УДК 532.517;532.526.75

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТЬ - ПРОНИЦАЕМАЯ ПОВЕРХНОСТЬ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ ЖИДКОСТИ

Ю.Н. Гордеев, Е.Б. Сандаков

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Рассматривается вопрос об условиях на границе вязкая жидкость – проницаемая поверхность с учетом инерционных эффектов жидкости в пористой среде. Этот вопрос и рассмотрен в предлагаемой статье на примере задачи о вращении проницаемого диска на поверхности несжимаемой вязкой жидкости . Указанная задача является обобщением классической задачи Кармана о вращении непроницаемого диска .В предположении, что течение в пористом диске описывается уравнениями Бринкмана, получено автомодельное решение задачи.
Ключевые слова: течение вязкой жидкости, пористая среда, уравнения Бринкмана, условие Биверса-Джозефа.

Для непроницаемого диска задача рассматривалась в работе[4]. Переход к течениям вязкой жидкости по относительно высокой проницаемой поверхности жидкости требует пересмотра граничных условий. На это обстоятельство обращено внимание в [6]. На основе экспериментальных данных влияние относительно высокой проницаемости пластины на течение жидкости вне ее предложено учитывать не условием прилипания, а полуэмпирическим условием проскальзывания (условие Биверса-Джозефа-Сафмана)[2,7]

$$\frac{\partial v_{\tau f}}{\partial \vec{n}} = \frac{B}{\sqrt{k}}\left(v_{\tau f} - v_{\tau b}\right) + O\left(k^{\frac{1}{2}}\right) \tag{1.1}$$

где B- постоянная пористой среды, k- коэффициент проницаемости, $\vec{n}$-нормаль к проницаемой поверхности, $v_{\tau f}$ - тангенциальная компонента скорости жидкости на границе жидкость – твердое тело, $v_{\tau b}$ - скорость твердого тела или торцевая скорость.

Условие Биверса-Джозефа-Сафмана неоднократно проверялось экспериментально и теоретически обосновывалось. (см. обзор [5]).

1. Постановка задачи. А. Рассмотрим осесимметричную задачу о стационарном течении несжимаемой вязкой жидкости в полупространстве, на поверхности которого с частотой ω вращается диск (слой) толщины d и бесконечного радиуса из высокопроницаемого пористого материала. Будем считать, что в диске имеет место фильтрационное течение жидкости, проникающей через границу жидкость – диск.

Выберем цилиндрическую систему координат r, z, φ с началом в точке пересечения поверхности полупространства ($z \geq 0$) и оси диска, направленной вниз. Течение свободной жидкости (течении жидкости над пористой поверхностью) описывается уравнениями Навье-Стокса.

Для описания фильтрационного течения жидкости в высокопроницаемом диске используем закон Дарси-Бринкмана [1] (с учетом симметрии задачи относительно угла вращения φ)

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - 2 <\omega, \boldsymbol{V}> - <\boldsymbol{\omega}, <\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}>> + \nu\Delta \boldsymbol{V} = 0$$

(1.2)

$$\nabla \boldsymbol{V} = 0.$$

Здесь $\boldsymbol{V} = \{V_r, V_\varphi, V_z\}$ **– скорость жидкости в потоке**; -давление вязкой жидкости; ρ – плотность; ν - кинематическая вязкость, k – коэффициент проницаемости, ν_{eff}- эффективная кинематическая вязкость жидкости в среде; $\boldsymbol{\omega} = \{0,0,r\}, \boldsymbol{r} = \{r,0,0\}$.

Уравнения (1.1) описывают воображаемый поток жидкости, в каждой точке которого скорость движения равна скорости фильтрации. В общем случае при больших скоростях течения в этом подходе поток жидкости описывается уравнениями Навье - Стокса с силами сопротивления пропорциональными его скорости [3].

2. Краевые условия на границе и на бесконечности. В данной работе не ставится задача получения решения какой либо конкретной сопряженной задачи течения свободной жидкости и фильтрующейся в пористой среде. Здесь для данной задачи найдена общая структура решения задачи о течении жидкости в проницаемой среде и на основе нее получены связи между компонентами скорости и их производными на границе раздела жидкость – диск (новые краевые условия для потока жидкости над плоскостью пористой среды). Затем, используя их, можно не рассматривать сопряженную задачу, а решать только задачу о движении свободной жидкости с этими новыми условиями.

Рассмотрим полный набор условий сшивки двух течений на границе жидкость – проницаемая плоскость:

А) Условия непрерывности компонент скорости и тангенциальных компонент напряжения (трения)

$$\begin{aligned}
&V_z(r,z=0+0) = V_z(r,z=0-0),\\
&V_r(r,z=0+0) = V_r(r,z=0-0),\\
&V_\varphi(r,z=0+0) = V_\varphi(r,z=0-0),\\
&\nu\frac{\partial}{\partial z}V_r(r,z=0+0) = \nu_{eff}\frac{\partial}{\partial z}V_r(r,z=0-0),\\
&\nu\frac{\partial}{\partial z}V_\varphi(r,z=0+0) = \nu_{eff}\frac{\partial}{\partial z}V_\varphi(r,z=0-0).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В) Граничные условия на поверхности диска положим:

$p(z=d) = P_0,$ над поршнем

$p(z=0) = P_a$ и на бесконечности

$V_\varphi(z\to\infty) = 0,$ $\qquad V_r(z\to\infty) = 0$

3. Автомодельное решение. Решение задачи (1.1) ,(2.1) будем искать в виде

$$V_r = \omega r F(\zeta),\ \ V_\varphi = \omega r G(\zeta), \qquad \Phi = G - 1,$$

$$V_z = \sqrt{\omega \nu_{eff}}\, H(\zeta),\ \ p - p_0 = -\rho \nu_{eff} \omega P(\zeta),$$

$$\zeta = \frac{z}{\delta}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{\nu_{eff}}{\omega}}, \qquad \delta_0 = \sqrt{k}\,, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\nu}{k\omega}},$$

где p_0 - давление на границе жидкость – пористая среда; δ_0, δ- характерные величины пограничных слоев в пористой среде и свободной жидкости (текущая под пористой средой).

При этом система уравнений (1.1) сведется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F'' - \sigma^2 F + 2\Phi + 1 = 0,$$
$$\Phi'' - \sigma^2 \Phi - 2F = 0,$$
(3.1)
$$H'' - \sigma^2 H = -P',$$
$$2F + H' = 0.$$

В силу линейности первых двух уравнений системы (3.1) будем искать ее решение в виде

$$F = \Lambda + F_p, \qquad \Phi = \Psi + \Phi_p,$$
(3.2)

где $F_p,\ \Phi_p$ - частное (стационарное $\zeta \to -\infty\,,\ F'' = \Phi'' \to 0$),а Λ, Φ - решение однородной системы.

Частное (стационарное решение) имеет вид

$$F_p = \frac{\sigma^2}{\sigma^4 + 4}, \qquad \Phi_p = -\frac{2}{\sigma^4 + 4}$$
(3.3)

Подставив второе уравнение (3.1) в первое, получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\Psi^{IV} - 2\sigma^2 \Psi'' + \sigma^4 \Psi + 4\Psi = 0$$
(3.4)

Решением характеристического уравнения для (3.4) является выражение $\lambda_{1-4} = \pm\sqrt{\sigma^2 \pm 2i}$ Так как пористая среда находится в области $\zeta < 0$, и учитывая торможение жидкости пористой средой, знак « - » перед радикалом в выражении для λ_{1-4} отбрасываем. Оставляем два корня

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\sigma^2 \pm 2i} \quad (3.5)$$

После несложных преобразований корни (3.5) можно представить в виде:

$$\lambda_{1,2}(\sigma) = \kappa_1(\sigma) \pm i\kappa_2(\sigma),$$

$$\kappa_1(\sigma) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+(2/\sigma^2)^2}+\nu}{2}}\,, \kappa_2(\sigma) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+(2/\sigma^2)^2}-\nu}{2}} \quad (3.6)$$

С учетом области задачи $(\zeta < 0)$ решение второго уравнения (3.1) имеет вид:

$$\Psi(\zeta) = Ae^{\kappa_1(\sigma)\zeta}\cos(\kappa_2(\sigma)\zeta) + Be^{\kappa_1(\sigma)\zeta}\sin(\kappa_2(\sigma)\zeta)\,. \quad (3.7)$$

Из второго уравнения (3.1) легко находится вторая компонента решения $2\Lambda(\zeta)$, при этом использовались легко получаемые соотношения

$$\kappa_1(\sigma)^2 - \kappa_2(\sigma)^2 = \sigma^2, \quad \kappa_1(\sigma)\kappa_2(\sigma) = 1, \ \kappa_1(\sigma)^2 + \kappa_2(\sigma)^2 = \sqrt{\sigma^4 + 4}\,. \quad (3.8)$$

Учитывая частное решение (3.3) и соотношения (2.1), (3.8) и отбрасывая малые слагаемые, получим граничные условия на границе жидкость - пористая среда для функций Φ, F, H :

$$\frac{d\Phi(\zeta=0)}{d\zeta} = \sigma\Phi(0) + \sigma^{-1}F(0) + \sigma^{-3} + o(\sigma^{-3})$$

$$\frac{dF(\zeta=0)}{d\zeta} = \sigma F(0) - \sigma^{-1}\Phi(0) + \sigma^{-1} + o(\sigma^{-1})$$

$$\frac{dH(\zeta=0)}{d\zeta} = \sigma H(0) - \sigma^{-2}\Phi(0) + \sigma^{-2} + o(\sigma^{-2})$$

Переходя в предыдущих граничных условиях к физическим переменным, получим:

$$\frac{dV_\varphi(\zeta=0)}{d\zeta} = \sqrt{\frac{1}{k\nu/\nu_{eff}}}(V_\varphi(0) - r\omega) + \frac{\omega\sqrt{\nu_{eff}}}{\nu^{3/2}}\sqrt{k}V_r(0) + \frac{\omega^3\sqrt{\nu_{eff}}}{\nu^{5/2}}rk^{3/2}$$

$$\frac{dV_r(\zeta=0)}{d\zeta} = \sqrt{\frac{1}{\frac{k\nu}{\nu_{eff}}}}V_r(0) - \frac{\omega\sqrt{\nu_{eff}}}{\nu^{3/2}}\sqrt{k}(V_\varphi(0) - r\omega) + \frac{\omega^2\sqrt{\nu_{eff}}}{\nu^{3/2}}rk^{1/2} \quad (3.9)$$

$$\frac{dV_z(\zeta=0)}{d\zeta} = \sqrt{\frac{1}{\frac{k\nu}{\nu_{eff}}}}V_z(0) - \frac{\omega^{3/2}\sqrt{\nu_{eff}}}{\nu^2}k(V_\varphi(0) - r\omega) + \frac{\omega^{5/2}\sqrt{\nu_{eff}}}{\nu^2}rk$$

Заключение. Из (3.9) следует, что граничные условия с учетом инерционных эффектов при течении вязкой жидкости на границе жидкость-пористая среда совпадают с условиями Сафмана [7] с перемешиванием компонент скорости. Однако при выполнении критерия

$$\frac{\omega}{\nu}k \ll 1$$

справедливы граничные условия Биверса-Джозефа и влияние инерционных эффектов несущественно [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р.В., Гордеев Ю.Н., Чижов Ю.Л.* Задача Кармана для вращающегося проницаемого диска // Изв. РАН/ МЖГ. 2012. №1. С. 72-80
2. *Bevers G.S., Joseph D.D.* Boundary condition at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Part 1. P. 197-207.
3. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by of a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. P. 27-34.
4. *Karman Th.* Uber laminare und turbulente Reibung // ZAAM. 1921. V. 1. P. 233-252.
5. *Neale G, Nader W.* Practical significance of Brinkman extension of Darsy's law: coupled parallel flow within a channel and a bounding porous medium // Canad. J. Chem. Eng. 1974. V. 52. P. 475-478.
6. *Nield D.A.* The Beavers-Joseph Boundary Conditions and Related Matters: A Historical and Critical Note // Trans. Porous Med. 2009. V. 78. P. 537-540.
7. *Saffman P.* On the boundary conditions at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. P. 93-101.

ON THE CONDITIONS OF A VISCOUS LIQUID FLOW ON THE BOUNDARY OF THE FLUID-PERMEABLE SURFACE TAKING INTO ACCOUNT THE INERTIA EFFECTS FLUID

Ju. Gordeev, E. Sandakov

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. Conditions on the boarder of viscous liquid and transparent surface in respect with the inertial effect of a liquid in a porous medium is in question. This problem has been considered in this article in terms of a revolving transparent disc on a surface of viscous incondensable liquid . Given problem is a generalization of a Karman's classical problem about the revolving of a transparent disc Under the assumption that the flow in the porous disk is described by Brinkman, obtained automodel solution of the problem.
Keywords: viscous liquid flow, porous medium, Brinkman's equation, Bivers-Joseff law.