УДК: 539.516

# УСЛОВИЕ БИВЕРСА-ДЖОЗЕФА ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ НА ГРАНИЦЕ С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

**Ю.Н. Гордеев, Е.Б. Сандаков**

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)*
*115409, Москва, Каширское ш., 31*

*Аннотация.* В данной работе рассматривается задача с критической точкой о стационарном натекании вязкой жидкости на проницаемую плоскость в плоском и осе-симметричном случаях. расположенную перпендикулярно потоку. В таких течениях тангенциальная компонента поля скорости потока вязкой жидкости в критических точках на поверхности проницаемого полупространствам меняет знак. Получено автомодельное решение и в рамках рассмотренной модели показано, что краевым условием на границе между жидкостью и средой является условие Биверса-Джозефа-Саффмана.
*Ключевые слова*: течение вязкой несжимаемой жидкости, уравнение Бринкмана, условие Биверса-Джозефа, граничные условия на границе несжимаемая вязкая жидкость- пористая среда.

Падение потока вязкой жидкости на непроницаемую поверхность с условием прилипания жидкости на поверхности рассматривалось в работе [5] Такие задачи возникают при обтекании твердых тел и теории пограничного слоя [2].Для вращающегося пористого диска задача рассматривалась в [1].

Как показали эксперименты, начиная с работы [3], в этих задачах условие прилипания было предложено заменить условием Биверса-Джозефа-Сафмана [3,7], учитывающее проскальзывание между свободной жидкостью и пористым телом.

Дальнейшие экспериментальные работы уточняющие данные [3] приведены в обзоре [6].

$$\frac{\partial v_{\tau f}}{\partial \vec{n}} = \frac{B}{\sqrt{k}}\left(v_{\tau f} - v_{\tau b}\right) + O\left(k^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (0.1)$$

$B$ - постоянная пористой среды, $k$ – коэффициент проницаемости, $\vec{n}$ - нормаль к проницаемой поверхности, $v_{\tau f}$ - тангенциальная компонента скорости жидкости на границе жидкость – твердое тело, $v_{\tau b}$ - скорость твердого тела или торцевая скорость в [3].

В работе потенциальное течение свободной жидкости рассматривалось в рамках уравнений Навье- Стокса, а для описания течения несжимаемой вязкой жидкости в пористой среде были использованы уравнения Бринкмана [4], полученные специально для относительно высоко - проницаемых сред. Аналитически найдено обобщенное условие (0.1) и входящие в него постоянные. Найдена вертикальная компонента скорости.

**1. Постановка. Пуазейлевское течениежидкости вблизи критической точки.**

**А.** Рассмотрим натекание потока несжимаемой жидкости из бесконечности на ортогональную потоку проницаемую пористую среду, которое далее течет вдоль среды в противоположные от критической точки $(x = 0,\ y = 0)$ стороны. Систему координат совместим с критической точкой. Ось y направим перпендикулярно к полупространству, заполненному потоком свободной жидкости (верхнее y>0), а ось x направим вдоль проницаемой среды, заполняющей нижнее полупространство (y<0).

Предполагается, что течение свободной жидкости стационарно, и в плоском случае описывается уравнениями Навье – Стокса:

$$(\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{V}, \qquad \nabla\boldsymbol{V} = 0, \tag{1.1}$$

где– $\boldsymbol{V} = \{V_1, V_2\}$ скорость жидкости; $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость; $\mu$ - динамическая вязкость жидкости; $\rho$ - плотность; $p$- давление жидкости.

Для нахождения давления как функции координат в потоке вблизи критической точки воспользуемся рассуждениями приведенными в [ 2].

Скорости потенциального течения (без трения) в окрестности критической точки пористой среды равны:

$$V_1 = ax, \qquad V_2 = -a(b + y),$$

где a и b – константы. Предполагается, что жидкость может проникать в пористую среду.

Давление в потенциальном потоке будем определять из закона Бернулли:

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2}(V_1^2 + V_2^2) = p + \frac{\rho}{2}a^2(x^2 + (b + y)^2).$$

Здесь $p_0$- давление в критической точке; $p$ - в произвольной точке течения.

В отличии от потенциального течения, поток частично может поглощаться пористой средой и частично проскальзывать вдоль нее, поэтому примем, что с учетом уравнения (1.1) скорости и давление вблизи критической точки определяется функцией:

$$V_1 = xf'(y), \qquad V_2 = -f(y), \qquad p_0 = p + \frac{\rho}{2}(V_1^2 + V_2^2) = p + \frac{\rho}{2}a^2(x^2 + f(y)). \tag{1.2}$$

**В.** В осесимметричной постановке уравнения Навье – Стокса (1.1), описывающие стационарное течение вязкой жидкости в пористой среде в цилиндрической системе координат r, z с началом в центре диска и осью направленной перпендикулярно плоскости его вращения, и с учетом симметрии задачи относительно угла вращения $\varphi$ имеют вид : $\boldsymbol{V} = \{V_r, V_z\}$ .

Аналогично рассуждая с учетом третьего уравнения (1.2) получим для скоростей и давления выражение:

$$V_r = rF'(z),$$

$$V_z = -2F(z)$$

(1.3)

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2}(V_r^2 + V_z^2) = p + \frac{\rho}{2}a^2(r^2 + F(z)).$$

**2. Течение вязкой жидкости в пористой среде.**

**А.** Пусть течение вязкой жидкости в пористой среде в плоском случае с началом в точке $(x = 0, y = 0)$ и осью, направленной перпендикулярно границе раздела жидкость пористая среда $y = 0$, описывается законом Дарси – Бринкмана в пренебрежении конвективными слагаемыми [4]:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\nu}{k}\nabla \boldsymbol{V} + \nu_{eff}\Delta \boldsymbol{V}$$

(1,4)

$$\nabla \boldsymbol{V} = 0.$$

Давление как функцию координат в потоке вблизи критической точки в пористой среде примем в виде (1.2).

**В.** В осе-симметричной постановке стационарное течение вязкой жидкости в пористой среде в цилиндрической системе координат *r*, *z* с осью, направленной перпендикулярно границе раздела жидкость пористая среда $z = 0$ и с учетом симметрии задачи относительно угла вращения , описывается законом Дарси – Бринкмана (1.4)

Здесь $\nu_{eff}$ -эффективная вязкость жидкости в пористой среде.

Давление как функцию координат в потоке вблизи критической точки в пористой среде, как и в плоском случае, примем в виде (1.4).

Уравнения (1.4) описывают воображаемый поток жидкости, в каждой точке которого скорость движения равна скорости фильтрации. В общем случае при больших скоростях течения в этом подходе поток жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса с силами сопротивления пропорциональными его скорости [4]. Здесь также предполагается, что давление описывается некоторыми функциями типа (1.2),(1.3). При небольших скоростях течения квадратичными слагаемыми пренебрегают.

**3.Автомодельные решения. Получение условия Биверса–Джозефа-Саффмана.** Условиями сшивками решений для свободной жидкости и течения в пористой среде на границе раздела жидкость – пористая среда являются неразрывность компонент скорости и непрерывность тангенциальных компонент напряжения (трения):

$$V_1(x, y = 0 + 0) = V_1(x, y = 0 - 0),$$

$$V_2(x, y = 0 + 0) = V_2(x, y = 0 - 0),$$

$$\nu \frac{\partial}{\partial y} V_1(x, y = 0 + 0) = \nu_{eff} \frac{\partial}{\partial y} V_1(x, y = 0 - 0),$$

(3.1)

$$p(x, y = 0 + 0) = p(x, y = 0 - 0).$$

Для проницаемых сред к краевым условиям надо добавить условие на ненулевую вертикальную скорость жидкости:

$$V_2(x, y = 0) = U_0 .$$

В осесимметричном случае аналогичные условия сшивки имеют вид:

$$V_r(r, z = 0 + 0) = V_r(r, z = 0 - 0),$$

$$V_z(r, z = 0 + 0) = V_z(r, z = 0 - 0),$$

$$\nu \frac{\partial}{\partial z} V_r(r, z = 0 + 0) = \nu_{eff} \frac{\partial}{\partial z} V_r(r, z = 0 - 0).$$

(3.2)

$$p(r, z = 0 + 0) = p(r, z = 0 - 0), \quad V_z(r, z = 0) = U_0$$

Краевые условия для уравнений (1.1), (1.4) на бесконечности имеют вид:

$$\lim_{y \to -\infty} V_1 = 0, \quad \lim_{y \to -\infty} V_2 = 0, \tag{3.3}$$

$$\lim_{z \to -\infty} V_r = 0, \quad \lim_{z \to -\infty} V_z = 0, \tag{3.4}$$

Положим, что давление для свободной жидкости однородно по $x$, тогда системы уравнений (1.1)-(1.4) имеет автомодельные решения в переменных:

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu}{a}},$$

$$V_1 = V_r = \sqrt{a\nu}\xi\varphi'(\eta),$$

(3.5)

$$V_2 = V_z = -\sqrt{a\nu}\varphi(\eta),$$

$$p_0 - \mathrm{p} = \frac{\rho\nu a}{2}\Phi .$$

В тех же переменных (3.5) уравнения (1.1) и давления вида (1.2) имеют вид:

$$\varphi''' + \varphi\varphi' n - \varphi'^2 + 1 = 0 ,$$

(3.6)

$$\Phi' = \varphi'^2 + n^2 \ \xi^2 \varphi'^2 .$$

(3.7)

Для уравнений в пористой среде введем переменные

$$\xi = \frac{x}{\delta_1}, \eta = \frac{y}{\delta_1}, \delta_1 = \sqrt{\frac{\nu_{eff}}{a}},$$

$$V_1 = V_r = \sqrt{a\nu_{eff}}\,\xi\varphi'(\eta),$$

$$V_2 = V_z = -\sqrt{a\nu_{eff}}\,\varphi(\eta), \tag{3.8}$$

$$p_0 - p = \frac{\rho\nu_{eff}a}{2}\Phi$$

В этих переменных уравнения (1.4) и давления (1.3):

$$\varphi''' - \alpha^2\varphi' + n = 0\,,$$

(3.9)

$$\Phi' = \varphi'^2 + n^2\ \xi^2\varphi'^2\,, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\nu}{ka}}.$$

Решение уравнения (3.9) с учетом условий: $\varphi(0) = \beta$, и $\varphi(\eta \to -\infty) = 0$ (т.к. рассматривается полу-бесконечная пористая среда) может быть записано в виде:

$$\varphi = \beta exp(\alpha\eta) + \frac{n\eta}{\alpha^2},\ \ \beta > 0\,,\ \ \alpha > 0\ (V_2 = V_z < 0\ \ ,\ \ \eta < 0)\,. \tag{3.10}$$

На границе пористое тело-жидкость на основании решения (3.10) может быть получено граничное условие:

$$\varphi'(\eta = 0) = \alpha\varphi(\eta = 0) - \frac{n}{\alpha}$$

Согласуя безразмерные переменные (3.5) и (3.8), краевую задачу для уравнения жидкости (3.6) сведем к условиям:

$$\varphi(0) = \beta, \quad \varphi''(0) = \alpha\varphi'(0), \quad \varphi'(\eta \to +\infty) = 1\,, \tag{3.11}$$

где $n = 1$ – для плоского случая, $n = 2$ - для осе- симметричного случая;

Возвращаясь к исходным переменным, получим $(i = 1, r)$:

$$\frac{dV_i}{dy} = \frac{1}{\sqrt{k\nu_{tff/\nu}}}V_i\,.$$

(3.12)

И для вертикальной компоненты скорости:

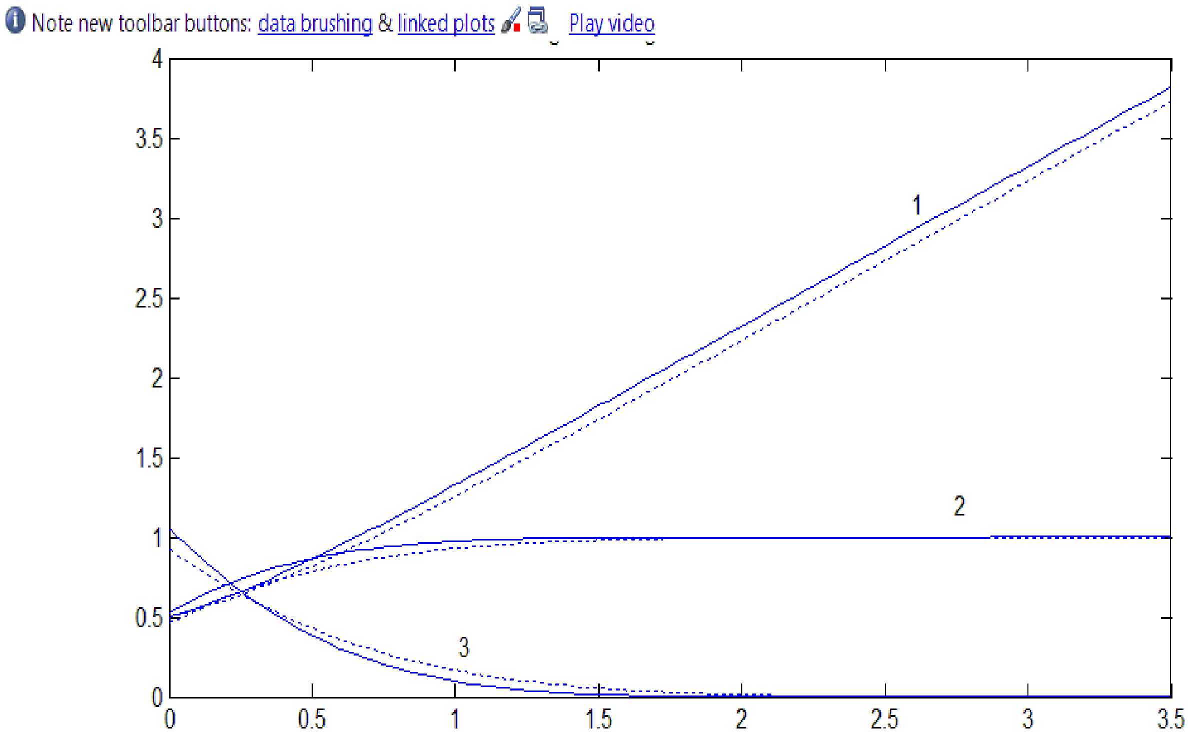
$$\frac{dV_2}{dz} = \frac{1}{\sqrt{k\nu_{tff/\nu}}}V_2 - \frac{\sqrt{ka/\nu_{eff}}naz}{\nu} + o(\sqrt{k})\,. \tag{3.13}$$

Из уравнения (3.10) можно найти глубину проникновения жидкости в пористую среду (в подземной гидродинамике точка равенства нулю скорости называется «поставленным фронтом»). При $k \ll 1$ приближенно он равен: $\eta_{max} \approx \frac{\beta\,(1+\beta\alpha^3)}{\alpha^2} \approx \beta^2\sqrt{\frac{\nu}{k\alpha}}$.

Так как для высокопроницаемых сред, тем не менее рассматриваются среды с $k \ll 1$ , сравнивая выражения (0.1) с (3.12),(3.13), получим, что эти условия совпадают с условиями Биверса – Джозефа с константой $\frac{1}{\sqrt{k\nu_{eff}/\nu}}$ . В системы уравнений Навье-Стокса, Брикмана входит неизвестная функция $\Phi$ - характеризующая давление жидкости в среде, но если интересно только распределение поля скорости потока жидкости в уравнения для которых она не входит, то эта функция может не вычисляться.

**4.Результаты численных расчетов.** Нелинейная краевая задача (3.9) сводилась к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и решалась методом Рунге-Кутта 4-5 порядка.

Для иллюстрации на рис.1. приведены графики решения задачи о критической точке при изменении проницаемости среды, т.е. вертикальной компоненты скорости утечек жидкости в пористую среду $\beta$ и коэффициента скольжения $\sigma$: $\varphi(1), \varphi'(2), \varphi''(3)$; $(\sigma = 0.5, \beta = 0.5) - 1.2\delta$.




Фиг. 1. Решение задачи о критической точке на проницаемой среде
$\varphi(1), \varphi'(2), \varphi''(3)$ $(\sigma = 0.5, \beta = 0.5) - 1.2\delta$

**Заключение**

Найдено решение задачи о стационарном натекании вязкой жидкости на высокопроницаемое полу-пространство. Получено автомодельное решение и в рамках рассмотренной модели показано, что краевым условием на границе между жидкостью и средой является условие Биверса-Джозефа-Саффмана. Найдено второе слагаемое в правой части граничного условия вертикальной компоненты скорости и получена константа $B$,также входящая в граничное условие.

Кроме того показано, что слой проникновения жидкости в пористую среду конечен.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Гольдштейн, Р.В., Гордеев Ю.Н., Чижов Ю.Л.* Задача Кармана для вращающегося проницаемого диска // Изв. РАН/ МЖГ. 2012. №1. С. 72-80.
2. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. *Bevers, G.S., Joseph D.D.* Boundary condition at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 197-207
4. *Brincman, H.C.* A calculation of the viscous force exerted by flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Sci. Res. A.1, 27-34(1947).
5. *Hiemenz, K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchen geraden Kreiszylinder// Diglers Polytech/ J/ 1911. V.326. P.321-324
6. *Nield, D.A.* The Beavers-Joseph Boundary Conditions and Related Matters: A Historical and Critical Note // Trans. Porous Med. 2009. 78.5370540.
7. *Saffman, P.* On the boundary conditions at the surface of a porous medium. Stud. AAppl. Math. 50, 93-101(1971).


## THE BIVERS-YOSEPH CONDITION FOR INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN THE VICINITY THE CRITICAL POINT OF THE BORDER WITH POROUS MEDIA.


**Ju.N.Gordeev, E.B. Sandakov**

*National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)*
*31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*



*Abstract*. This article deals with the problems with critical point fixed leakage of viscous liquid on the transparent plane in flat and axisymmetric cases situated perpendicular to the flow. In such flows tangential component of the field of speed of viscous liquid in critical points on the surface of transparent half-spa ce change. Obtained automodel solution and the considered model it is shown that the boundary condition on the boundary between the liquid and the environment is a condition Beavers-Joseph-Saffman.



*Keywords*: viscous incondensable, Brinkman’s equation, Bivers-Joseff law, boundary conditions on the incompressible viscous fluid-porous medium.