

# РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

---

УДК 517.9/98+533.72

**А.В. Латышев, А.А. Юшканов**

*Московский государственный областной университет (МГОУ),*

## **ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ**

*Аннотация.* Для одномерного линеаризованного кинетического уравнения получены аналитические решения задач о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) в случае, когда частота столкновений молекул постоянна. Рассматривается линеаризованное одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и диффузные граничные условия.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение, частота столкновений, законы сохранения, разделение переменных, характеристическое уравнение, дисперсионное уравнение, дискретный и непрерывный спектры характеристического уравнения, собственные функции, граничные задачи.

**A. Latyshev, A. Yushkanov**

*Moscow State Regional University*

## **BOUNDARY PROBLEMS FOR THE ONE-DIMENSIONAL KINETIC EQUATION WITH CONSTANT FREQUENCY OF COLLISIONS**

*Absrtact.* For the one-dimensional linear kinetic equations are received analytical decisions of problems about temperature jump and weak evaporation (condensation) in case when frequency of collisions of molecules is constant. The linear one-dimensional kinetic equation with integral of collisions type BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) and diffusive boundary conditions are considered.

*Keywords:* kinetic equation, frequency of collisions, preservation laws, division of variables, characteristical equation, dispersion equation, discrete and continuous spectra, eigen functions, boundary problems.

## Введение

В работе [1] было введено линейное одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул. При этом были использованы законы сохранения числовой плотности (концентрации) молекул, импульса молекул и энергии.

В [1] была доказана теорема о структуре общего решения введенного уравнения.

В работе [2], являющейся продолжением [1], получены точные решения задачи о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) в разреженном газе. Эти две задачи следуя [3] будем называть обобщенной задачей Смолуховского.

Кратко остановимся на истории аналитических решений обобщенной задачи Смолуховского.

Для простого (одноатомного) разреженного газа с постоянной частотой столкновений молекул аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского получено в [4].

В [5] обобщенная задача Смолуховского была аналитически решена для простого разреженного газа с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул.

В [6] была аналитически решена задача о сильном испарении (конденсации) с постоянной частотой столкновений.

Отметим, что впервые задача о температурном скачке с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул, была аналитически решена в работе [7].

Затем в работах [8, 9, 10] задача Смолуховского была обобщена на случай многоатомных (молекулярных) газов и получено аналитическое решение.

В работах [11, 12, 13] рассмотрена проблема, близкая к задаче о температурном скачке для электронов, о поведении квантового боза-газа при низких температурах. При этом было использовано кинетическое уравнение с возбуждением фононов согласно Н.Н. Боголюбову.

В работах [14, 15] была решена задача о температурном скачке для электронов вырожденной плазмы в металле.

В работе [16] аналитическое решение задачи Смолуховского было получено и для квантовых газов.

Одномерная задача о сильной конденсации была рассмотрена в работе [17].

В работе [18] задача Смолуховского об умеренно сильном испарении (или конденсации) и о температурном скачке рассматривалась с использованием одномерного кинетического уравнения. В этой работе

получено аналитическое решение задачи Смолуховского с применением уравнения Черчиньяни—Фрезотти [17].

В то же время остается нерешенной важная граничная задача о скачке температуры и концентрации с использованием БГК-уравнения с произвольной зависимостью частоты от скорости молекул.

В настоящей работе рассматривается аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского. Рассматривается случай постоянной частоты столкновений в модели одномерного газа. Модель одномерного газа давала результаты, согласующиеся с результатами, посвященными трехмерному газу [18].

### 1. Постановка задачи и основные уравнения

Приступим к постановке задачи Смолуховского для одномерного кинетического уравнения с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул.

Начнем с общей постановки. Пусть газ занимает полупространство  $x > 0$ . Задана температура поверхности  $T_s$  и концентрация насыщенного пара поверхности  $n_s$ . Вдали от поверхности газ движется с некоторой скоростью  $u$ , являющейся скоростью испарения (или конденсации), и имеет градиент температуры

$$g_T = \left( \frac{d \ln T}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

Необходимо определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости и градиента температуры.

В задаче о слабом испарении требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости, считая градиент температуры равным нулю, а скорость испарения (конденсации) достаточно малой. Последнее означает, что

$$u \ll v_T.$$

Здесь  $v_T$  – тепловая скорость молекул, имеющая порядок скорости звука,

$$v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta_s}}, \quad \beta_s = \frac{m}{2k_B T_s},$$

$m$  – масса молекулы,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T_s$  – температура поверхности

В задаче о скачке температуры требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от градиента температуры, при этом скорость испарения (конденсации) считается равной нулю, а градиент температуры считается малым. Это означает, что

$$l g_T \ll 1, \quad l = \tau v_T, \quad \tau = \frac{1}{v_0},$$

где  $l$  – средняя длина свободного пробега газовых молекул,  $\tau$  – среднее время релаксации, т.е. время между двумя последовательными столкновениями молекул.

Объединим обе задачи – о слабом испарении (конденсации) и скачке температуры – в одну. Будем предполагать малость градиента температуры (т.е. малость относительного перепада температуры на длине свободного пробега) и малость скорости газа по сравнению со скоростью звука. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде

$$f(x, v) = f_0(v)(1 + h(x, v)),$$

где

$$f_0(v) = n_s \left( \frac{m}{2\pi k_B T_s} \right)^{1/2} \exp\left[ -\frac{mv^2}{2k_B T_s} \right]$$

есть абсолютный максвеллиан.

Перейдем к безразмерной скорости

$$\mu = \sqrt{\beta} v = \frac{v}{v_T}$$

и безразмерной координате

$$x' = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k_B T_s}} x = \frac{x}{l}$$

Переменную  $x'$  будем снова обозначать через  $x$ .

Возьмем кинетическое уравнение [1]

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial h}{\partial x} + (1 + \sqrt{\pi} a |\mu|) h(x, \mu) = \\ = (1 + \sqrt{\pi} a |\mu|) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} (1 + \sqrt{\pi} a |\mu'|) q(\mu, \mu', a) h(x, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $q(\mu, \mu', a)$  – ядро уравнения,

$$q(\mu, \mu', a) = r_0(a) + r_1(a) \mu \mu' + r_2(a) (\mu^2 - \beta(a)) (\mu'^2 - \beta(a)),$$

$$r_0(a) = \frac{1}{a+1}, \quad r_1(a) = \frac{2}{2a+1}, \quad r_2(a) = \frac{4(a+1)}{4a^2+7a+2}.$$

При  $a \rightarrow 0$  из уравнения (1.1) получаем следующее кинетическое уравнение с постоянной частотой столкновений

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \left[ 1 + 2\mu\mu' + 2\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \left(\mu'^2 - \frac{1}{2}\right) \right] h(x, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее будем решать обобщенную задачу Смолуховского для уравнения (1.2).

## 2. Кинетическое уравнение с постоянной частотой столкновений. Собственные функции и собственные значения

Прямолинейной подстановкой можно проверить, что кинетическое уравнение (1.2) имеет следующие четыре частных решения:

$$h_0(x, \mu) = 1, \quad h_1(x, \mu) = \mu, \quad h_2(x, \mu) = \mu^2, \quad h_3(x, \mu) = \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(x - \mu).$$

Будем считать, что молекулы отражаются от стенки чисто диффузно, т.е. отражаются от стенки с максвелловским распределением по скоростям, т.е.  $f(x, v) = f_0(v)$ ,  $v_x > 0$ .

Отсюда для функции  $h(x, \mu)$  получаем:

$$h(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (2.1)$$

Условие (2.1) — это первое граничное условие к уравнению (1.2).

Асимптотическое распределение Чепмена—Энскога будем искать в виде линейной комбинации ее частных решений с неизвестными коэффициентами:

$$h_{as}(x, \mu) = A_0 + A_1\mu + A_2\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + A_3\left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(x - \mu). \quad (2.2)$$

Рассмотрим распределение числовой плотности:

$$n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v)(1 + h(x, v)) dv = n_0 + \delta n(x).$$

Здесь

$$n_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) dv, \quad \delta n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) h(x, v) dv.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) d\mu.$$

Обозначим:

$$n_e = n_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} (1 + h_{as}(x = 0, \mu)) d\mu.$$

Отсюда получаем, что

$$\varepsilon_n \equiv \frac{n_e - n_0}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h_{as}(x = 0, \mu) d\mu. \quad (2.3)$$

Величина  $\varepsilon_n$  – есть искомая величина скачка концентрации.

Подставляя (2.2) в (2.3), находим, что

$$\varepsilon_n = A_0. \quad (2.4)$$

Из определения размерной скорости газа

$$u(x) = \frac{1}{n(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) v dv$$

получаем, что в линейном приближении размерная массовая скорость равна:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \mu d\mu.$$

Задавая "вдали от стенки" скорость испарения (конденсации), напомним:

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h_{as}(x, \mu) \mu d\mu. \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.5) распределение (2.2), получаем, что

$$A_1 = 2U. \quad (2.6)$$

Рассмотрим распределение температуры:

$$T(x) = \frac{2}{kn(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} (v - u_0(x))^2 f(x, v) dv.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta T(x)}{T_0} &= -\frac{\delta n(x)}{n_0} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \mu^2 d\mu = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $x \rightarrow +\infty$  асимптотическое распределение температуры равно:

$$\frac{\delta T_{as}(x)}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h_{as}(x, \mu) \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) d\mu. \quad (2.7)$$

Задание градиента температуры вдали от стенки означает, что распределение температуры имеет вид:  $T(x) = T_e + \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=+\infty} \cdot x = T_e + G_T x$ , где

$$G_T = \left(\frac{dT}{dx}\right)_{+\infty}.$$

Это распределение представим в виде:

$$T(x) = T_s \left(\frac{T_e}{T_s} + g_T x\right) = T_s \left(1 + \frac{T_e - T_s}{T_s} + g_T x\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$g_T = \left(\frac{d \ln T}{dx}\right)_{x=+\infty},$$

или

$$T(x) = T_s (1 + \varepsilon_T + g_T x), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{T_e - T_s}{T_s}$$

– искомая величина скачка температуры.

Из выражения (2.7) видно, что относительное изменение температуры вдали от стенки описывается линейной функцией

$$\frac{\delta T_{as}(x)}{T_s} = \frac{T(x) - T_s}{T_s} = \varepsilon_T + g_T x, \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.8)$$

Подставляя (2.2) в (2.7), получаем, что

$$\frac{\delta T_{as}(x)}{T_s} = A_2 + A_3 x. \quad (2.10)$$

Сравнивая (2.7) и (2.10), находим:

$$A_2 = \varepsilon_T, \quad A_3 = g_T.$$

Итак, асимптотическая функция распределения Чепмена—Энскога построена:

$$h_{as}(x, \mu) = \varepsilon_n + \varepsilon_T + 2U\mu + \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right)[\varepsilon_T + g_T(x - \mu)].$$

Эта функция позволяет сформулировать второе граничное условие к уравнению (1.2):

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Теперь формулируем основную граничную задачу — обобщенную задачу Смолуховского. Эта задача состоит в нахождении такого решения кинетического уравнения (1.2), которое удовлетворяет граничным условиям (2.1) и (2.11).

### 3. Собственные функции и собственные значения

Разделение переменных в уравнении (1.2), взятое в виде

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad \eta \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

сводит это уравнение к характеристическому

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} n_0(\eta) + \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \mu n_1(\eta) + \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) n_2(\eta), \quad (3.2)$$

где  $\eta, \mu \in (-\infty, \infty)$ ,

$$n_0(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \Phi(\eta, \mu) d\mu, \quad n_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu \Phi(\eta, \mu) d\mu,$$

$$n_2(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu^2 \Phi(\eta, \mu) d\mu$$

— нулевой, первый и второй моменты собственной функции.

Умножая характеристическое уравнение (3.1) на  $e^{-\mu^2}$  и интегрируя по всей действительной оси, получаем, что

$$n_1(\eta) \equiv 0.$$

Умножая характеристическое уравнение (3.1) на  $\mu' e^{-\mu^2}$  и интегрируя по всей действительной оси, получаем, что

$$n_2(\eta) \equiv 0.$$

Получаем характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} - \mu^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \Phi(\eta, \mu) d\mu.$$

Примем далее следующее условие нормировки для собственных функций  $\Phi(\eta, \mu)$ :

$$n_0(\eta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \Phi(\eta, \mu) d\mu = 1. \quad (3.3)$$

Теперь характеристическое уравнение принимает вид:

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} - \mu^2\right). \quad (3.4)$$

Собственные функции непрерывного спектра, заполняющего сплошным образом интервал  $(-\infty, \infty)$ , находим [19] в пространстве обобщенных функций

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{2} - \mu^2 \right) P \frac{1}{\eta - \mu} + e^{\eta^2} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad \eta(-\infty, \infty). \quad (3.5)$$

Здесь  $\lambda(\eta)$  – дисперсионная функция, определяемая из уравнения (3.3),  $Px^{-1}$  – распределение, означающее главное значение интеграла при интегрировании  $x^{-1}$ ,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,

$$\lambda(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \frac{\frac{3}{2} - \tau^2}{\tau - z} d\tau = -\frac{1}{2} + \left( \frac{3}{2} - z^2 \right) \lambda_0(z),$$

где

$$\lambda_0(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \tau \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Как видно из решения характеристического уравнения, непрерывным спектром характеристического уравнения является множество

$$\sigma_{\mu} = \{\eta: -\infty < \eta < +\infty\}.$$

По определению дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионной функции.

Разлагая дисперсионную функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, убеждаемся, что она в этой точке имеет нуль четвертого порядка. Применяя принцип аргумента из теории функций комплексного переменного, можно показать, что других нулей, кроме  $z_i = \infty$ , дисперсионная функция не имеет. Таким образом, дискретный спектр характеристического уравнения состоит из одной точки  $z_i = \infty$ , кратность которой равна четырем,  $\sigma_d = \{z_i = \infty\}$ .

Точке  $z_i = \infty$ , как 4-кратной точке дискретного спектра, отвечает следующие четыре дискретные (частные) решения кинетического решения (1.2):  $h_0(x, \mu)$ ,  $h_1(x, \mu)$ ,  $h_3(x, \mu)$  и  $h_3(x, \mu)$ .

#### 4. Однородная краевая задача Римана

В этом п. мы рассмотрим однородную краевую задачу Римана из теории функций комплексного переменного, которая понадобится далее. Эта задача состоит в нахождении такой функции  $X(z)$ , которая является аналитической в комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной положительной полуоси  $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ .

Граничные значения этой функции сверху и снизу на действительной полуоси удовлетворяют краевому

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0. \quad (4.1)$$

Заметим, что

$$|\lambda^+(\mu)| = |\lambda^-(\mu)|, \quad \lambda^+(\mu) = \overline{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu \in (-\infty, +\infty).$$

Введем главное значение аргумента  $\theta(\mu) = \arg \lambda^+(\mu)$ , определенное в разрезанной плоскости  $\mathbb{C}'$  и фиксированное в нуле условием  $\theta(0) = 0$ . Тогда

$$\lambda^+(\mu) = |\lambda^+(\mu)|e^{i\theta(\mu)}, \quad \lambda^-(\mu) = |\lambda^-(\mu)|e^{-i\theta(\mu)}.$$

Теперь задача (4.1) переписывается в виде:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = e^{2i\theta(\mu)}, \quad \mu > 0. \quad (4.2)$$

Логарифмируя задачу (4.2), мы получаем следующее счетное семейство задач нахождения аналитической функции по ее нулевому скачку на положительной действительной полуоси  $\mathbb{R}^+ = \{\mu: \mu > 0\}$ :

$$\ln X^+(\mu) - \ln X^-(\mu) = 2i\theta(\mu) + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mu > 0. \quad (4.3)$$

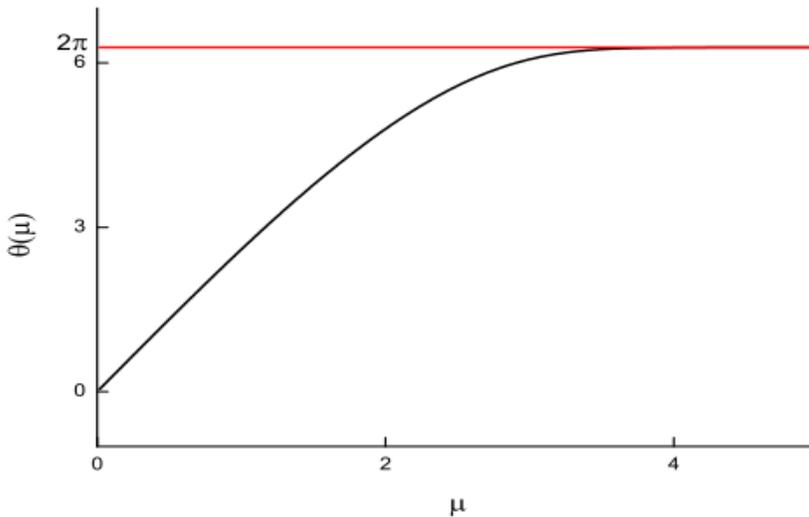


Рис. 1. Угол  $\theta = \theta(\mu)$  монотонно возрастает от 0 до  $2\pi$ .

Решение задач (4.3) выражается интегралом типа Коши:

$$\ln X(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\theta(\mu) + k\pi}{\mu - z} d\mu, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что угол  $\theta(\mu)$  является на полуоси  $\mathbb{R}^+$  монотонно возрастающей функцией от 0 до  $2\pi$ . Это означает, что индекс коэффициента  $G(\mu) = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}$  однородной задачи Римана (5.1) на положительной действительной полуоси равен единице:

$$\dot{\nu} = \dot{\nu}(G) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(\mu)]|_0^{\infty} = 1.$$

Отсюда следует, что среди семейства решений (4.3) лишь одно (при  $k = -2$ ) решение выражается сходящимся интегралом типа Коши:

$$\ln X(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\theta(\mu) - 2\pi}{\mu - z} d\mu. \quad (4.4)$$

Обозначим далее

$$V(z) = \ln X(z). \quad \text{откуда} \quad X(z) = e^{V(z)}.$$

Переопределим полученное решение следующим образом:

$$X(z) = \frac{1}{z^2} e^{V(z)}. \quad (4.5)$$

Заметим, что решение (4.5) является ограниченным в окрестности начала координат. В самом деле, при  $z \rightarrow 0$  имеем:

$$V(z) = -\frac{\theta(0) - 2\pi}{\pi} \ln z + O(z), \quad z \rightarrow 0,$$

где  $O(z)$  – ограниченная в начале координат функция. Следовательно, в окрестности начала координат функция  $X(z) = e^{O(z)}$  – ограниченная функция.

### 5. Аналитическое решение граничной задачи для кинетического уравнения с постоянной частотой столкновений

В этом п. докажем теорему об аналитическом решении основной граничной задачи (1.2), (2.1) и (2.11).

*Теорема. Граничная задача (1.2), (2.1) и (2.11) имеет единственное решение, представимое в виде суммы линейной комбинации дискретных*

(частных) решений этого уравнения и интеграла по непрерывному спектру от собственных функций, отвечающих непрерывному спектру:

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta. \quad (5.1)$$

В равенстве (5.1)  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_T$  – неизвестные коэффициенты (дискретного спектра),  $U$  и  $g_T$  – заданные величины,  $A(\eta)$  – неизвестная функция – коэффициент непрерывного спектра.

Коэффициенты дискретного и непрерывного спектров подлежат нахождению из граничных условий.

Разложение (5.1) можно представить в явном виде классическом смысле:

$$h(x, \mu) = \varepsilon_n + \varepsilon_T + 2U\mu + \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right)[\varepsilon_T + g_T(x - \mu)] + e^{\mu^2 - x/\mu} \lambda(\mu) A(\mu) + \left(\frac{3}{2} - \mu^2\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x/\eta} \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta. \quad (5.1')$$

Доказательство. Подставим разложение (5.1) в граничное условие (2.1). Получаем интегральное уравнение

$$h_{as}(0, \mu) + \int_0^{\infty} \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta = 0, \quad 0 < \mu < \infty.$$

В явном виде это уравнение имеет вид:

$$h_{as}(0, \mu) + e^{\mu^2} \lambda(\mu) A(\mu) + \left(\frac{3}{2} - \mu^2\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta = 0, \quad (5.2)$$

$$0 < \mu < \infty.$$

Здесь  $h_{as}(0, \mu) = \varepsilon_n + \varepsilon_T + 2U\mu + \left(\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(\varepsilon_T - g_T\mu)$ .

Введем вспомогательную функцию:

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta A(\eta)}{\eta - z} d\eta, \quad (5.3)$$

для которой, согласно формулам Сохоцкого, имеем:

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu A(\mu), \quad 0 < \mu < \infty, \quad (5.4)$$

$$\frac{N^+(\mu) + N^-(\mu)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta, \quad 0 < \mu < \infty. \quad (5.5)$$

Преобразуем уравнение (5.2), учитывая формулы Сохоцкого для дисперсионной функции и согласно равенствам (5.4) и (5.5). Получаем неоднородной краевое условие: Учитывая формулы Сохоцкого для дисперсионной функции, преобразуем уравнение (5.6) к неоднородной краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)\left[\left(\frac{3}{2} - \mu^2\right)N^+(\mu) + h_{as}(0, \mu)\right] - \lambda^-(\mu)\left[\left(\frac{3}{2} - \mu^2\right)N^-(\mu) + h_{as}(0, \mu)\right] = 0, \quad 0 < \mu < \infty. \quad (5.6)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < \infty. \quad (5.7)$$

Решение этой задачи, ограниченное и неисчезающее в точках  $z = 0$  и  $z = \alpha$  приведено в предыдущем п.:

$$X(z) = \frac{1}{z^2} \exp V(z), \quad (5.8)$$

где

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\theta(\mu) - 2\pi}{\mu - z} d\mu, \quad (5.9)$$

а  $\theta(\mu) = \arg \lambda^+(\mu)$  – главное значение аргумента, фиксированное в нуле условием:  $\theta(0) = 0$ .

Преобразуем задачу (5.6) с помощью однородной задачи (5.7) к задаче нахождения аналитической функции по ее скачку на разрезе, равному нулю:

$$\begin{aligned} X^+(\mu)\left[\left(\frac{3}{2} - \mu^2\right)N^+(\mu) + h_{as}(0, \mu)\right] = \\ = X^-(\mu)\left[\left(\frac{3}{2} - \mu^2\right)N^-(\mu) + h_{as}(0, \mu)\right], \quad 0 < \mu < \infty. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Выясним особенности краевого условия (5.10). Учитывая поведение функций, входящих в краевое условие (5.10), получаем общее решение соответствующей краевой задач:

$$\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)N(z) = h_{as}(0, z) + \frac{C_0 + C_1 z}{X(z)}, \quad (5.11)$$

где  $C_0$  и  $C_1$  – произвольные постоянные, а

$$h_{as}(0, z) = \varepsilon_n + \varepsilon_T + 2U\mu + \left(z^2 - \frac{3}{2}\right)(\varepsilon_T - g_T z).$$

Заметим, что решение (5.11) имеет в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$  полюс третьего порядка, в то время как функция  $N(z)$ , определенная равенством (5.3), имеет в этой точке полюс первого порядка.

Чтобы решение (5.11) можно было принять в качестве функции  $N(z)$ , определенной равенством (5.3), понизим порядок полюса у решения (5.11) с трех до единицы.

Затем приравняем значения левой и правой частей равенства (5.11) в точках действительной оси  $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{3/2}$ .

Нам понадобится разложение:

$$V(z) = \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2} + \dots, \quad z \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$V_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau^{n-1} [\theta(\tau) - 2\pi] d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Понижая порядок полюс на две единицы в бесконечно удаленной точке у решения (5.11), находим, что

$$\begin{aligned} C_0 &= V_1 g_T - \varepsilon_T, \\ C_1 &= g_T. \end{aligned}$$

Полюс функции в точке  $\mu_1 = \sqrt{3/2}$  уничтожается предельным условием на разрезе:

$$C_0 + C_1 \mu_1 + X(\mu_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_T + 2U\mu_1) = 0. \quad (5.12)$$

Точка  $\mu_2 = -\mu_1$  не принадлежит разрезу, поэтому мы получаем:

$$C_0 - C_1 \mu_1 + X(-\mu_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_T - 2U\mu_1) = 0. \quad (5.13)$$

С учетом этого равенства из уравнений (5.12) и (5.13) получаем выражения искомым величин скачка температуры и скачка концентрации:

$$\varepsilon_T = g_T \left[ V_1 - \mu_1 \frac{X(\mu_1) + X(-\mu_1)}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)} \right] - 4U\mu_1 \frac{X(\mu_1)X(-\mu_1)}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)} \quad (5.14)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= g_T \left[ V_1 + \mu_1 \frac{X(\mu_1) + X(-\mu_1) - 2}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)} \right] - \\ &- 2U\mu_1 \frac{X(\mu_1) + X(-\mu_1) - 2X(\mu_1)X(-\mu_1)}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Коэффициент непрерывного  $A(\eta)$  спектра находится на основании формулы Сохоцкого (5.4) и формулы разности граничных значений  $N(z)$ , получаемой с помощью решения (5.11):

$$N + (\mu) - N^-(\mu) = \frac{C_0 + C_1 \mu}{\mu^2 - 3/2} \left[ \frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right]. \quad (5.16)$$

Из равенств (5.4) и (5.16) находим коэффициент непрерывного спектра:

$$2\sqrt{\pi}i\eta A(\eta) = \frac{g_T(V_1 + \eta) - \varepsilon_T}{\eta^2 - 3/2} \left[ \frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right]. \quad (5.17)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} = -\frac{2i}{X(\eta)} \sin\theta(\eta).$$

С помощью этого равенства коэффициент непрерывного спектра (5.17) окончательно равен:

$$\eta A(\eta) = -\frac{(V_1 + \eta)g_T - \varepsilon_T}{\sqrt{\pi}X(\eta)(\eta^2 - 3/2)} \sin\theta(\eta).$$

Итак, все коэффициенты разложения (5.1) установлены. По построению, разложение (5.1) удовлетворяет граничным условиям (2.1) и (2.11). Тот факт, что разложение (5.1) удовлетворяет уравнению (1.2), проверяется непосредственно.

Единственность разложения (5.1) доказывается методом от противного. Теорема доказана.

## 6. Температурный скачок и слабое испарение (конденсация).

### Численные расчеты

Численные расчеты коэффициентов  $V_n$  приводят к следующим результатам:

$$V_1 = 2.6470 \dots, \quad V_2 = 2.5, \quad V_3 = 3.7153 \dots,$$

а также

$$\mu_1 = 1.2247 \dots, \quad X(\mu_1) = 3.8483 \dots, \quad X(-\mu_1) = 0.1732 \dots.$$

Теперь нам потребуется следующая

Теорема. Для дисперсионной функции  $\lambda(z)$  имеет место следующая формула факторизации:  $\lambda(z) = -\frac{3}{4}X(z)X(-z)$ ,  $z \in \mathbb{C}'$ ,

$$\lambda^+(\mu) = -\frac{3}{4}X^+(\mu)X(-\mu), \quad \mu > 0,$$

$$\lambda^-(\mu) = -\frac{3}{4}X(\mu)X^+(-\mu), \quad \mu < 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как и доказательство аналогичных теорем в наших работах [3].

С помощью этой теоремы находим точное значение

$$X(\mu_1)X(-\mu_1) = \frac{2}{3}.$$

Перепишем формулы (5.14) и (5.15) в виде:

$$\varepsilon_T = K_{TT}g_T + K_{TU}(2U), \quad \varepsilon_n = K_{nT}g_T + K_{nU}(2U).$$

Здесь

$$K_{TT} = V_1 - \mu_1 \frac{X(\mu_1) + X(-\mu_1)}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)}, \quad K_{TU} = -2\mu_1 \frac{X(\mu_1)X(-\mu_1)}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)},$$

$$K_{nT} = V_1 + \mu_1 \frac{X(\mu_1) + X(-\mu_1) - 2}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)}, \quad K_{nU} = -\mu_1 \frac{X(\mu_1) + X(-\mu_1) - 2X(\mu_1)X(-\mu_1)}{X(\mu_1) - X(-\mu_1)}.$$

Теперь легко найти, что

$$K_{TT} = 1.3068, \quad K_{TU} = -0.4443, \quad K_{nT} = 3.3207, \quad K_{nU} = -0.8958.$$

Следовательно, коэффициенты скачка температуры и скачка концентрации вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_T = 1.3068g_T - 0.4443(2U), \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_n = -3.3207g_T - 0.8958(2U). \quad (6.2)$$

### 7. Распределение макропараметров газа в "полупространстве"

Рассмотрим распределение концентрации, массовой скорости и температуры в зависимости от координаты  $x$ .

Начнем с распределения концентрации (числовой плотности):

$$\begin{aligned} \frac{\delta n(x)}{n_0} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} [h_{as}(x, \mu) + \int_0^{\infty} e^{-x/\eta} \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta] d\mu = \\ &= \varepsilon_T - g_T x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x/\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\mu. \end{aligned}$$

Воспользовавшись нормировочным соотношением (3.3), получаем:

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = \varepsilon_T - g_T x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x/\eta} A(\eta) d\eta.$$

Преобразуем коэффициент непрерывного спектра. Заметим, что

$$\sin\theta(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} (3/2 - \eta^2)}{|\lambda^+(\eta)|}.$$

Поэтому

$$A(\eta) = \frac{(V_1 + \eta)g_T - \varepsilon_T}{X(\eta)|\lambda^+(\eta)|} e^{-\eta^2}.$$

Следовательно, мы приходим к следующему распределению концентрации

$$\frac{\delta n(x)}{n_0} = [K_{TT}(1 - m_0(x)) - x + V_1 m_0(x) + m_1(x)]g_T + K_{TU}(1 - m_0(x))(2U).$$

$$\text{Здесь } m_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{\eta} - \eta^2} \eta^k d\eta}{X(\eta)|\lambda^+(\eta)|}, \quad k = 0, 1.$$

Массовая скорость  $U(x)$  равна везде при  $x > 0$  заданной на бесконечности скорости, т.е.  $U(x) \equiv U$ . В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x, \mu) \mu d\mu = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} [h_{as}(x, \mu) + \int_0^\infty e^{-x/\eta} \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta] \mu d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$U(x) = U + \int_0^\infty e^{-x/\eta} A(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu \Phi(\eta, \mu) d\mu \equiv U,$$

ибо первый момент собственной функции  $\Phi(\eta, \mu)$  равен нулю, как было показано выше.

Рассмотрим распределение температуры:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T(x)}{T_0} &= \varepsilon_T + g_T x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} (\mu^2 - \frac{1}{2}) h(x, \mu) d\mu = \\ &= \varepsilon_T + g_T x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x/\eta} A(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} (\mu^2 - \frac{1}{2}) \Phi(\eta, \mu) d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая, что второй момент собственной функции  $\Phi(\eta, \mu)$  равен нулю, отсюда получаем распределение температуры

$$\begin{aligned} \frac{\delta T(x)}{T_0} &= \varepsilon_T + g_T x - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x/\eta} A(\eta) d\eta = \\ &= [x - m_1(x) + K_{TT}(1 + m_0(x))]g_T + K_{TU}(1 + m_0(x))(2U). \end{aligned}$$

## 8. Заключение

В настоящей работе рассматривается аналитическое решение граничных задач для одномерного кинетического уравнения с постоянной частотой столкновений молекул. Дается аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского – задачи о температурном скачке и слабом испарении (конденсации). Получено распределение концентрации и температуры в "полупространстве"  $x > 0$ . Проведены численные расчеты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bugrimov A.L., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The kinetic one-dimensional equation with frequency of collisions, affine depending on the module molecular velocity// arXiv:1403.2068v1 [math-ph] 9 Mar 2014, 20pp.
2. Bugrimov A.L., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Boundary problems for the one-dimensional kinetic equation with frequency of collisions, affine depending on the module velocity// ArXiv:1403. 5854, [math-ph] 23 Mar 2014, 30 pp.
3. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Kinetic equations type Williams and their exact solutions. Monograph. M.: MGOU (Moscow State Regional University), 2004, 271 p. [russian].
4. Latyshev A.V. Application of case' method to the solution of linear kinetic BGK equation in a problem about temperature jump// Appl. math. and mech. 1990. V. 54. Is. 4. P. 581–586. [russian].
5. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Boundary problems for model Boltzmann equation with frequency proportional to velocity of molecules// Izvestiya Russian Academy of Science. Ser. Mechanika, Fluid and Gas (Russian "Fluids Dynamics"). 1993. 6. 143-155 pp. [russian].
6. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of the problem about strong evaporation (condensation)// Izvestiya Russian Academy of Science. Ser. Mechanika, Fluid and Gas (Russian "Fluids Dynamics"). 1993. 6. 143-155 pp. [russian].
7. Cassell J.S., Williams M.M.R. An exact solution of the temperature slip problem in rarefied gases// Transport Theory and Statist. Physics, 2(1), 81–90 (1972).
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump and weak evaporation in molecular gases// J. of experim. and theor. physics. 1998. V. 114. Issue. 3(9). P. 956–971. [russian].

9. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The Smoluchowski problem in polyatomic gases// Letters in J. of Tech. Phys. 1998. V. 24. 17. P. 85–90. [russian].
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytic solutions of boundary value problem for model kinetic equations// Math. Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and control in condensed Systems and Other Media. Edited by L.A. Uvarova and A.V. Latyshev. Kluwer Academic. New York–Moscow. 2001. P. 17–24.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smolukhowski problem for degenerate Bose gases// Theoretical and Mathematical Physics. Springer New York. Vol. 155, 3, June, 2008, pp. 936 – 948.
12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases in the presence of the Bose–Einstein condensate // Theor. Math. Phys. 2010. V. 162(1). P. 95–105 [russian].
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose–Einstein condensate, Theor. Math. Phys., 165:1 (2010), 1358–1370.
14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for electrons in metal// Theor. Math. Phys. 2005, january, V. 142. 1. C. 93–111. [russian].
15. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for metals with mirror-diffusive boundary conditions //Theor. and Math. Phys. October 2009, Volume 161, Is. 1, pp. 1403-1414.
16. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Boundary value problems for quantum gases. Monograph M.: MGOU, 2012, 266 p.[russian].
17. Cercignani C., Frezzoti A. Linearized analysis of a one-speed B.G.K. model in the case of strong condensation// Bulgarian Academy of sci. theor. appl. mech. Sofia. 1988. V.XIX. 3. 19-23 P.
18. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of one-dimensional problem about moderate strong evaporation (and condensation) in half-space// Appl. mech. and tech. physics. 1993. 1. 102-109 p. [russian].
19. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. Equations of mathematical physics. M.: Fizmatlit. 2000. 399 c. [russian].
20. Gakhov F.D. Boundary value problems. M.: Nauka. 640 p.[russian].