МАТЕМАТИКА

УДК 517.9/98+533.72

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, АФФИННО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ СКОРОСТИ

А.Л. Бугримов, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет (МГОУ),
105005, Москва, ул. Радио, 10 а

Аннотация. Для одномерного линеаризованного кинетического уравнения получены аналитические решения задач о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) над плоской поверхностью. Уравнение имеет интеграл столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук)и частоту столкновений молекул, аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости.
Ключевые слова: кинетическое уравнение, частота столкновений, законы сохранения, разделение переменных, характеристическое уравнение, дисперсионное уравнение, дискретный и непрерывный спектры, собственные функции, задача Смолуховского.

Введение

В работе [1] было введено линейное одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул.

В [1] была доказана теорема о структуре общего решения введенного уравнения.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1], получены точные решения задачи о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) в разреженном газе. Эти две задачи следуя [2] будем называть обобщенной задачей Смолуховского, или просто задачей Смолуховского.

Остановимся на истории исключительно аналитических решений обобщенной задачи Смолуховского.

Для простого (одноатомного) разреженного газа с постоянной частотой столкновений молекул аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского получено в [3].

В [4] обобщенная задача Смолуховского была аналитически решена для простого разреженного газа с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул.

В [5] была аналитически решена задача о сильном испарении (конденсации) с постоянной частотой столкновений.

Отметим, что впервые задача о температурном скачке с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул, была аналитически решена Кесселем и Вильямсом в работе [6] в 1972 году.

Затем в работах [7,8,9] задача Смолуховского была обобщена на случай многоатомных (молекулярных) газов и получено аналитическое решение.

В работах [10,11,12] рассмотрена проблема, близкая к задаче о температурном скачке для электронов, о поведении квантового бозе-газа при низких температурах. При этом было использовано кинетическое уравнение с возбуждением фононов согласно Н.Н. Боголюбову.

В работах [13,14] была решена задача о температурном скачке для электронов вырожденной плазмы в металле.

В работе [15] аналитическое решение задачи Смолуховского было получено и для квантовых газов.

В работах Черчиньяни и Фрезотти [16] задача Смолуховского рассматривалась с использованием одномерного кинетического уравнения. Полное аналитическое решение задачи Смолуховского с использованием уравнения Черчиньяни–Фрезотти было получено в работе [17].

В то же время остается нерешенная задача о скачке температуры и концентрации с использованием БГК-уравнения с произвольной зависимостью частоты от скорости, несмотря на очевидную важность решения задачи в подобной постановке.

В настоящей работе делается попытка продвинуться в этом направлении. Здесь рассматривается случай аффинной зависимости частоты столкновений от скорости молекул в модели одномерного газа. Модель одномерного газа давала хорошее согласие с результатами, посвященными трехмерному газу [17].

Приступим к постановке и решению задачи Смолуховского для одномерного кинетического уравнения с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Начнем с общей постановки. Пусть газ занимает полупространство x>0. Задана температура поверхности T_s и концентрация насыщенного пара поверхности n_s.

Вдали от поверхности газ движется с некоторой скоростью ***u*** и имеет градиент температуры

$$g_T = \left(\frac{d\ lnT}{dx}\right)_{x=+\infty}.$$

Необходимо определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости и градиента температуры.

В задаче о слабом испарении (конденсации) требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданной скорости испарения (конденсации), считая градиент температуры равным нулю. Заданная скорость испарения (конденсации) считается много меньшей тепловой скорости молекул:

$$u \ll v_T,$$

где v_T – есть тепловая скорость молекул, m – масса молекулы,

$$v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad \beta = \frac{m}{2kT_s},$$

k – постоянная Больцмана.

В задаче о температурном скачке требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданного градиента температуры, считая, что скорость испарения (конденсации) равна нулю. Будем считать, что градиент температуры достаточно мал. Малость понимается в том смысле, что произведение средней длины свободного пробега молекул на градиент температуры много меньше единицы:

$$l g_T \ll 1, \qquad l = v_T \tau,$$

где τ – среднее время свободного пробега газовых молекул.

Скорость испарения (конденсации) в этой задаче равна нулю.

Объединим обе задачи – о слабом испарении (конденсации) и скачке температуры – в одну. Будем предполагать малость градиента температуры (т.е. малость относительного перепада температуры на длине свободного пробега) и малость скорости газа по сравнению со скоростью звука. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде

$$f(x,v) = f_0(v)\big(1 + h(x,v)\big),$$

где

$$f_0(v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_s}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT_s}\right]$$

- есть абсолютный максвеллиан.

Возьмем линейное кинетическое уравнение, записанное относительно функции h(x,v) с интегралом столкновений релаксационного типа, называемым также [1] интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук), и имеющее следующую общую форму:

$$v\frac{\partial}{\partial x}h(x,v) = \nu(v)\left[l_1[h] + 2\frac{v}{v_T}l_2[h] + \left(\left(\frac{v}{v_T}\right)^2 - \beta(a)\right)l_3[h] - h(x,v)\right] \qquad (1.1)$$

Здесь $l_m[h]$ $(m = 0,1,2)$ – некоторые постоянные, подлежащие определению из законов сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии, $\nu(v)$ – частота столкновений молекул, аффинно зависящая от модуля скорости молекул,

$$\nu(v) = \nu_0\big(1 + a\sqrt{\pi\beta}|v|\big),$$

a – некоторый неотрицательный параметр.

Правая часть уравнения (1.1) есть линеаризованный интеграл столкновений, разложенный по инвариантом столкновений

$$Y_0(v)=1,\quad Y_1(v)=2\sqrt{\beta}v,\quad Y_2(v)=\beta v^2-\beta(a).$$

Постоянная $\beta(a)$ находится, как уже указывалось, из условия ортогональности инвариантов $Y_0(v)$ и $Y_2(v)$:

$$\beta=\beta(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{a+1}.$$

Ортогональность здесь понимается как равенство нулю скалярного произведения с весом $\rho(v)=\nu(v)e^{-\beta v^2}$:

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(v)f(v)g(v)dv.$$

Перейдем в уравнении (1.1) к безразмерной скорости $C=\sqrt{\beta}v$ и безразмерной координате x` = x/l, l – средняя длина свободного пробега газовых молекул. Переменную x` далее снова будем обозначать через x.

В безразмерных переменных уравнение (1.1) записывается в виде:

$$c\frac{\partial h(x,c)}{\partial x}=\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)\left[l_0[h]+2cl_1[h]+\left(c^2-\beta(a)\right)l_2[h]-h(x,c)\right]. \qquad (1.2)$$

2. Законы сохранения и преобразование кинетического уравнения

Модельный интеграл столкновений должен удовлетворять законам сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии:

$$(Y_m,M[h])=\nu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(c)M[h]Y_m(c)dc=0,\quad m=0,1,2, \qquad (2.1)$$

$\rho(c)M[h]$ – модельный интеграл столкновений,

$$M[h]=l_0[h]+2cl_1[h]+\left(c^2-\beta(a)\right)l_2[h]-h(x,c).$$

Из первого уравнения из (2.1) при m=0, т.е. закона сохранения числа частиц получаем, что

$$l_0[h]=\frac{(1,h)}{(1,1)}.$$

Здесь:

$$(1,1)=\nu_0\sqrt{\pi}(a+1),$$

$$(1,h) = \nu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} \left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right) h(x,c)dc.$$

Из второго уравнения из (2.1) при m=1, т.е. закона сохранения импульса получаем, что

$$2l_1[h] = \frac{(c,h)}{(c,c)}.$$

Здесь

$$(c,c) = 0.5\nu_0\sqrt{\pi}(2a+1),$$
$$(c,h) = \nu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} \left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right) c h(x,c)dc.$$

Из третьего уравнения из (2.1) при m=2, т.е. закона сохранения энергии находим, что

$$l_2[h] = \frac{\left(c^2-\beta(a),h\right)}{\left(c^2-\beta(a),c^2-\beta(a)\right)}.$$

Здесь

$$\left(c^2-\beta(a),c^2-\beta(a)\right) = 0.25\nu_0\sqrt{\pi}\,\frac{4a^2+7a+2}{a+1}$$
$$(c^2-\beta(a),h) = \nu_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} \left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)(c^2-\beta(a))h(x,c)dc.$$

Вернемся к уравнению (1.2) и с помощью полученных выше равенств преобразуем это уравнение к виду:

$$c\frac{\partial}{\partial x}h(x,c) + \left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)h(x,c) =$$
$$-\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2}\left(1+\sqrt{\pi}a|c'|\right)q(c,c',a)\,h(x,c')dc'. \tag{2.2}$$

Здесь

$$q(c,c'a) = r_0(a) + r_1(a)cc' + r_2(a)(c^2-\beta(a))\left(c'^2-\beta(a)\right),$$
$$r_0 = r_0(a) = \frac{1}{a+1}, \qquad r_1 = r_1(a) = \frac{2}{2a+1},$$
$$r_2 = r_2(a) = \frac{4(a+1)}{4a^2+7a+2}, \qquad \beta = \beta(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{a+1}.$$

Граничные условия задачи формулируются следующим образом:

$$h(0,c) = 0,\ 0 < c < +\infty, \tag{2.3}$$

и

$$h(x,c) = h_{as}(x,c) + o(1), x \to +\infty, -\infty < c < 0, \tag{2.4}$$

где

$$h_{as}(x,c) = \delta_n + \delta_T + (2u + A\omega)c + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\left[\delta_T + A\left(x - \frac{c}{1+\sqrt{\pi}a|c|}\right)\right],$$

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2}c^2\left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{dc}{1+\sqrt{\pi}a|c|}. \tag{2.5}$$

В асимптотическое распределение Чепмена–Энскога входят неизвестные величины скачков концентрации δ_n и температуры δ_T . Эти величины являются основными неизвестными в обобщенной задаче Смолуховского.

В уравнении (2.2) осуществим замену $\sqrt{\pi}a \to a$ и запишем полученное уравнение в следующем виде

$$\frac{v}{1+|v|}\frac{\partial}{\partial x}h(x,v) + h(x,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v'^2}q(v,v')(1+a|v'|)h(x,v')dv'. \tag{2.6}$$

В этом уравнении ядро $q(v,v')$ имеет тот же вид, что и ранее, но теперь r_0, r_1, r_2 и β выражаются равенствами:

$$r_0(a) = \frac{1}{a+\sqrt{\pi}}, \qquad r_1(a) = \frac{2}{2a+\sqrt{\pi}},$$

$$r_2(a) = \frac{4(a+\sqrt{\pi})}{4a^2+7\sqrt{\pi}a+2\pi}, \qquad \beta(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a+\sqrt{\pi}}{a+\sqrt{\pi}};$$

Сделаем в уравнении (2.6) замену переменных $v = v(\mu)$ и $v' = v(\mu')$, где

$$v(\mu) = \frac{\mu}{1-a|\mu|}, \qquad |\mu| < \alpha, \qquad \alpha = \frac{1}{a}. \tag{2.7}$$

Обозначим функцию $h(x, v(\mu))$ снова через $h(x,\mu)$. После замены (2.7) уравнение (2.6) переходит в уравнение

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mu) + h(x,\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} q(\mu,\mu')h(x,\mu')\rho(\mu')d\mu'. \tag{2.8}$$

Здесь

$$q(\mu,\mu') = r_0 + r_1 v(\mu)v(\mu') + r_2(v^2(\mu) - \beta(a))(v^2(\mu') - \beta(a)),$$

$$\rho(\mu')d\mu' = e^{-v^2(\mu)}\frac{v(\mu)}{\mu}dv(\mu) = \exp\left[-\left(\frac{\mu}{1-a|\mu|}\right)^2\right]\frac{d\mu}{(1-a|\mu|)^3},$$

$$dv(\mu) = \frac{d\mu}{(1-a|\mu|)^2}.$$

Заметим, что на концах отрезка интегрирования $\rho(\pm\alpha) = 0$, и, кроме того, $\lim_{\mu\to\pm\alpha} \rho(\mu) v^n(\mu) = 0$ для любого натурального n.

Граничные условия (2.3) и (2.4) после замены (2.7) переходят в следующие:

$$h(0,\mu) = 0, \qquad 0 < \mu < \alpha, \tag{2.9}$$

и

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + o(1), \qquad x \to +\infty, \quad -\alpha < \mu < 0, \tag{2.10}$$

где

$$h_{as}(x,\mu) = \delta_n + \delta_T + (2U + A\omega(\alpha))v(\mu) + \left(v^2(\mu) - \frac{3}{2}\right)[\delta_T + A(x-\mu)].$$

Теперь все готово для решения граничной задачи (2.8)–(2.10).

3. Собственные функции и собственные значения

Разделение переменных в уравнении (2.8), взятое в виде

$$h_\eta(x,\mu) = e^{-\frac{x}{\eta}} \Phi(\eta,\mu) \tag{3.1}$$

сводит уравнение (2.8) к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta,\mu) = \eta \tilde{Q}(\eta,\mu), \eta, \mu \in (-\alpha,\alpha) \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{Q}(\eta,\mu) = r_0 n_0(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) + r_2 (v^2(\mu) - \beta)(n_2(\eta) - \beta n_0(\eta)). \tag{3.3'}$$

Здесь

$$n_\alpha(\eta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi(\eta,\mu) v^\alpha(\mu) \rho(\mu)\, d\mu, \alpha = 0,1,2. \tag{3.3}$$

- нулевой, первый и второй моменты собственной функции с весом $\rho(\mu)$.

Собственные функции непрерывного спектра, заполняющего сплошным образом интервал $(-\alpha,\alpha)$, находим [13] в пространстве обобщенных функций

$$\Phi(\eta,\mu) = \eta \tilde{Q}(\eta,\mu) P\frac{1}{\eta-\mu} + g(\eta)\delta(\eta-\mu), \eta \in (-\alpha,\alpha). \tag{3.4}$$

Здесь $g(\eta)$ – непрерывная неизвестная функция, определяемая из уравнений (3.3), Px^{-1} – распределение, означающее главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Подставим собственные функции (3.4) в нормировочные соотношения (3.3). Получим следующую систему дисперсионных уравнений:

$$n_\alpha(\eta) + \eta\int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{Q}(\eta,\mu) v^\alpha(\mu)\rho(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\eta} = g(\eta)\rho(\eta)v^\alpha(\eta), \alpha = 0,1,2. \qquad (3.5)$$

Обозначим:

$$t_n(\eta) = \eta\int_{-\alpha}^{\alpha} v^n(\mu)\rho(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\eta}, n = 0,1,2,3,4.$$

Теперь с учетом (3.3) систему дисперсионных уравнений (3.5) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} n_\alpha(\eta) + r_0 n_0(\eta) t_\alpha(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) t_{\alpha+1}(\eta) + \\ + r_2\big(t_{\alpha+2}(\eta) - \beta t_\alpha(\eta)\big)\big(n_2(\eta) - \beta n_0(\eta)\big) = \\ = g(\eta)\rho(\eta)v^\alpha(\eta), \end{gathered} \qquad (3.6)$$

где $\alpha = 0, 1, 2$.

Запишем уравнения (3.6) в векторном виде

$$\Lambda(\eta)n(\eta) = g(\eta)\rho(\eta)\begin{bmatrix} 1 \\ v(\eta) \\ v^2(\eta) \end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

Здесь $\Lambda(\eta)$ – дисперсионная матрица с элементами $\lambda_{ij}(\eta)$ $(i,j = 1, 2, 3)$, $n(\eta)$ – нормировочный вектор с элементами $n_\alpha(\eta), \alpha = 0, 1, 2$.

Ниже понадобятся элементы дисперсионной матрицы в явном виде

$$\lambda_{11}(\eta) - 1 + (r_0 + \beta^2 r_2)t_0(\eta) - \beta r_2 t_2(\eta),$$
$$\lambda_{12}(\eta) = r_1 t_1(\eta),$$
$$\lambda_{13}(\eta) = r_2\big(-\beta t_0(\eta) + t_2(\eta)\big),$$
$$\lambda_{21}(\eta) = (r_0 + \beta^2 r_2)t_1(\eta) - \beta r_2 t_3(\eta),$$
$$\lambda_{22}(\eta) = 1 + r_1 t_3(\eta),$$
$$\lambda_{23}(\eta) = r_2\big(-\beta t_1(\eta) + t_3(\eta)\big),$$
$$\lambda_{31}(\eta) = (r_0 + \beta^2 r_2)t_2(\eta) - \beta r_2 t_4(\eta),$$
$$\lambda_{32}(\eta) - r_1 t_3(\eta),$$
$$\lambda_{33}(\eta) = 1 + r_2\big(-\beta t_2(\eta) + t_4(\eta)\big).$$

Введем дисперсионную функцию $\lambda(z)$:

$$\begin{gathered} \lambda(z) = \det\Lambda(z) = \lambda_{11}(\eta)\lambda_{12}(\eta)\lambda_{13}(\eta) + r_1 t_3 \lambda_{13}(\eta)\lambda_{21}(\eta) + \\ + r_1 t_1 \lambda_{31}(\eta)\lambda_{23}(\eta) - \lambda_{13}(\eta)\lambda_{22}(\eta)\lambda_{31}(\eta) - \\ - r_2 t_3 \lambda_{11}(\eta)\lambda_{23}(\eta) - r_1 t_1 \lambda_{21}(\eta)\lambda_{33}(\eta). \end{gathered}$$

Из векторного уравнения (3.7) находим

$$n_\alpha(\eta) = g(\eta)\rho(\eta)\frac{\Lambda_\alpha(\eta)}{\lambda(\eta)}, \qquad \alpha = 0, 1, 2. \tag{3.8}$$

где $\Lambda_\alpha(\eta)$ – определитель, полученный из определителя системы (3.6) заменой в нем $\alpha - \text{го}$ столбца столбцом из свободных членов этой системы.

Выпишем эти определители в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(\eta) &= \Lambda_{11} - v(\eta)\Lambda_{21} + v^2(\eta)\Lambda_{31} = \lambda_{22}\lambda_{33} - r_1 t_3 \lambda_{23} - \\
&\quad - v r_1 (t_1 \lambda_{33} - t_2 \lambda_{13}) + v^2 (r_1 t_1 \lambda_{23} - \lambda_{22}\lambda_{13}), \\
\Lambda_1(\eta) &= -\Lambda_{12} + v(\eta)\Lambda_{22} - v^2(\eta)\Lambda_{32} = -\lambda_{21}\lambda_{33} + \lambda_{31}\lambda_{33} + \\
&\quad + v(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}) - v^2(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}), \\
\Lambda_2(\eta) &= \Lambda_{31} - v(\eta)\Lambda_{32} + v^2(\eta)\Lambda_{33} = r_1 t_3 \lambda_{21} - \lambda_{31}\lambda_{22} - \\
&\quad - v r_1 (t_3 \lambda_{11} - t_1 \lambda_{31}) + v^2(\lambda_{11}\lambda_{22} - r_1 t_1 \lambda_{21}).
\end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_{ij}(\eta)$ – минор элемента $\lambda_{ij}(\eta)$.

С помощью соотношений (3.8) преобразуем равенство (3.3’) к виду:

$$\tilde{Q}(\eta, \mu) = Q(\eta, \mu)\frac{g(\eta)\rho(\eta)}{\lambda(\eta)}, \tag{3.9}$$

где

$$Q(\eta, \mu) = r_0\Lambda_0(\eta) + r_1 v(\mu)\Lambda_1(\eta) + r_2\left(v^2(\mu) - \beta\right)\left(\Lambda_2(\eta) - \beta\Lambda_0(\eta)\right). \tag{3.10}$$

С помощью равенства (3.10) преобразуем выражение (3.4) для собственных функций:

$$\Phi(\eta, \mu) = \tilde{\Phi}(\eta, \mu) g(\eta), \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{\Phi}(\eta, \mu) = \eta\frac{Q(\eta, \mu)}{\lambda(\eta)}\rho(\eta) P\frac{1}{\eta - \mu} + \delta(\eta - \mu). \tag{3.12}$$

Из равенства (3.11) видно, что собственные функции определены с точностью до произвольной мультипликационной функции $g(\eta)$. В силу однородности уравнения (2.8) эту функцию можно считать тождественно равной единице ($g(\eta) = 1$) и далее в качестве собственной функции непрерывного спектра можно рассматривать функции, определяемые равенством (3.12).

По определению, дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионной функции.

Разлагая дисперсионную функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, убеждаемся, что она в этой точке имеет нуль 4-го порядка. Применяя принцип аргумента [14] можно показать, что других нулей (кроме $z=\infty$) дисперсионная функция не имеет. Точке $z=\infty$ как 4-кратной точке дисперсионного спектра отвечают следующие четыре дискретные решения уравнения (2.8):

$$
\begin{aligned}
&h_0(x,\mu)=1,\\
&h_1(x,\mu)=v(\mu),\\
&h_2(x,\mu)=v^2(\mu)-\frac{1}{2},\\
&h_3(x,\mu)=(x-\mu)\left(v^2(\mu)-\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Ниже понадобятся формулы для разности и суммы граничных значений дисперсионных функций сверху и снизу в интервале $(\ \alpha,\alpha)$:

$$\lambda^+(\mu)-\lambda^-(\mu)=2\pi i\mu\rho(\mu)Q(\mu,\mu) \qquad (3.13)$$

и

$$\lambda^+(\mu)+\lambda^-(\mu)=2\lambda(\mu), \qquad \mu\in(-\alpha,\alpha), \qquad (3.14)$$

где $Q(\mu,\mu)$ – определяется выражением (3.10).

Для доказательства равенства (3.14) достаточно провести прямолинейные, но весьма громоздкие вычисления.

4. Разложение решения граничной задачи по собственным функциям характеристического уравнения

Теорема 1. Граничная задача (2.8)–(2.10) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения

$$h(x,\mu)=h_{as}(x,\mu)+\int_0^{\alpha} e^{-\frac{x}{\eta}}\Phi(\eta,\mu)g(\eta)\rho(\eta)d\eta. \qquad (4.1)$$

Здесь неизвестными коэффициентами, отвечающими дискретному спектру, являются величины δ_n и δ_T, а неизвестным коэффициентом непрерывного спектра является функция $g(\eta)$.

Доказательство. Подставляя в разложении (4.1) при $x=0$ собственные функции (3.12), получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$h_{as}(x,\mu)+\int_0^{\alpha}\eta\,\frac{Q(\eta,\mu)}{\lambda(\eta)}g(\eta)\rho(\eta)\frac{d\eta}{\eta-\mu}+g(\mu)=0, \qquad (4.2)$$

где $0<\mu<\alpha$.

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int_0^{\alpha} \eta \frac{Q(\eta,\mu)}{\lambda(\eta)} g(\eta)\rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \mu}, \qquad (4.3)$$

для которой согласно формулам Сохоцкого имеем:

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\pi i\mu \frac{Q(\mu,\mu)}{\lambda(\mu)} g(\mu)\rho(\mu), \qquad (4.4)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = 2\int_0^{\alpha} \eta \frac{Q(\eta,\mu)}{\lambda(\eta)} g(\eta)\rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \mu}. \qquad (4.5)$$

Преобразуем уравнение (4.2) согласно равенствам (4.4) и (4.5). Получаем уравнение:

$$h_{as}(0,\mu) + \frac{N^+(\mu) + N^-(\mu)}{2} + \frac{\lambda(\mu)[N^+(\mu) - N^-(\mu)]}{2\pi i\mu\rho(\mu)Q(\mu,\mu)} = 0$$

Отсюда получаем краевое условие:

$$2\pi i\mu\rho(\mu)Q(\mu,\mu)h_{as}(0,\mu) + \pi i\mu\rho(\mu)Q(\mu,\mu)[N^+(\mu) + N^-(\mu)] + \\ +\lambda(\mu)[N^+(\mu) - N^-(\mu)] = 0 \qquad (4.\ 6)$$

Теперь, учитывая равенства (3.13) и (3.14), уравнение (4.6) приведем к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) + h_{as}(0,\mu)] - \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) + h_{as}(0,\mu)] = 0, 0 < \mu < \alpha. \qquad (4.7)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} - \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, 0 < \mu < \alpha. \qquad (4.8)$$

Решение этой задачи, ограниченное и неисчезающее в точках $z = 0$ и $z = \alpha$ приведем без вывода [3], [19]:

$$X(z) = \frac{1}{z^2} e^{V(z)}, \qquad (4.9)$$

где

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} \frac{\theta(\tau) - 2\pi}{\tau - z} d\tau, \qquad (4.10)$$

$\theta(\tau) = \arg\lambda^+(\tau)$ - главное значение аргумента.

Преобразуем задачу (4.7) с помощью однородной задачи (4.8) к задаче по нулевому скачку:

$$X^+(\mu)[N^+(\mu)+h_{\alpha s}(0,\mu)] = X^-(\mu)[N^-(\mu)+h_{\alpha s}(0,\mu)],\; 0<\mu<\alpha. \qquad (4.11)$$

Выясним особенность этого условия. Представим функцию $N(z)$ в явном виде, учитывая соотношение (3.14):

$$N(z) = r_0 P(z) + r_1\frac{z}{1-\alpha z}Q(z) + r_2\left[\left(\frac{z}{1-\alpha z}\right)^2 - \beta\right]R(z), \qquad (4.12)$$

где

$$P_n(z) = \int_0^\alpha \eta\frac{\Lambda_n(\eta)}{\lambda(\eta)}g(\eta)\rho(\eta)\frac{d\eta}{\eta - z}\; (n = 0,1,2),$$
$$Q(z) = \int_0^\alpha \eta\frac{\Lambda_1(\eta)}{\lambda(\eta)}g(\eta)\rho(\eta)\frac{d\eta}{\eta - z} = P_1(z),$$
$$R(z) = \int_0^\alpha \eta\frac{\Lambda_2(\eta)-\beta\Lambda_0(\eta)}{\lambda(\eta)}g(\eta)\rho(\eta)\frac{d\eta}{\eta - z} = P_2(z) - \beta P_0(z).$$

Преобразуем равенство (4.12), записав его по степеням полюса:

$$N(z) = r_0P_0(z) - r_2\beta\left(P_2(z) - \beta P_0(z)\right) + r_1\frac{z}{1-\alpha z}P_1(z) + r_2\left(\frac{z}{1-\alpha z}\right)^2\left(P_2(z) - \beta P_0(z)\right) \qquad (4.13)$$

или

$$N(z) = P(z) + r_1\frac{z}{1-\alpha z}Q(z) + r_2\left(\frac{z}{1-\alpha z}\right)^2 R(z), \qquad (4.14)$$

где

$$P(z) = (r_0 + r_2\beta^2)P_0(z) - r_2\beta P_2(z),$$
$$Q(z) = P_1(z),$$
$$R(z) = P_2(z) - \beta P_0(z).$$

Теперь видно, что краевое условие (4.11) имеет двойной полюс в точке $z = \frac{1}{\alpha}$. Поэтому, умножив краевое условие на $(1-\alpha\mu)^2$, получаем:

$$X^+(\mu)[M^+(\mu) + (1-\alpha\mu)^2 h_{\alpha s}(0,\mu)] = X^-(\mu)[M^-(\mu) + (1-\alpha\mu)^2 h_{\alpha s}(0,\mu)],\; 0<\mu<\alpha. \qquad (4.15)$$

где

$$M(z) = (1-\alpha z)^2 N(z). \qquad (4.16)$$

Учитывая поведение функций, входящих в краевое условие (4.15), получим общее решение соответствующей краевой задачи:

$$M(z) = -(1 - az)^2 h_{as}(0, z) + \frac{C_0 - C_1 z}{X(z)}, \qquad (4.17)$$

где C_0 и C_1 – произвольные постоянные, причем

$$(1 - az)^2 h_{as}(0, z) = (1 - az)^2(\delta_n + \delta_T) - (1 - az)z(2U + A\omega) -$$
$$- \left[z^2 - \frac{3}{2}(1 - az)^2\right](\delta_n - Az).$$

Заметим, что решение (4.17) имеет в точке $z = \infty$ полюс 3-го порядка, вто время как функция $M(z)$, определенная равенством (4.16), имеет в этой точке полюс 1-го порядка. Чтобы решение (4.17) можно было принять в качестве функции $M(z)$, определенной равенством (4.16), понизим порядок полюса у решения (4.17) с трех до единицы, а затем приравняем коэффициенты при $z^m (m = 0,1)$ в разложениях в окрестности точки $z = \infty$ левой и правой частей равенства (4.17). Последнее вызвано тем, что эти коэффициенты в обеих частях равенства содержат неизвестные параметры. Разложим решение (4.17) в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$M_1 z + M_2 + o(1) = c_1 z^3 + (c_0 - c_1 V_1)z^2 + (c_1 U_2 - c_0 V_1)z +$$
$$+ (c_1 U_3 - c_0 U_2) - \delta_n + \frac{1}{2}\delta_T + z\left(2a\delta_n - a\delta_T - 2U - A\omega - \frac{3}{2}A\right) + \qquad (4.18)$$
$$+ \left\{-a^2\delta_n + \delta_T\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right) + 2Ua + aA(\omega + 3)\right\} + z^3 A\left(1 - \frac{3}{2}a^2\right) + o(1), |z| \to \infty.$$

При выводе равенства (4.17) было использовано разложение

$$V(z) = \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2} + \cdots \quad (|z| \to \infty)$$

и разложение

$$e^{-V(z)} = 1 + \frac{\tilde{V}_1}{z} + \frac{\tilde{V}_2}{z^2} + \cdots \quad (|z| \to \infty). \qquad (4.19)$$

Выразим коэффициенты $\tilde{V}_k$ через V_k. Из (4.19) находим:

$$V(z) = \frac{\frac{\tilde{V}_1}{z^2} + 2\frac{\tilde{V}_2}{z^3} + 3\frac{\tilde{V}_3}{z^4} + \cdots}{1 + \frac{\tilde{V}_1}{z} + \frac{\tilde{V}_2}{z^2} + \frac{\tilde{V}_3}{z^3} + \cdots}$$

или

$$-\left(\frac{V_1}{z^2} + 2\frac{V_2}{z^3} + 3\frac{V_3}{z^4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{\tilde{V}_1}{z} + \frac{\tilde{V}_2}{z^2} + \frac{\tilde{V}_3}{z^3} + \cdots\right) = \frac{\tilde{V}_1}{z^2} + 2\frac{\tilde{V}_2}{z^3} + 3\frac{\tilde{V}_3}{z^4} + \cdots.$$

Следовательно,

$$\tilde{V}_1 = -V_1, -2V_2 - V_1V_2 = 2\tilde{V}_2,$$
$$\tilde{V}_2 = -V_2 + \frac{1}{2}V_1^2, \tilde{V}_3 = -V_3 - \frac{2}{3}V_1V_2 - \frac{1}{3}V_1V_2,$$
$$\tilde{V}_3 = -V_3 + V_1V_2 - \frac{1}{6}V_1^3, \ldots$$

Приравнивая к нулю в правой части равенства (4.18) коэффициенты при z^3 и z^2, находим:

$$c_1 = A\left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right), \tag{4.20}$$

$$c_0 = A\left[\left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)V_1 - a(\omega + 3)\right] + a^2\delta_n + \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)\delta_T - 2Ua. \tag{4.21}$$

Приравнивая теперь коэффициенты в (4.18) слева и справа при z и z^0, находим:

$$M_1 = c_1\tilde{V}_2 - c_0V_1 + 2a\delta_n - 2U - A\left(\omega + \frac{3}{2}\right), \tag{4.22}$$

$$M_2 = c_1\tilde{V}_3 - c_0\tilde{V}_2 - \delta_n + \frac{1}{2}\delta_T. \tag{4.23}$$

Подставляя в равенства (4.22) и (4.23) C_0 и C_1, определенные соответственно равенствами (4.20) и (4.21), получим уравнения, из которых однозначно находятся δ_n и δ_T. Таким образом, свободные параметры C_0 и C_1 решения $M(z)$ найдены однозначно, а также найдены однозначно коэффициенты дискретного спектра δ_n и δ_T разложения (4.1). Коэффициент непрерывного спектра находится на основании формул Сохоцкого, применяемых к функции $M(z)$, определенной равенствами (4.16) и (4.17):

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = 2\pi i\mu(1 - a\mu)^2\frac{Q(\mu,\mu)}{\lambda(\mu)}g(\mu)\rho(\mu)$$

и

$$M^+(\mu) + M^-(\mu) = (c_0 + c_1\mu)\left(\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right).$$

Из этих равенств находим:

$$\frac{\eta g(\eta)\rho(\eta)}{\lambda(\eta)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{c_0 + c_1\eta}{(1 - a\eta)^2Q(\mu,\mu)}\left(\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right). \tag{4.24}$$

Итак, все коэффициенты разложения (4.1) установлены. По построению, разложение (4.1) удовлетворяет граничным условиям (2.9) и (2.10). Тот факт, что разложение (1) удовлетворяет уравнению (1.9), проверяется непосредственно. Теорема доказана.

5. Температурный скачок и слабое испарение

Вернемся к решению поставленных физических задач. Коэффициент непрерывного спектра (4.24) подставим сначала в функцию N(z), определенную равенством (4.16), которое представим в виде суммы:

$$M(z) = c_0 K(z) + c_1 L(z), \tag{5.1}$$

где

$$K(z) = (1 - az)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{Q(\eta, z)}{(1 - a\eta)^2 Q(\eta, \eta)} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right] \frac{d\eta}{\eta - z} \tag{5.2}$$

и

$$L(z) = (1 - az)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\eta Q(\eta, z)}{(1 - a\eta)^2 Q(\eta, \eta)} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right] \frac{d\eta}{\eta - z}. \tag{5.3}$$

поэтому согласно (5.1) имеем:

$$M(z) = (c_0 K_1 + c_1 L_1) z + (c_0 K_0 + c_1 L_0) + o(1), \tag{5.4}$$

т.е.

$$M_1 = c_0 K_1 + c_1 L_1, M_0 = c_0 K_0 + c_1 L_0. \tag{5.5}$$

Найденные коэффициенты M_1 и M_2 подставим в равенства (4.22) и (4.23), затем заменим в них C_0 и C_1 согласно (4.20) и (4.21). получаем систему из двух уравнений относительно δ_n и δ_T:

$$\begin{gathered} -\delta_T\left[a + \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(V_1 + K_1)\right] + \delta_n[2a - a^2(V_1 + K_1)] = \\ = 2U[1 - a(V_1 + K_1)] + A\left[\frac{3}{2} + \omega + \left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)(L_1 - V_2 + V_1 + K_1) - (3a + \omega)(V_1 + K_1)\right] \end{gathered} \tag{5.6}$$

и

$$\begin{gathered} \delta_T\left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(V_2 - K_0)\right] + \delta_n[-1 + a^2(V_2 - K_0)] = \\ = 2Ua(V_2 - K_0) + A\left[\left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)(V_1 K_0 - V_1 V_2 - V_3 + L_0 + (3a + w)(V_2 + K_0))\right]. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Основной определитель этой системы равен:

$$\Delta = V_1 + K_1 - 2a(V_2 - K_0).$$

Решение системы (5.6) и (5.7) запишем в виде:

$$\delta_T = 2U\frac{\Delta_{T,U}}{\Delta} + A\frac{\Delta_{T,A}}{\Delta} \tag{5.8}$$

и

$$\delta_n = 2U\frac{\Delta_{n,U}}{\Delta} + A\frac{\Delta_{n,A}}{\Delta}. \tag{5.9}$$

Здесь

$$\Delta_{T,U} = -1 + a(V_1 + K_1) - a^2(V_2 - K_0),$$
$$\Delta_{n,U} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a(V_1 + K_1) - \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right)(V_2 - K_0).$$

Остальные определители громоздки и мы их приведем, не раскрывая:

$$\begin{aligned}\Delta_{T,A} = {} & [1 - a^2(V_2 - K_0)]\left[\left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)\left(V_2 - L_1 - \omega - \frac{3}{2}\right)\right] + \\ & + \left[\left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)(V_1 - 3a - \omega)\right][2a(V_2 - K_0) - V_1 - K_1] + \\ & + \left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)(V_2 - L_0)[2a - a^2(V_1 + K_1)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{n,A} = {} & -\left[a + \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(V_1 + K_1)\right]\left[(3a + \omega)(V_2 - K_0) - \left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)(V_2 - L_0 + V_1V_2 - V_1K_0)\right] - \\ & - \left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(V_2 - K_0)\right]\left[\frac{3}{2} + w + \left(\frac{3}{2}a^2 - 1\right)(L_1 - V_2 + V_1^2 + V_1K_1) - (3a + \omega)(V_1 + K_1)\right].\end{aligned}$$

Формулы (5.8) и (5.9) представляют собой искомые величины скачка температуры и скачка концентрации соответственно.

6. Заключение

В настоящей работе продолжается изучение и применение одномерного кинетического уравнения с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) релаксационного типа, введенное в работе [1]. Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости.

При построении уравнения используются законы сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. С помощью нормировочных соотношений вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией.

Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Найдены собственные решения исходного кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Эта так называемые дискретные (или частные) решения.

Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру.

Аналитически решена обобщенная задача Смолуховского, объединяющая две классические задачи кинетической теории – задачу о температурном скачке и задачу о слабом испарении (конденсации). Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о решении сформулированной граничной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bugrimov A.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The kinetic one-dimensional equation with frequency of collisions, affine depending on the module molecular velocity// arXiv:1403.2068v1 [math-ph] 9 Mar 2014, 20pp.
2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ, 2004, 271 с.
3. *Latyshev A.V.* Application of Case' method to the solution of linear kinetic BGK equation in a problem about temperature jump// Appl. math. and mechanics. 1990. V. 54. Issue 4. P. 581-586. [russian]
4. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Boundary problems for model Boltzmann equation with frequency proportional to velocity of moleculs//Izvestiya Russian Academy of Science. Ser. Mechanika, Fluid and Gas (Russian "Fluids Dynamics"). 1993. No 6. 143-155 pp. [russian]
5. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о сильном испарении (конденсации)//Известия РАН. Сер. МЖГ. 1993. №6. 143-155 с.
6. *Cassell J.S., Williams M.M.R.* An exact solution of the temperature slip problem in rarefied gases// Transport Theory and Statist. Physics, 2(1), 81—90 (1972).
7. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump and weak evaporatuion in molecular gases// J. of experim. and theor. physics. 1998. V. 114. Issue. 3(9). P. 956-971. [russian]
8. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The Smoluchowski problem in polyatomic gases// Letters in J. of Tech. Phys. 1998. V. 24. No 17. P. 85-90. [russian]
9. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytic solutions of boundary value problem for model kinetic equatins// Math. Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media. Edited by L.A. Uvarova and A.V. Latyshev. Kluwer Academic. New York-Moscow. 2001. P. 17-24.
10. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smolukhowski problem for degenerate Bose gases// Theoretical and Mathematical Physics. Springer New York. Vol. 155, No 3, June, 2008, pp. 936 - 948.
11. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in degenerate quantum gases in the presence of the Bose–Einstein condensate // Theor. and Mathem. Phys. 2010. V. 162(1). P. 95-105 [russian]
12. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose–Einstein condensate, Theor. and Math. Phys., 165:1 (2010), 1358–1370.
13. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smoluchowski problem for electrons in metal// Theor. and Mathem. Phys. 2005, январь, Т. 142. No 1. С. 93-111 [russian]
14. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smoluchowski problem for metals with mirror-diffusive boundary conditions //Theoretical and Mathematical Physics, October 2009, Volume 161, Issue 1, pp. 1403-1414.

15. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Граничные задачи для квантовых газов. М.: МГОУ, 2012, 266 с.
16. *Cercignani C., Frezzoti A.* Linearized analysis of a one-speed B.G.K. model in the case of strong condensation// Bulgarian Academy of sci. theor. appl. mech. Sofia. 1988. V.XIX. No 3. 19-23 P.
17. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение одномерной задачи об умеренно сильном испарении (и конденсации) в полупространстве// Прикл. мех. и техн. физ. 1993. №1. 102-109 с.
18. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Физматлит. 1999. 399 с.
19. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука. 640 с.

BOUNDARY PROBLEMS FOR KINETIC ONE-DIMENSIONAL EQUATION WITH COLLISIONAL FREQUENCY AFFINE DEPENDING ON THE MODULE OF MOLECULAR VELOCITY

A. Bugrimov, A. Latyshev, A. Yushkanov

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. For the one-dimensional linear kinetic equation the analytical solutions of problems about temperature jump and weak evaporation (condensation) over flat surface are received. The equation has integral of collisions BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) and frequency of collisions of molecules, affine depending on the module molecular velocity.
Keywords: one-dimensional kinetic equation, affine dependence of collision frequency, conservation laws, separation of variables, characteristic equation, dispersion equation, spectra, eigen functions, Smoluchowski' problem.