УДК 530

# ВОЗМОЖНОСТИ ВАРИАЦИИ РАЗМЕРНОСТИ ФРАКТАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

**А.Л. Бугримов, Д.Д. Бычкова, В.С. Кузнецов**

*Московский государственный областной университет*
*105005, Москва, ул. Радио 10 а*

*Аннотация.* Продемонстрирована возможность вариации размерности фрактальных множеств. Построены фракталы, размерность Хаусдорфа–Безиковича которых превышает топологическую более чем на единицу.

*Ключевые слова:* фрактал, фрактальная размерность, канторово множество, канторов ковер, триадная кривая фон Коха, скрепка фон Коха.

Классическими примерами фрактальных множеств являются Канторово множество и триадная кривая фон Коха. В настоящей работе рассматривается построение аналогов Канторова множества и кривой фон Коха с возможной вариацией размерности Хаусдорфа – Безиковича в пределах от топологической до размерности несущего пространства.

Строгого определения фракталов пока не существует. Наиболее распространенными являются следующие два определения, оба предложенные Мандельбротом: «Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа - Безиковича которого строго больше его топологической размерности», и «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому» [1, 2].

Отсутствие точного определения фракталов в некоторых случаях не позволяет провести границу между объектами, которые является фракталами и объектами, которые таковыми не являются. Не ясно, какое место в геометрии природы занимают фракталы и те множества, размерность которых представляется целым числом. Наконец, особенностью существующих на сегодняшний день примеров фрактальных множеств является то, что их фрактальная размерность отличается от топологической не более чем на единицу.

При оценке фрактальности свойств реальных физических объектов [3] также может возникнуть неопределенность относительно фрактальности свойств реального физического объекта. Фрактальная размерность в ходе экспериментальных исследований определяется всегда с некоторой погрешностью. Поэтому в результате измерений вполне может быть получена величина, близкая к целому числу и «перекрывающая» это число вследствие учета погрешности. При этом, если в случае математических фрактальных объектов топологическая размерность известна (или может быть определена в ходе доказательства), то о топологической размерности физического объекта судить трудно. С большей ясностью в этом случае можно судить о несущем пространстве.

Представляет интерес возможности вариации размерности фрактальных множеств, возможности конструирования множеств, размерность которых более, чем на единицу превосходила бы топологическую размерность.

Указанные вопросы удобно рассмотреть на примере двух математических фракталов: канторова множества и триадной кривой фон Коха. На рис. 1 и 2 показаны исходные элементы и предфракталы трех поколений.

Фрактальная размерность Хаусдорфа - Безиковича самоподобных множеств совпадает с размерностью подобия и определяется соотношением [2, 4]:

$$D = -\frac{\ln N}{\ln r}, \tag{1}$$

где $N$ - число, показывающее сколько экземпляров предыдущего поколения взято для построения следующего; $r$ - коэффициент масштабного преобразования.

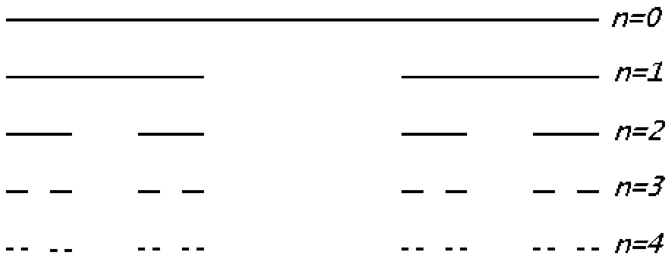



Рис.1. Канторово множество (предфракталы нулевого и первых четырех поколений)

При построении канторова множества на каждом шаге из образующего элемента удаляется средняя треть. Предфрактал каждого из поколений представляет собой совокупность двух ($N$=2) уменьшенных (в соответствии с коэффициентом масштабного преобразования $r$=1/3) копий предфракталов предыдущих поколений, поэтому фрактальная размерность канторова множества равна: $D$=ln2/ln3≈0,6309 [1, 2, 4].

В случае кривой фон Коха каждое последующее поколение состоит из четырех уменьшенных копий предфракталов предыдущего поколения, поэтому $D$=ln4/ln3≈1,2628 [1, 2, 4].

Модернизируем способ построения канторова множества. А именно, на каждом шаге будем удалять среднюю часть, размер которой отличен от одной третьей и составляет $r \in (0; 0,5)$. В таком случае размерность $D \in (0, 1)$. На рис.3 показаны первые четыре поколения предфракталов для $r$=0,45 (естественно, $r$<0,5).

Аналогичные изменения можно внести в способ построения кривой фон Коха. На рис.4 *a*) и *b*) показаны поколения №№1, 2 и 3 предфракталов для $r$=0,26 и для $r$=0,45. при $r \in [0,25; 0,5)$ размерность множества $D \in [1, 2)$. По видимому, от случая $r$=0,25, при котором $D$=1 следует отказаться, чтобы выполнить требование превышения топологической размерности. Случай $r$=0,5 недопустим в силу совпадения точек $A$ и $B$ на рис.4, *b*).

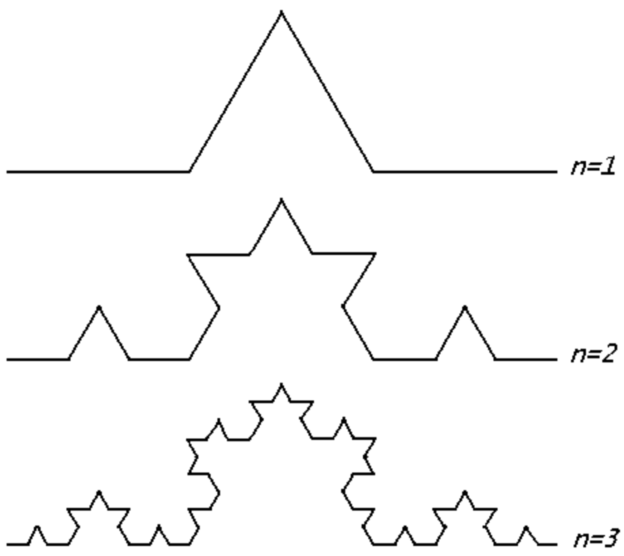



Рис.2. Триадная кривая фон Коха

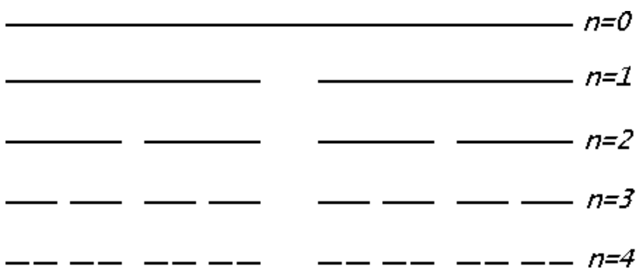



Рис.3. Предфракталы канторова множества для $r$ = 0,45

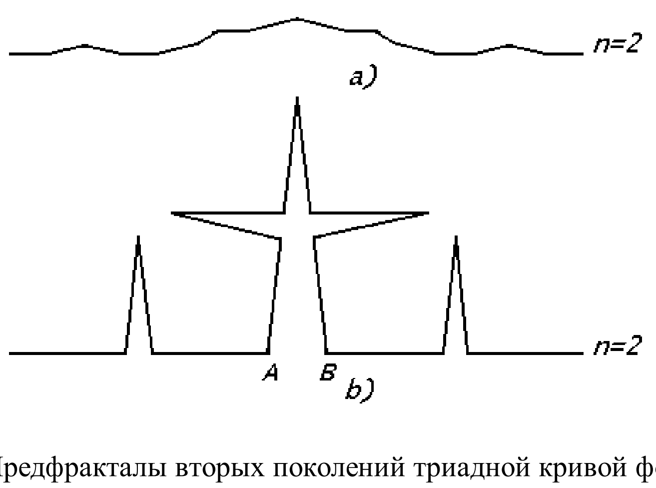



Рис.4. Предфракталы вторых поколений триадной кривой фон Коха
для $r$ = 0,26 ($a$) и $r$ = 0,45 ($b$)

Ограничения сверху размерностей фрактальных множеств обусловлены тем, что в качестве несущих пространств выбраны пространство единичной размерности (в случае канторова множества) и двумерное пространство (в случае кривой фон Коха).

Для получения фрактальных множеств, размерность которых превышает приведенные выше предельные значения, исходные элементы канторова множества и кривой фон Коха следует поместить в двумерное и трехмерное пространства соответственно.

На рис. 5 показаны исходный элемент и предфракталы некоторых поколений. Для построения предфрактала первого поколения взято два элемента. Длина этих элементов составляет величину $r$ относительно исходного элемента.

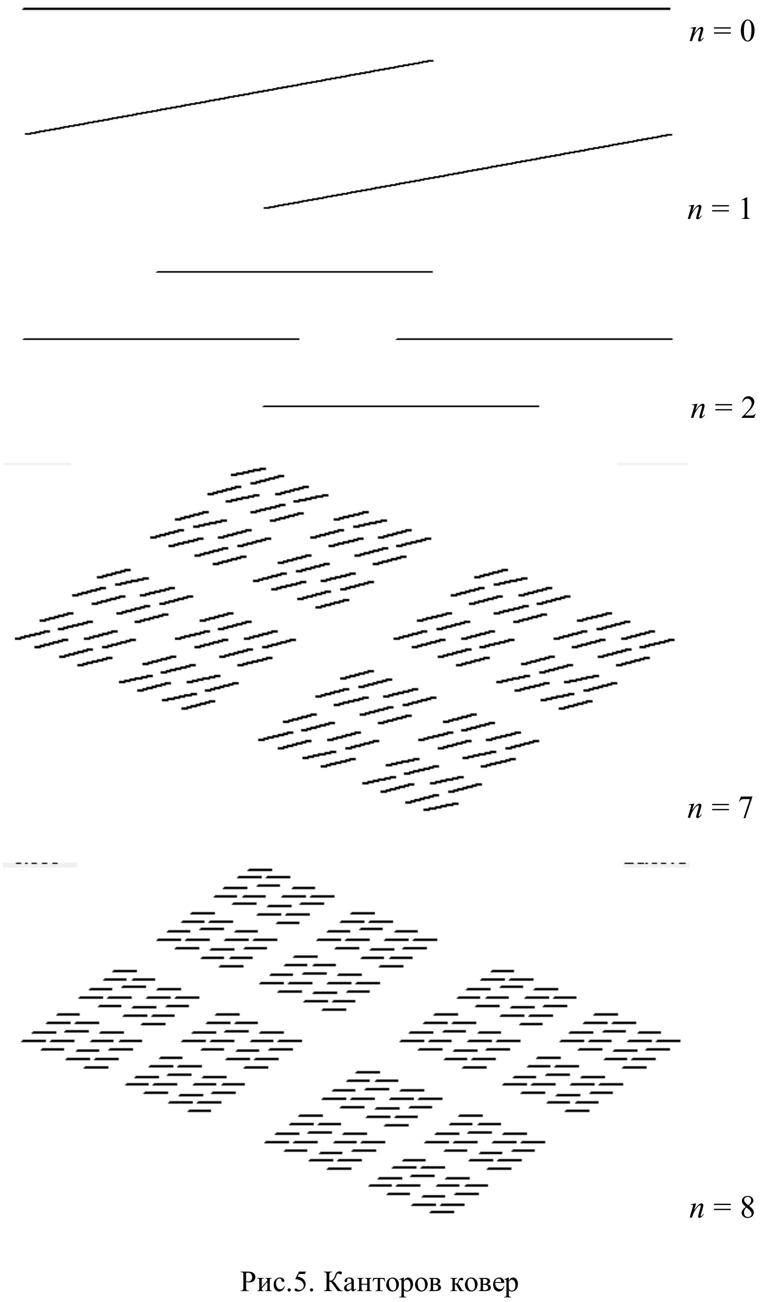



Рис.5. Канторов ковер

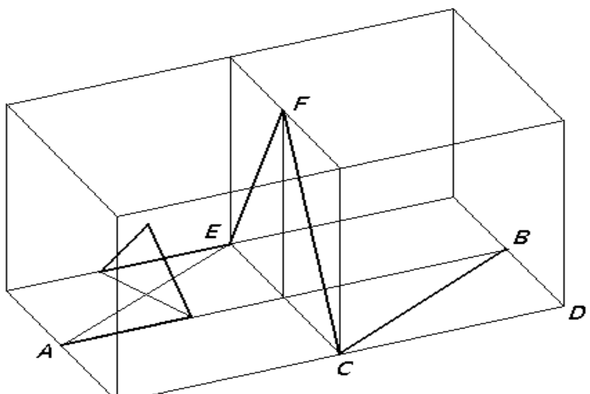
На рис.5 представлен случай для $r$=0,65. Элементы предфракталов нечетных поколений разворачиваются против часовой стрелки, а четных поколений - по часовой стрелке. Величина угла поворота в данном случае не имеет значения. Внешний вид предфрактала восьмого поколения позволяет назвать получаемое таким способом фрактальное множество канторовым ковром.

Очевидно, что $r$>0. Ограничение сверху можно оценить на основании требования отсутствия совмещения концов элементов в предфрактале второго поколения. Для предфрактала второго поколения длина элемента составляет $r^2$. Наложение концов элементов будет невозможным при $r^2$<0,5. Таким образом $r \in \left(0, \sqrt{0{,}5}\right)$, и $D \in (0, 2)$.

Преобразуем предфрактал первого поколения кривой фон Коха так, как это показано на рис.6, и поместим его в трехмерное пространство. Ломаная кривая напоминает определенным образом изогнутую скрепку. Исходный элемент $AB$ имеет единичную длину, на рисунке он не выделен. Каждый из элементов имеет длину $r$. На рис.6, $a$) представлен случай: $AB = 2HD = 2CD = 4BD = 1$, $BC = r = \sqrt{5}/4$. Фрактальная размерность получаемого в этом случае множества равна:

$$D = -\frac{\ln 4}{\ln \sqrt{5}/4} \approx 2{,}3837 \cdot$$

(2)



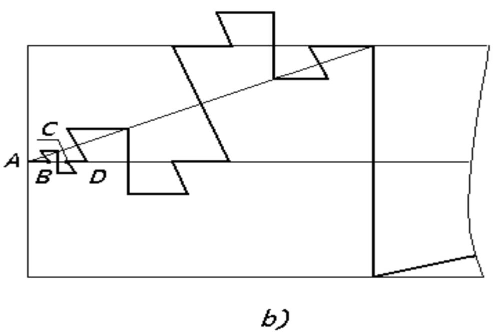




Рис.6. Скрепка фон Коха ($a$), схема определения предельной размерности ($b$)

Предельная размерность может быть получена из условия совмещения отдельных элементов предфрактала. На рис.6, *b*) элементы *AB* и *CD* - суть элементы предфрактала шестого поколения. Если исходный элемент принять за единицу, то $AD=1/8$, $AB=r^6$. Поэтому чтобы не было наложения точек *B* и *C*, должно выполняться неравенство $r^6<1/16$, из которого следует, что $r<\sqrt[3]{0{,}25}\approx 0{,}62996$. Очевидно, что при

$$r\to\sqrt[3]{0{,}25}, \qquad D\to-\frac{\ln 4}{\ln\sqrt[3]{1/4}}=3. \tag{3}$$

и для $r\in\left[0{,}25,\sqrt[3]{0{,}25}\right)$ размерность Хаусдорфа - Безиковича полученной фрактальной кривой $D\in[1,3)$.

Таким образом размерности Хаусдорфа - Безиковича построенных фрактальных множеств более чем на единицу превышает их топологические размерности. Как следует из построений, размерности фрактальных множеств могут выражаться целыми числами, но большими, чем соответствующие топологические размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York, 1983.
2. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
3. Баланкин А.С., Бугримов А.Л., Козлов Г.В., Микитаев А.К., Сандитов Д.С. // Дан. 1992. Т.325. №3. С.463-466.
4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

## POSSIBLE VARIATIONS OF THE DIMENSION OF FRACTAL SETS

**A. Bugrimov, D. Bychkova, V. Kuznetsov**

*Moscow State Regional University*
*10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract*. The possibility of variations of the dimension of fractal sets. Constructed fractals, of Hausdorff–Besicovitch dimension topological exceeds by more than one.
*Keywords*: fractal, fractal dimension, Cantor set, Cantor carpet, triadic von Koch curve, paperclip von Koch.