

$$f_{eq} = f_B(\mathrm{v}) + g_B(\mathrm{v})\frac{mv_z}{kT}u_z, \qquad (1.2)$$

где $f_B(\mathrm{v}) = \dfrac{1}{-1 + \exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT} - \dfrac{\mu}{kT}\right)}$, $g_B(\mathrm{v}) = \dfrac{\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT} - \dfrac{\mu}{kT}\right)}{\left[-1 + \exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT} - \dfrac{\mu}{kT}\right)\right]^2}$.

Введем безразмерную скорость $\tilde{N} = \sqrt{\beta}\,\mathrm{v}$, $\beta = \dfrac{m}{2kT}$, безразмерный химический потенциал $\alpha = \dfrac{\mu}{kT}$ и безразмерную координату $x_1 = xv\sqrt{\beta}$. В этих переменных выражение (1.2) записывается так:

$$f_{eq} = f_B(C) + 2g_B(C)C_z U_z(x), \qquad (1.3)$$

при этом $U_z(x) = \sqrt{\beta}u_z$ – безразмерная массовая скорость,

$$f_B(C) = \frac{1}{-1 + \exp(\tilde{N}^2 - \alpha)}, \quad g_B(C) = \frac{\exp(\tilde{N}^2 - \alpha)}{[-1 + \exp(\tilde{N}^2 - \alpha)]^2}$$

.

Согласно формуле (1.3) функцию распределения будем искать в виде:

$$f = f(x, C) = f_B(C) + g_B(C)C_z h(x, C_x). \qquad (1.4)$$

С помощью (1.3) и (1.4) и учитывая переход к безразмерной координате уравнение (1.1) записывается в виде:

$$C_x \frac{\partial h}{\partial x_1} = 2U_z(x_1) - h(x_1, C_x). \qquad (1.5)$$

Массовая скорость газа находится из закона сохранения импульса и проводя соответствующие преобразования [8], получаем следующую формулу:

$$U_z(x_1) = \frac{1}{4l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left|1 - \exp(\alpha - C_x^2)\right| h(x_1, C_x)\,dC_x, \qquad (1.6)$$

где $l_0(\alpha) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left|1 - \exp(\alpha - C^2)\right| dC$.

С учетом (1.6) уравнение (1.5) принимает вид:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x_1}+h(x_1,\mu)=\frac{1}{2l_0(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\exp(\alpha-\mu'^2)-1\right|h(x_1,\mu')d\mu',\ \mu=C_x \qquad (1.7)$$

Введем функцию $K_B(\mu,\alpha)$, которая является ядром уравнения (1.7) и имеет вид:

$$K_B(\mu,\alpha)=\frac{\ln(1-\exp(\alpha-\mu^2))}{2l_0(\alpha)}=\frac{\ln(1-\exp(\alpha-\mu^2))}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln(1-\exp(\alpha-\tau^2))d\tau},\ \mu=C_x \qquad (1.8)$$

Эта функция обладает свойством:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)\equiv 1,\ \forall\alpha\in(-\infty,+\infty).$$

Массовая скорость согласно (1.8) и (1.7) равна:

$$U_z(x_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu',\alpha)h(x_1,\mu')d\mu'. \qquad (1.9)$$

Таким образом, согласно (1.9) уравнение (1.7) можно представить в стандартном виде:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x_1}+h(x_1,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu',\alpha)h(x_1,\mu')d\mu'. \qquad (1.10)$$

Рассмотрим почти зеркальные граничные условия на поверхности канала с коэффициентами зеркальности $q_1$ и $q_2$ $(0\le q_i\le 1,\ i=1,2)$

$$h(-d,\mu)=(1-q_1)h(-d,-\mu)-2q_1U_z(x),\quad \mu>0, \qquad (1.11)$$

$$h(d,\mu)=(1-q_2)h(d,-\mu)+2q_2U_z(x),\quad \mu<0. \qquad (1.12)$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнения (1.10) будем искать в виде:

$$h_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu),$$

где $\eta$ - спектральный параметр, или параметр разделения.

Разделение переменных сводит уравнение (1.10) к характеристическому уравнению:

$$\Phi(\eta,\mu)(\eta-\mu)=\eta n(\eta)\,. \qquad (2.1)$$

с нормировочным условием:

$$n(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)\Phi(\eta,\mu)d\mu\equiv 1\,.$$

Будем решать уравнение (2.1) в классе обобщенных функций, тогда:

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta,\alpha)}{K_B(\eta,\alpha)}\delta(\eta-\mu)\,. \qquad (2.2)$$

Решение задачи (1.10), (1.11) и (1.12) будем искать в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения

$$h(x,\mu)=a_0+a_1(x-\mu)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta\,, \qquad (2.3)$$

где $A(\eta)$ - неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра), а $a_0, a_1$ - неизвестные коэффициенты дискретного спектра.

Обозначим $h_0(x,\mu)=a_0+a_1(x-\mu)$ - часть решения, которая отвечает дискретному спектру, $h_c(x,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta$ - часть решения отвечающая, непрерывному спектру.

Найдем коэффициенты дискретного и непрерывного спектров. Для этого подставим общее решение (2.3) взятое в виде:

$$h(x,\mu)=h_0(x,\mu)+h_c(x,\mu) \qquad (2.4)$$

в граничные условия (1.11) и (1.12). Будем иметь:

$$h_0(-d,\mu)+h_c(-d,\mu)=(1-q_1)[h_0(-d,-\mu)+h_c(-d,-\mu)]-2q_1U_z\,, \qquad (2.5)$$

$$h_0(d,\mu)+h_c(d,\mu)=(1-q_2)[h_0(d,-\mu)+h_c(d,-\mu)]+2q_2U_z\,. \qquad (2.6)$$

Заметим, что

$$h_0(x,\mu) - h_0(x,-\mu) = a_0 + a_1(x-\mu) - a_0 - a_1(x+\mu) = -2a_1\mu \,,$$

$$h_c(x,\mu) - h_c(x,-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,-\mu)A(\eta)d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,x)\Phi(\eta,\mu)d\eta \,,$$

где $b(\eta,x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)A(\eta) - \exp\left(\frac{x}{\eta}\right)A(-\eta)$.

Следовательно, граничные условия (2.5) и (2.6) приводятся к системе интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,-d)\Phi(\eta,\mu)d\eta - q_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(-\eta)d\eta = \\ = a_1\mu(2-q_1) - q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z),\ \mu > 0, \tag{2.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,d)\Phi(\eta,\mu)d\eta - q_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(-\eta)d\eta = \\ = a_1\mu(2-q_2) - q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z),\ \mu < 0. \tag{2.8}$$

Предположим, что величины $q_1$ и $q_2$ малы, т.е. $q_1 \ll 1$ и $q_2 \ll 1$. Тогда вторыми интегралами в уравнениях (2.7) и (2.8) можно пренебречь

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,-d)\Phi(\eta,\mu)d\eta = a_1\mu(2-q_1) - q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z),\ \mu > 0 \tag{2.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,d)\Phi(\eta,\mu)d\eta = a_1\mu(2-q_2) - q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z),\ \mu < 0 \tag{2.10}$$

Подставив собственные функции (2.2) в уравнения (2.9) и (2.10) получаем сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,-d)\eta\frac{d\eta}{\eta-\mu} + b(\mu,-d)\frac{\lambda(\mu,\alpha)}{K_B(\mu,\alpha)} = a_1\mu(2-q_1) - q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z),\ \mu > 0\,, \tag{2.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\eta,d)\eta\frac{d\eta}{\eta-\mu} + b(\mu,d)\frac{\lambda(\mu,\alpha)}{K_B(\mu,\alpha)} = a_1\mu(2-q_2) - q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z),\ \mu < 0\,. \tag{2.12}$$

Введем две вспомогательные функции:

$$M(z,\pm d) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta b(\eta,\pm d)}{\eta - z} d\eta , \qquad (2.13)$$

граничные значения, которых на положительной полуоси сверху и снизу связаны формулами Сохоцкого:

$$M^{+}(\mu,\pm d) - M^{-}(\mu,\pm d) = 2\pi i \mu b(\mu,\pm d) , \qquad (2.14)$$

$$\frac{M^{+}(\mu,\pm d) + M^{-}(\mu,\pm d)}{2} = M(\mu,\pm d) , \; M(z,\pm d) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta b(\eta,\pm d)}{\eta - z} d\eta ,$$

где $M(\mu,\pm d)$ - особый интеграл в смысле главного значения по Коши.

С помощью равенств (2.13) и (2.14) и граничных значений дисперсионной функции и функции $M(z,\pm d)$ сведем сингулярные уравнения (2.11) и (2.12) к краевым задачам Римана:

$$\begin{aligned} &\lambda^{+}(\mu,\alpha)\left[M^{+}(\mu,-d) - a_1\mu(2-q_1)\right] - \lambda^{-}(\mu,\alpha)\left[M^{-}(\mu,-d) - a_1\mu(2-q_1)\right] = \\ &= -2\pi i \mu K_B(\mu,\alpha) q_1 (a_0 - a_1 d + 2U_z), \end{aligned} \qquad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &\lambda^{+}(\mu,\alpha)\left[M^{+}(\mu,d) - a_1\mu(2-q_2)\right] - \lambda^{-}(\mu,\alpha)\left[M^{-}(\mu,d) - a_1\mu(2-q_2)\right] = \\ &= -2\pi i \mu K_B(\mu,\alpha) q_2 (a_0 + a_1 d - 2U_z). \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Краевые условия (2.15) и (2.16) не являются краевыми задачами Римана, ибо линии скачков функций, входящих в эти условия, не совпадают с контуром, на котором они заданы. Сведем (2.15) и (2.16) к краевым задачам Римана. Для этого, учитывая, что левые части (2.15) и (2.16) – суть четные функции, распространим их на всю действительную ось, продолжая правые части «четным» образом:

$$\begin{aligned} &\lambda^{+}(\mu,\alpha)\left[M^{+}(\mu,-d) - a_1\mu(2-q_1)\right] - \lambda^{-}(\mu,\alpha)\left[M^{-}(\mu,-d) - a_1\mu(2-q_1)\right] = \\ &= -2\pi i |\mu| K_B(\mu,\alpha) q_1 (a_0 - a_1 d + 2U_z), \; -\infty < \mu < \infty, \end{aligned} \qquad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &\lambda^{+}(\mu,\alpha)\left[M^{+}(\mu,d) - a_1\mu(2-q_2)\right] - \lambda^{-}(\mu,\alpha)\left[M^{-}(\mu,d) - a_1\mu(2-q_2)\right] = \\ &= 2\pi i |\mu| K_B(\mu,\alpha) q_2 (a_0 + a_1 d - 2U_z), \; -\infty < \mu < \infty. \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Учитывая поведение функций, входящих в краевые условия (2.17) и (2.18), получим следующее общее решение:

$$M(z,-d) = a_1 z(2-q_1) - q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z)\frac{f_1(z,\alpha)}{\lambda(z,\alpha)}, \qquad (2.19)$$

$$M(z,d) = a_1 z(2-q_2) + q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z)\frac{f_1(z,\alpha)}{\lambda(z,\alpha)}, \qquad (2.20)$$

где $f_1(z,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mu| K_B(\mu,\alpha) d\mu}{\mu - z}$, $t_1(z,\alpha) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mu K_B(\mu,\alpha) d\mu}{\mu - z}$.

Заметим, что при $z \to \infty$

$\frac{f_1(z,\alpha)}{\lambda(z,\alpha)} = z\frac{l_1(\alpha)}{l_2(\alpha)}$, где $l_n(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} \mu^n \ln(1-\exp(\alpha-\mu^2))d\mu$, $n = 0,1,2$.

Учитывая что, $M(\mu,\pm d) = 0$ при $\mu \to \infty$ получим следующие уравнения:

$$a_1 l_2(\alpha)(2-q_1) - q_1 l_1(\alpha)(a_0 - a_1 d + 2U_z) = 0,$$
$$a_1 l_2(\alpha)(2-q_2) + q_2 l_1(\alpha)(a_0 + a_1 d - 2U_z) = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$a_0 = \frac{2U_z(q_2 - q_1)}{q_1 + q_2 + (d(l_1(\alpha)/l_2(\alpha)) - 1)q_1 q_2},$$
$$a_1 = \frac{2q_1 q_2 U_z(l_1(\alpha)/l_2(\alpha))}{q_1 + q_2 + (d(l_1(\alpha)/l_2(\alpha)) - 1)q_1 q_2}.$$

Сделаем предельный переход к классическим газам для коэффициентов дискретного спектра. Устремляя $\mu \to -\infty$ получаем $\frac{l_1(\alpha)}{l_2(\alpha)} \to \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Следовательно, для классических газов имеем:

$$a_0 = \frac{2U_z(q_2 - q_1)}{q_1 + q_2 + (2d/\sqrt{\pi} - 1)q_1 q_2}, \quad a_1 = \frac{4/\sqrt{\pi}\, q_1 q_2 U_z}{q_1 + q_2 + (2d/\sqrt{\pi} - 1)q_1 q_2},$$

что совпадает с известным результатом [6].

Подставим формулу Сохоцкого (2.14) в решение (2.19) и (2.20). Получаем два уравнения:

$$2\pi i\eta b(\eta,-d) = -q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z)\left(\frac{f_1^{+}(\eta,\alpha)}{\lambda^{+}(\eta,\alpha)} - \frac{f_1^{-}(\eta,\alpha)}{\lambda^{-}(\eta,\alpha)}\right), \qquad (2.21)$$

$$2\pi i\eta b(\eta,d) = q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z)\left(\frac{f_1^{+}(\eta,\alpha)}{\lambda^{+}(\eta,\alpha)} - \frac{f_1^{-}(\eta,\alpha)}{\lambda^{-}(\eta,\alpha)}\right). \qquad (2.22)$$

Заметим, что

$$\frac{f_1^{+}(\eta,\alpha)}{\lambda^{+}(\eta,\alpha)} - \frac{f_1^{-}(\eta,\alpha)}{\lambda^{-}(\eta,\alpha)} = 4\pi i\gamma(|\eta|,\alpha)t_1(-|\eta|,\alpha), \qquad (2.23)$$

где $\gamma(\eta) = \dfrac{|\eta| K_B(\eta,\alpha)}{\lambda^{+}(\eta,\alpha)\lambda^{-}(\eta,\alpha)}$.

При $\mu \to -\infty$, имеем соотношение

$$\frac{f_1^{+}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)} - \frac{f_1^{-}(\eta)}{\lambda^{-}(\eta)} = 4\sqrt{\pi}i\gamma(|\eta|)t_1(-|\eta|), \text{ где } \gamma(\eta) = \frac{|\eta|\exp(-\eta^2)}{\lambda^{+}(\eta)\lambda^{-}(\eta)},$$

которое полностью совпадает с известным результатом [6] для классических газов.

Таким образом, учитывая (2.23) формулы (2.21) и (2.22) принимают вид:

$$\eta b(\eta,-d) = -2q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z)\gamma(|\eta|,\alpha)t_1(-|\eta|,\alpha) \qquad (2.24)$$

$$\eta b(\eta,d) = 2q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z)\gamma(|\eta|,\alpha)t_1(-|\eta|,\alpha), \qquad (2.25)$$

Из уравнений (2.24) и (2.25) находим, что

$$\eta\cdot sh\frac{2d}{\eta}A(\eta) = -\left(\exp\left(\frac{d}{\eta}\right)q_1(a_0 - a_1 d + 2U_z) + \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)q_2(a_0 + a_1 d - 2U_z)\right)\gamma(|\eta|,\alpha)t_1(-|\eta|,\alpha)$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты разложения (2.3) найдены. Это означает, что функция распределения полностью построена. При $\mu \to -\infty$ (когда квантовый газ переходит в классический) функция распределения молекул бозе-газа переходит в функцию распределения молекул классического газа [6].

## 3. МАКРОПАРАМЕТРЫ ГАЗА В КАНАЛЕ

С помощью функции распределения вычислим поток массы газа в канале в направлении оси $z$, приходящегося на единицу ширины канала. Будем использовать штрихованные переменные – размерные, нештрихованные – безразмерные. Выразим плотность потока массы через функцию $h(x',\mu)$.

$$j(x')=\int m\mathrm{v}_z f(x',\mathrm{v})d^3\Omega,\ d\Omega=\frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3}d^3v,$$

где s - спин частицы газа Бозе.

Учитывая функцию (1.4) и вычисляя соответствующие интегралы получим:

$$j(x)=-\frac{(2s+1)m^4}{(2\pi\hbar)^3\beta^2}\frac{m\pi}{\beta^2}l_0(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)h(x,\mu)d\mu\cdot \qquad (3.1)$$

Заметим, что плотность числа частиц определяется следующим выражением:

$$\rho=mn=-\frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3\beta^{\frac{3}{2}}}2m\pi l_0(\alpha)\cdot$$

Следовательно,

$$j(x)=\frac{\rho}{2\sqrt{\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)h(x,\mu)d\mu\cdot$$

Величина потока массы газа определяется через плотность потока массы (3.1) интегралом:

$$J_M=\int_{-d'}^{d'}j(x')dx'=\frac{1}{v\sqrt{\beta}}\int_{-d}^{d}j(x)dx,$$

$$J_M=\frac{\rho}{2v\beta}\int_{-d}^{d}dx\int_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)h(x,\mu)d\mu=\frac{\rho}{2v\beta}\int_{-d}^{d}j_1(x)dx\cdot$$

Здесь $j_1(x)$ - безразмерная плотность потока массы газа,

$$j_1(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)h(x,\mu)d\mu\cdot \qquad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) разложение (2.4) получим:

$$j_1(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu,\alpha) h_0(x,\mu) d\mu + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) A(\eta) d\eta$$

Следовательно, полный поток массы газа в канале равен:

$$J_M = \frac{\rho}{2\nu\beta}\int_{-d}^{d} dx \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu,\alpha) h_0(x,\mu) d\mu + \frac{\rho}{\nu\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \eta \cdot sh\frac{d}{\eta} A(\eta) d\eta \,. \qquad (3.3)$$

После подстановки в (3.3) коэффициентов $a_0$ и $a_1$ получаем:

$$J_M = \frac{2\rho}{\nu\beta}\frac{U_z(q_1-q_2)(\gamma_1^0 q_1 q_2 - d)}{q_1+q_2+(d(l_1/l_2)-1)q_1 q_2} \,. \qquad (3.4)$$

В формуле (3.4) перейдем к размерным переменным. Здесь $U_z = \sqrt{\beta}U'_z$, $d = \nu\sqrt{\beta}d' = \sqrt{\pi}/4Kn$, где $Kn$- число Кнудсена, $\eta = \rho/2\nu\beta$- динамическая вязкость. Следовательно,

$$J_M = 4\eta\sqrt{\beta}\,\frac{U'_z\,(q_1-q_2)(\gamma_1^0 q_1 q_2 - \sqrt{\pi}/4Kn)}{q_1+q_2+((\sqrt{\pi}l_1)/(4Kn\,l_2)-1)q_1 q_2} \,.$$

Найдем теперь силу вязкого трения в направлении оси z, которая приходится на единицу площади поверхности стенок канала.

$$F(x') = \int m\,\mathrm{v}_x \mathrm{v}_z f(x',\mathrm{v}) d^3\Omega, \; d\Omega = \frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3\,\mathrm{v} \,.$$

Переходя к безразмерным координатам и учитывая формулу (1.4) получим:

$$F(x) = -\frac{\rho}{2\pi\beta \cdot l_0(\alpha)}\int C_x C_z [f_B(\tilde{N}) + g_B(\tilde{N}) C_z h(x,C_x)] d^3C \,. \qquad (3.5)$$

Вычисляя все необходимые интегралы в формуле (3.5) формула силы вязкого трения будет иметь вид:

$$F(x) = \frac{\rho}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \mu K_B(\mu,\alpha) h(x,\mu) d\mu \,. \qquad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) разложение (2.4) и проводя ряд преобразований получим:

$$F = -pa_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu, \alpha) d\mu, \qquad (3.7)$$

Далее подставляя значение $a_1$ в формулу (3.7) находим поток массы газа:

$$F = -\frac{2q_1 q_2 U_z (l_1/l_2)}{q_1 + q_2 + (d\,(l_1/l_2) - 1)q_1 q_2}\, p \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu, \alpha) d\mu \cdot \qquad (3.8)$$

В формуле (3.8) перейдем к размерным переменным:

$$F = -\frac{2q_1 q_2 U'_z \sqrt{\beta}(l_1/l_2)}{q_1 + q_2 + ((\sqrt{\pi} l_1)/(4Kn\, l_2) - 1)q_1 q_2}\, p \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu, \alpha) d\mu \cdot$$

Найдем величину теплового потока в направлении оси z, приходящегося на единицу ширины канала.

$$q(x) = \frac{m}{2} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}(x)) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(x)|^2 f(x, \mathrm{v}) d^3\Omega, \; d\Omega = \frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3 \mathrm{v},$$

где $u(x)$ - массовая скорость газа.

В линейном приближении получаем:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}(x)) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(x)|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{u}(x))(\mathrm{v}^2 - 2\mathbf{v}\mathbf{u}(x)) = \mathbf{v}\,\mathrm{v}^2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{u}(x) - \mathrm{v}^2\, \mathbf{u}(x).$$

Следовательно,

$$q(x) = \frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m}{2} \int \left[ \mathrm{v_z v^2} - 2\mathrm{v_z v_z u_z (x)} - \mathrm{v^2 u_z (x)} \right] f(x, \mathrm{v}) d^3 \mathrm{v},$$

поток направлен вдоль оси z.

Перейдем к безразмерным координатам:

$$q(x) = -\frac{nm}{4\pi l_0(\alpha)\beta^{\frac{3}{2}}} \int [C_z C^2 - 2C_z C_z U_z(x) - C^2 U_z(x)][f_B(C) + g_B(C) C_z h(x, C_x)] d^3 C \cdot \qquad (3.9)$$

Вычисляя все необходимые интегралы в выражении (3.9) имеем:

$$q(x) = \frac{nkT}{2\sqrt{\beta}} \frac{1}{l_0(\alpha)} 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(x,\mu) \int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)|\, dC_\perp d\mu +$$
$$+ \frac{nkT}{2\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) h(x,\mu) d\mu - \frac{5nkT}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu,\alpha) h(x,\mu) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) d\mu. \tag{3.10}$$

Подставляя в (3.10) разложение (2.3') и интегрируя по толщине канала от –d до d по x, находим:

$$J_Q = \frac{nkT}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{l_0(\alpha)} \left\{ \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)| dC_\perp d\mu - 5 l_2(\alpha) \right] \left( \gamma_1^0 [-a_0(q_1+q_2) + (a_1 d - 2U_z)(q_1 - q_2)] + a_0 d \right) \right\} +$$
$$+ \frac{nkT}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{l_0(\alpha)} a_0 d l_2(\alpha) \tag{3.11}$$

В выражении (3.11) подставим коэффициенты $a_0$ и $a_1$ и получим явное выражение величины потока тепла:

$$J_Q = \frac{nkT}{l_0(\alpha)\sqrt{\beta}} \frac{2U_z(q_1 - q_2)}{q_1 + q_2 + (d(l_1/l_2) - 1) q_1 q_2} \left\{ \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)| dC_\perp d\mu - 5 l_2(\alpha) \right] (\gamma_1^0 q_1 q_2 - d) - d l_2(\alpha) \right\} \tag{3.12}$$

Перейдем в формуле (3.12) к размерным координатам:

Здесь $U_z = \sqrt{\beta} U'_z$, $d = \sqrt{\pi}/4Kn$, где $Kn$- число Кнудсена, $p = nkT = \nu\eta$ - давление газа.

$$J_Q = \frac{p}{l_0(\alpha)} \frac{2U'_z(q_1 - q_2)}{q_1 + q_2 + (\sqrt{\pi} l_1/4 l_2 Kn) - 1) q_1 q_2} \times$$
$$\times \left\{ \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)| dC_\perp d\mu - 5 l_2(\alpha) \right] (\gamma_1^0 q_1 q_2 - \sqrt{\pi}/4Kn) - (\sqrt{\pi} l_2(\alpha))/4Kn \right\}.$$

## 4. АНАЛИЗ МАКРОПАРАМЕТРОВ

Когда коэффициенты аккомодации тангенциального импульса на обоих поверхностях совпадает $q_1 = q_2$, то поток массы газа и тепловой поток газа равны нулю, т.е. совпадают.

Рассмотрим случай глубокого канала, когда число Кнудсена $Kn = \dfrac{l}{2d} << 1$. При этом возможны два режима течения газа в канале. Первый режим соответствует случаю, когда $Kn << q$, $q = \max(q_1, q_2)$. При этом знаменатели дробей $a_1$ и $a_0$ имеют вид:

$$q_1 + q_2 + (d(l_1/l_2) - 1) q_1 q_2 = d(l_1/l_2) q_1 q_2 + O(1).$$

Следовательно, выражения для макропараметров имеют соответственно следующий вид:

$$J_M = -4\eta \frac{U_z(q_1 - q_2)}{(l_1/l_2)q_1 q_2}, \quad F = -\frac{2U_z}{d} p \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) d\mu,$$

$$J_Q = \frac{p}{l_0(\alpha)\sqrt{\beta}} \frac{2U_z(q_1 - q_2)}{d\,(l_1/l_2)q_1 q_2}\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)|dC_\perp d\mu - 5l_2(\alpha)\right]\gamma_1^0 q_1 q_2$$

Переходя к размерным координатам имеем:

$$J_M = -4\eta \frac{\sqrt{\beta}U'_z(q_1 - q_2)}{(l_1/l_2)q_1 q_2},$$

$$F = -\frac{2\sqrt{\beta}U'_z}{\nu\sqrt{\beta}d'}\eta\nu \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) d\mu = -\eta\frac{2U'_z}{d'}\int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) d\mu,$$

$$J_Q = \frac{\eta}{l_0(\alpha)} \frac{2U'_z(q_1 - q_2)}{\sqrt{\beta}d'(l_1/l_2)}\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)|dC_\perp d\mu - 5l_2(\alpha)\right]\gamma_1^0.$$

Другой режим течения газа соответствует случаю, когда для числа Кнудсена выполняется неравенство $q << Kn << 1$, $q = \max(q_1, q_2)$. В этом случай знаменатель дроби $a_1$ и $a_0$ имеют вид:

$$q_1 + q_2 + (d\,(l_1/l_2) - 1)q_1 q_2 = q_1 + q_2 + o(1).$$

При этом макропараметры определяются следующими выражениями:

$$J_M = -\frac{2\rho}{\nu\beta}\frac{U_z(q_1 - q_2)}{q_1 + q_2} d, \quad F = -\frac{2q_1 q_2 U_z(l_1/l_2)}{q_1 + q_2} p \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) d\mu,$$

$$J_Q = \frac{nkT}{l_0(\alpha)\sqrt{\beta}} \frac{2\gamma_1^0 q_1 q_2 U_z(q_1 - q_2)}{q_1 + q_2}\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)|dC_\perp d\mu - 5l_2(\alpha)\right].$$

Переходя к размерным координатам получаем:

$$J_M = -\eta\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\beta}}{Kn}\frac{U'_z(q_1 - q_2)}{q_1 + q_2}, \quad F = -\frac{2\sqrt{\beta}q_1 q_2 U'_z(l_1/l_2)}{q_1 + q_2} p \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 K_B(\mu,\alpha) d\mu,$$

$$J_Q = \frac{p}{l_0(\alpha)} \frac{2\gamma_1^0 q_1 q_2 U'_z(q_1 - q_2)}{q_1 + q_2}\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} C_\perp \ln|1 - \exp(\alpha - C_\perp^2 - \mu^2)|dC_\perp d\mu - 5l_2(\alpha)\right].$$

Таким образом, для почти зеркальных условий существует режим, когда выражения для потока массы газа в канале и силы вязкого трения отличны от классических. Этот режим называют гидродинамическим режимом со скольжением. Переход к классическому режиму течения осуществляется при более сильном условии $Kn << q$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено решение задачи о течении Куэтта с почти зеркальными граничными условиями. Построена функция распределения квантового бозе-газа. С помощью функции распределения вычислены макропараметры газа, а именно получено выражение для силы вязкого трения, потока массы и тепла газа в канале. Проведен анализ полученных результатов и сравнение их с результатами, полученными для классических газов [6-7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2008. 230 с.
2. Siewert C.E. // Zeitschriff fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. Bd 54. S. 273.
3. Siewert C.E., Valougeorgis D. // Europ. J. of Mechanics B. Fluids. 2004. Vol. 23. P. 645.
4. Garcia R.D.M., Siewert C.E. // SIAM J. of Appl. Mathematics. 2007. Vol. 67. P. 1041.
5. Garcia R.D.M., Siewert C.E. // Europ. J. of Mechanics B. Fluids. 2009. Vol. 28. P. 387.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
7. В.Н. Попов, И.В. Тестова, А.А. Юшканов Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками, Журнал технической физики, 2011, том 81, вып. 1, с. 53-58.
8. Бедрикова Е.А., Латышев А.В. arXiv:1212.1270v1 [math-ph] 6 Dec 2012, http://arxiv.org/abs/1212.1270.