МАТЕМАТИКА

УДК 517.9/98+533.72

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, АФФИННО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ СКОРОСТИ

А.Л. Бугримов, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет (МГОУ),
105005, Москва, ул. Радио, 10 а

Аннотация. Построено одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук). Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости. При построении используются законы сохранения числа частиц, импульса и энергии. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. Вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией. Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Множество нулей дисперсионного уравнения составляет дискретный спектр характеристического уравнения. Найдены собственные решения кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру. Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о структуре общего решения введенного кинетического уравнения.
Ключевые слова: кинетическое уравнение, частота столкновений, законы сохранения, разделение переменных, характеристическое уравнение, дисперсионное уравнение, дискретный и непрерывный спектры характеристического уравнения, собственные функции дискретного и непрерывного спектра, общее решение кинетического уравнения.

Введение

К настоящему времени получены аналитические решения целого ряда граничных задач (скачки температуры и плотности, различные скольжения) кинетической теории газа с использованием БГК-уравнения Больцмана с постоянной частотой столкновений [1-5].

Приближение постоянства частоты столкновений далеко не всегда можно рассматривать как адекватное задаче. В связи с этим делаются попытки рассматривать более общие, чем БГК, модели. В частности, задача об изотермическом скольжении рассмотрена для довольно широкого класса БГК-моделей [1]. Рассмотрен также случай с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (т.е. с постоянной длиной свободного пробега). В этом приближении рассмотрены задачи о скачках температуры и концентрации [6], а так же более общие, чем БГК, модели (см., например, [7–9]).

В то же время остается нерешенная задача о скачке температуры и концентрации с использованием БГК-уравнения с произвольной зависимостью частоты от скорости, несмотря на очевидную важность решения задачи в подобной обстановке.

В настоящей работе делается попытка продвинуться в этом направлении. Здесь рассматривается случай линейной зависимости частоты столкновений от скорости молекул в модели одномерного газа. Модель одномерного раза широко использовалась в ряде работ [10–12], ибо давала хорошее согласие с экспериментом.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Начнем с общей постановки. Пусть газ занимает полупространство x>0. Задана температура поверхности T_s и концентрация насыщенного пара поверхности n_s.

Вдали от поверхности газ движется с некоторой скоростью u и имеет градиент температуры

$$g_T = \left(\frac{d\,\ln T}{dx}\right)_{x=+\infty}.$$

Необходимо определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости и градиента температуры.

В задаче о слабом испарении (конденсации) требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданной скорости испарения (конденсации), считая градиент температуры равным нулю. Заданная скорость испарения (конденсации) считается много меньшей тепловой скорости молекул:

$$u \ll v_T,$$

где v_T – есть тепловая скорость молекул, m – масса молекулы,

$$v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad \beta = \frac{m}{2kT_s},$$

k – постоянная Больцмана.

В задаче о температурном скачке требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданного градиента температуры, считая, что скорость испарения (конденсации) равна нулю. Будем считать, что градиент температуры достаточно мал. Малость понимается в том смысле, что произведение средней длины свободного пробега молекул на градиент температуры много меньше единицы:

$$l g_T \ll 1, \qquad l = v_T \tau,$$

где τ – среднее время свободного пробега газовых молекул.

Скорость испарения (конденсации) в этой задаче равна нулю.

Объединим обе задачи – о слабом испарении (конденсации) и скачке температуры – в одну. Будем предполагать малость градиента температуры (т.е. малость относительного перепада температуры на длине свободного пробега) и малость скорости газа по сравнению со скоростью звука. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде:

$$f(x,v) = f_0(v)\big(1 + h(x,v)\big),$$

где

$$f_0(v) = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_s}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT_s}\right]$$

- есть абсолютный максвеллиан.

Возьмем линейное кинетическое уравнение, записанное относительно функции *h*(x,v) с интегралом столкновений релаксационного типа, называемым также [1] интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук), и имеющее следующую общую форму:

$$v\frac{\partial}{\partial x}h(x,v) =$$
$$= \nu(v)\left[l_1[h] + 2\frac{v}{v_T}l_2[h] + \left(\left(\frac{v}{v_T}\right)^2 - \beta(a)\right)l_3[h] - h(x,v)\right] \qquad (1.1)$$

Здесь $l_m[h]\ (m = 0,1,2)$ – некоторые постоянные, подлежащие определению из законов сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии, $\nu(v)$ – частота столкновений молекул, аффинно зависящая от модуля скорости молекул,

$$\nu(v) = \nu_0\big(1 + a\sqrt{\pi\beta}|v|\big),$$

a – некоторый неотрицательный параметр.

Правая часть уравнения (1.1) есть линеаризованный интеграл столкновений, разложенный по инвариантом столкновений

$$Y_0(v)=1,$$
$$Y_1(v)=2\sqrt{\beta}v,$$
$$Y_2(v)= \beta v^2 - \beta(a).$$

Постоянная $\beta(a)$ находится, как уже указывалось, из условия ортогональности инвариантов $Y_1(v)$ и $Y_2(v)$:

$$\beta = \beta(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{a+1}.$$

Ортогональность здесь понимается как равенство нулю скалярного произведения с весом $\rho(v) = \nu(v)e^{-\beta v^2}$:

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(v)e^{-\beta v^2}f(v)g(v)dv.$$

Перейдем в уравнении (1.1) к безразмерной скорости С=$\sqrt{\beta}v$ и безразмерной координате x` = x/l, l – средняя длина свободного пробега газовых молекул. Переменную x` далее снова будем обозначать через x.

В безразмерных переменных уравнение (1.1) записывается в виде:

$$c\frac{\partial h(x,c)}{\partial x}=$$
$$=\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)\left[l_0[h]+2cl_1[h]+\left(c^2-\beta(a)\right)l_2[h]-h(x,c)\right]. \qquad (1.2)$$

3. Законы сохранения и преобразование кинетического уравнения

Модельный интеграл столкновений должен удовлетворять законам сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии:

$$(Y_m,M[h])=v_0\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(c)M[h]Y_m(c)dc=0,\quad m=0,1,2, \qquad (2.1)$$

$\rho(c)M[h]$ – модельный интеграл столкновений,

$$M[h]=l_0[h]+2cl_1[h]+\left(c^2-\beta(a)\right)l_2[h]-h(x,c).$$

Из первого уравнения из (2.1) при m=0, т.е. закона сохранения числа частиц получаем, что

$$l_0[h]=\frac{(1,h)}{(1,1)}.$$

Здесь

$$(1,1)=v_0\sqrt{\pi}(a+1),$$
$$(1,h)=v_0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-c^2}\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)h(x,c)dc.$$

Из второго уравнения из (2.1) при m=1, т.е. закона сохранения импульса получаем, что

$$2l_1[h]=\frac{(c,h)}{(c,1)}.$$

Здесь

$$(c,c)=0.5v_0\sqrt{\pi}(2a+1),$$

$$(c,h)=\nu_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-c^2}\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)ch(x,c)\,dc.$$

Из третьего уравнения из (2.1) при m=2, т.е. закона сохранения энергии находим, что

$$l_2[h]=\frac{(c^2-\beta(a),h)}{\left(c^2-\beta(a),c^2-\beta(a)\right)}.$$

Здесь

$$\left(c^2-\beta(a),c^2-\beta(a)\right)=0.25\nu_0\sqrt{\pi}\,\frac{4a^2+7a+2}{a+1},$$

$$(c^2-\beta(a),h)=\nu_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-c^2}\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)\left(c^2-\beta(a)\right)h(x,c)\,dc.$$

Вернемся к уравнению (1.2) и с помощью полученных выше равенств преобразуем это уравнение к виду:

$$\begin{gathered}c\frac{\partial}{\partial x}h(x,c)+\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)h(x,c)=\\=\left(1+\sqrt{\pi}a|c|\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2}\left(1+\sqrt{\pi}a|c'|\right)q(c,c',a)\,h(x,c')\,dc'.\end{gathered}\tag{2.2}$$

Здесь

$$q(c,c'a)=r_0(a)+r_1(a)cc'+r_2(a)(c^2-\beta(a))\left(c'^2-\beta(a)\right),$$

$$r_0=r_0(a)=\frac{1}{a+1},\qquad r_1=r_1(a)=\frac{2}{2a+1},$$

$$r_2=r_2(a)=\frac{4(a+1)}{4a^2+7a+2},\qquad \beta=\beta(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{a+1}.$$

Напомним, что в (2.2) введена безразмерная скорость $c=\sqrt{\left(\frac{m}{2k_sT_s}\right)}v$ и введена безразмерная координата $x'=\sqrt{\frac{m}{2kT_s}}\frac{x}{a_0}$, штрих у которой опущен.

Параметр *a* при данном подходе произволен. При $a\to 0$ получаем из (2.2) БГК-уравнение с постоянной частотой столкновений:

$$c\frac{\partial}{\partial x}h(x,c)+h(x,c)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2}q(c,c',a)\,h(x,c')\,dc'.$$

с ядром

$$q(c,c',0)=1+2cc'+(c^2-0.5)\left(c'^2-0.5\right).$$

При $a\to\infty$ приходим к модели с постоянной длиной свободного пробега:

$$\frac{c}{|c|}\frac{\partial}{\partial x}h(x,c)+h(x,c)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2}|c'|\,q(c,c')h(x,c')dc'.$$

с ядром

$$q(c,c')=1+cc'+(c^2-1)\left(c'^2-1\right).$$

Безразмерная координата в этом уравнении равна размерной, деленной на длину свободного пробега $l=\frac{v_T}{v_1}$, $v_1=av_0\sqrt{\pi}$.

В уравнении (2.2) осуществим замену $\sqrt{\pi}a\to a$ и запишем полученное уравнение в следующем виде:

$$\frac{v}{1+|v|}\frac{\partial}{\partial x}h(x,v)+h(x,v)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v'^2}q(v,v')(1+a|v'|)h(x,v')dv'. \tag{2.3}$$

В этом уравнении ядро $q(v,v')$ имеет тот же вид, что и ранее, но теперь r_0,r_1,r_2 и β выражаются равенствами:

$$r_0(a)=\frac{1}{a+\sqrt{\pi}},\qquad r_1(a)=\frac{2}{2a+\sqrt{\pi}},$$
$$r_2(a)=\frac{4\left(a+\sqrt{\pi}\right)}{4a^2+7\sqrt{\pi}a+2\pi},\qquad \beta(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+\sqrt{\pi}}{a+\sqrt{\pi}};$$

Сделаем в уравнении (2.3) замену переменных $v=v(\mu)$ и $v'=v(\mu')$, где

$$v(\mu)=\frac{\mu}{1-a|\mu|},\qquad |\mu|<\alpha,\qquad \alpha=\frac{1}{a}. \tag{2.4}$$

Обозначим функцию $h\left(x,v(\mu)\right)$ снова через $h(x,\mu)$. После замены (2.4) уравнение (2.3) переходит в уравнение

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mu)+h(x,\mu)=\int_{-\alpha}^{\alpha}q(\mu,\mu')h(x,\mu')\rho(\mu')d\mu'. \tag{2.5}$$

Здесь

$$q(\mu,\mu')=r_0+r_1v(\mu)v(\mu')+r_2(v^2(\mu)-\beta(a))(v^2(\mu')-\beta(a)),$$
$$\rho(\mu')d\mu'=e^{-v^2(\mu)}\frac{v(\mu)}{\mu}dv(\mu)=\exp\left[-\left(\frac{\mu}{1-a|\mu|}\right)^2\right]\frac{d\mu}{(1-a|\mu|)^3},$$
$$dv(\mu)=\frac{d\mu}{(1-a|\mu|)^2}.$$

Заметим, что на концах отрезка интегрирования $\rho(\pm\alpha)=0$, и, кроме того,

$$\lim_{\mu\to\pm\alpha}\rho(\mu)v^n(\mu)=0$$

для любого натурального *n*.

3. Собственные функции и собственные значения

Разделение переменных в уравнении (2.5), взятое в виде:

$$h_\eta(x,\mu) = e^{-\frac{x}{\eta}}\Phi(\eta,\mu) \tag{3.1}$$

сводит уравнение (1.9) к характеристическому уравнению

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu) = \eta\tilde{Q}(\eta,\mu), \eta,\mu \in (-\alpha,\alpha) \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{Q}(\eta,\mu) = r_0 n_0(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) + r_2\left(v^2(\mu)-\beta\right)\left(n_2(\eta)-\beta n_0(\eta)\right). \tag{3.3’}$$

Здесь

$$n_\alpha(\eta) = \int_{-\alpha}^{\alpha}\Phi(\eta,\mu)v^\alpha(\mu)\rho(\mu)d\mu, \alpha = 0,1,2. \tag{3.3}$$

- нулевой, первый и второй моменты собственной функции с весом $\rho(\mu)$.

Собственные функции непрерывного спектра, заполняющего сплошным образом интервал $(-\alpha,\alpha)$, находим [13] в пространстве обобщенных функций:

$$\Phi(\eta,\mu) = \eta\tilde{Q}(\eta,\mu)P\frac{1}{\eta-\mu} + g(\eta)\delta(\eta-\mu), \eta \in (-\alpha,\alpha). \tag{3.4}$$

Здесь $g(\eta)$ – непрерывная неизвестная функция, определяемая из уравнений (4), Px^{-1} – распределение, означающее главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Подставим собственные функции (3.4) в нормировочные соотношения (3.3).

Получим следующую систему дисперсионных уравнений:

$$n_\alpha(\eta) + \eta\int_{-\alpha}^{\alpha}\tilde{Q}(\eta,\mu)v^\alpha(\mu)\rho(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\eta} = g(\eta)\rho(\eta)v^\alpha(\eta), \alpha = 0,1,2. \tag{3.5}$$

Обозначим:

$$t_n(\eta) = \eta\int_{-\alpha}^{\alpha}v^n(\mu)\rho(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\eta}, n = 0,1,2,3,4.$$

Теперь с учетом (3.3) систему дисперсионных уравнений (3.5) можно преобразовать к виду:

$$\begin{gathered} n_\alpha(\eta) + r_0 n_0(\eta)t_\alpha(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) t_{\alpha+1}(\eta) + \\ + r_2\left(t_{\alpha+2}(\eta) - \beta t_\alpha(\eta)\right)\left(n_2(\eta)-\beta n_0(\eta)\right) = \\ = g(\eta)\rho(\eta)v^\alpha(\eta), \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $\alpha = 0, 1, 2$.

Запишем уравнения (3.6) в векторном виде:

$$\Lambda(\eta)n(\eta) = g(\eta)\rho(\eta)\begin{bmatrix}1\\ v(\eta)\\ v^2(\eta)\end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Здесь $\Lambda(\eta)$ – дисперсионная матрица с элементами $\lambda_{ij}(\eta)$ $(i,j = 1, 2, 3)$, $n(\eta)$ – нормировочный вектор с элементами $n_\alpha(\eta), \alpha = 0, 1, 2$.

Ниже понадобятся элементы дисперсионной матрицы в явном виде:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11}(\eta) = 1 + (r_0 + \beta^2 r_2)t_0(\eta) - \beta r_2 t_2(\eta),\\
&\lambda_{12}(\eta) = r_1 t_1(\eta),\\
&\lambda_{13}(\eta) = r_2\big(-\beta t_0(\eta) + t_2(\eta)\big),\\
&\lambda_{21}(\eta) = (r_0 + \beta^2 r_2)t_1(\eta) - \beta r_2 t_3(\eta),\\
&\lambda_{22}(\eta) = 1 + r_1 t_3(\eta),\\
&\lambda_{23}(\eta) = r_2\big(-\beta t_1(\eta) + t_3(\eta)\big),\\
&\lambda_{31}(\eta) = (r_0 + \beta^2 r_2)t_2(\eta) - \beta r_2 t_4(\eta),\\
&\lambda_{32}(\eta) = r_1 t_3(\eta),\\
&\lambda_{33}(\eta) = 1 + r_2\big(-\beta t_2(\eta) + t_4(\eta)\big).
\end{aligned}$$

Введем дисперсионную функцию $\lambda(z)$:

$$\begin{aligned}
\lambda(z) = \det\Lambda(z) = &\lambda_{11}(\eta)\lambda_{12}(\eta)\lambda_{13}(\eta) + r_1 t_3\lambda_{13}(\eta)\lambda_{21}(\eta) +\\
&+ r_1 t_1\lambda_{31}(\eta)\lambda_{23}(\eta) - \lambda_{13}(\eta)\lambda_{22}(\eta)\lambda_{31}(\eta) -\\
&- r_2 t_3\lambda_{11}(\eta)\lambda_{23}(\eta) - r_1 t_1\lambda_{21}(\eta)\lambda_{33}(\eta).
\end{aligned}$$

Из векторного уравнения (3.7) находим:

$$n_\alpha(\eta) = g(\eta)\rho(\eta)\frac{\Lambda_\alpha(\eta)}{\lambda(\eta)}, \qquad \alpha = 0, 1, 2. \tag{3.8}$$

где $\Lambda_\alpha(\eta)$ – определитель, полученный из определителя системы (3.6) заменой в нем $\alpha - \text{го}$ столбца столбцом из свободных членов этой системы.

Выпишем эти определители в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(\eta) = &\Lambda_{11} - v(\eta)\Lambda_{21} + v^2(\eta)\Lambda_{31} = \lambda_{22}\lambda_{33} - r_1 t_3\lambda_{23} -\\
&- v r_1(t_1\lambda_{33} - t_2\lambda_{13}) + v^2(r_1 t_1\lambda_{23} - \lambda_{22}\lambda_{13}),\\
\Lambda_1(\eta) = &-\Lambda_{12} + v(\eta)\Lambda_{22} - v^2(\eta)\Lambda_{32} = -\lambda_{21}\lambda_{33} + \lambda_{31}\lambda_{33} +\\
&+ v(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}) - v^2(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}),\\
\Lambda_2(\eta) = &\Lambda_{31} - v(\eta)\Lambda_{32} + v^2(\eta)\Lambda_{33} = r_1 t_3\lambda_{21} - \lambda_{31}\lambda_{22} -\\
&- v r_1(t_3\lambda_{11} - t_1\lambda_{31}) + v^2(\lambda_{11}\lambda_{22} - r_1 t_1\lambda_{21}).
\end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_{ij}(\eta)$ – минор элемента $\lambda_{ij}(\eta)$.

С помощью соотношений (3.8) преобразуем равенство (3.3’) к виду:

$$\tilde{Q}(\eta,\mu) = Q(\eta,\mu)\frac{g(\eta)\rho(\eta)}{\lambda(\eta)}, \tag{3.9}$$

где

$$Q(\eta,\mu) = r_0\Lambda_0(\eta) + r_1 v(\mu)\Lambda_1(\eta) + r_2\left(v^2(\mu) - \beta\right)\left(\Lambda_2(\eta) - \beta\Lambda_0(\eta)\right). \tag{3.10}$$

С помощью равенства (3.10) преобразуем выражение (3.4) для собственных функций:

$$\Phi(\eta,\mu) = \tilde{\Phi}(\eta,\mu)g(\eta), \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{\Phi}(\eta,\mu) = \eta\frac{Q(\eta,\mu)}{\lambda(\eta)}\rho(\eta)P\frac{1}{\eta-\mu} + \delta(\eta-\mu). \tag{3.12}$$

Из равенства (3.11) видно, что собственные функции определены с точностью до произвольной мультипликационной функции $g(\eta)$. В силу однородности уравнения (2.3) эту функцию можно считать тождественно равной единице ($g(\eta) = 1$) и далее в качестве собственной функции непрерывного спектра можно рассматривать функции, определяемые равенством (3.12).

По определению, дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионной функции.

Разлагая дисперсионную функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, убеждаемся, что она в этой точке имеет нуль 4-го порядка. Применяя принцип аргумента [14] можно показать, что других нулей (кроме $z = \infty$) дисперсионная функция не имеет. Точке $z = \infty$ как 4-кратной точке дисперсионного спектра отвечают следующие четыре дискретные решения уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} &h_0(x,\mu) = 1, \\ &h_1(x,\mu) = v(\mu), \\ &h_2(x,\mu) = v^2(\mu) - \frac{1}{2}, \\ &h_3(x,\mu) = (x-\mu)\left(v^2(\mu) - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Ниже понадобятся формулы для разности и суммы граничных значений дисперсионных функций сверху и снизу в интервале $(-\alpha,\alpha)$:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\pi i\mu\rho(\mu)Q(\mu,\mu) \tag{3.13}$$

и

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \qquad \mu \in (-\alpha,\alpha), \tag{3.14}$$

где $Q(\mu,\mu)$ – определяется выражением (3.10).

Для доказательства равенства (3.14) достаточно провести прямолинейные, но весьма громоздкие вычисления.

4. Разложение решения граничной задачи по собственным функциям характеристического уравнения

В этом п. подведем итоги проведенного анализа.

Фактически нами доказана теорема о структуре общего решения уравнения (2.4).

Теорема 1. Общее решение уравнения (2.3) есть сумма линейной комбинации дискретных (частных) решений этого уравнения с произвольными коэффициентами и интеграла по непрерывному спектру от собственных функций, отвечающих непрерывному спектру, с неизвестным коэффициентом:

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{x}{\eta}} \tilde{\Phi}(\eta,\mu) A(\eta)\rho(\eta)\, d\eta. \qquad (4.1)$$

Здесь $h_{as}(x,\mu)$ – асимптотическая функция, называемая в кинетической теории распределением Чепмена–Энскога [1], представляющая собой линейную комбинацию частных (дискретных) решений с произвольными коэффициентами:

$$h_{as}(x,\mu) = A_0 h_0(x,\mu) + A_1 h_1(x,\mu) + A_2 h_2(x,\mu) + A_3 h_3(x,\mu)\ .$$

Здесь неизвестными коэффициентами, отвечающими дискретному спектру, являются величины A_0, A_1, A_2 и A_3, а неизвестным коэффициентом непрерывного спектра является функция $A(\eta)$.

Рассмотрим отдельно случай, когда частота столкновений постоянна, т.е. случай, когда $\alpha = 0$. В этом случае собственные функции непрерывного спектра и дисперсионная функция имеют соответственно следующий вид:

$$\tilde{\Phi}(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\left(\frac{3}{2} - \mu^2\right) P\frac{1}{\mu - \eta} + e^{\eta^2}\lambda(\eta)\delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = -\frac{1}{2} - \left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\lambda_c(z),$$

где

$$\lambda_c(z) = 1 - 2ze^{-z^2}\int_0^z e^{u^2} du \pm \sqrt{\pi} i z e^{-z^2}, \mathrm{Im}\, z \lessgtr 0.$$

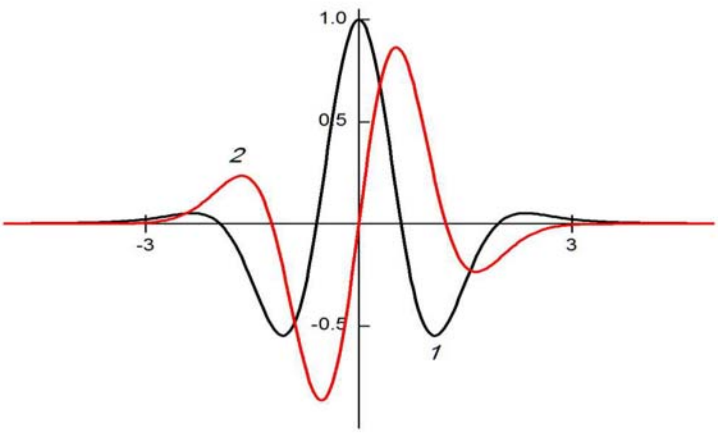

Рис.1. Действительная (кривая 1) и мнимая (кривая 2) части граничных значений дисперсионной функции на действительной оси (сверху). Случай постоянной частоты столкновений.

Изучим другой (и последний) предельный случай, когда $\alpha \to \infty$. В этом случае уравнение (1.2) переходит в уравнение:

$$sgn\, v \frac{d}{dx} h(x,v) + h(x,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v'^2} q(v,v') |v'| h(x,v') dv' \qquad (4.2)$$

с ядром

$$q(v,v') = 1 + vv' + (v^2 - 1)(v'^2 - 1),$$

причем под x здесь понимается $\sqrt{\pi}\alpha x$, где x – старая координата.

Будем искать решение уравнения (4.2) в виде:

$$h(x,v) = a_1(x) + \tilde{a}_1(x) sgn\, v + a_2(x)v + \tilde{a}_2(x) v sgn\, v + \\ + a_3(x)(v^2 - 1) + \tilde{a}_3(x)(v^2 - 1) sgn\, v.$$

Уравнение (19) распадается в первом случае на шесть линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$a'_1(x) + \tilde{a}_1(x) = 0,$$
$$\tilde{a}'_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{a}_2(x),$$
$$a'_2(x) + a_2(x) = 0,$$
$$\tilde{a}'_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{a}_1(x) + \sqrt{\pi} a_3(x),$$
$$a'_3(x) + a_3(x) = 0,$$
$$\tilde{a}'_3(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{a}_2(x).$$

Решая эту систему уравнений, находим неизвестные функции a_i и $\tilde{a}_i$:

$$a_i(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} A_0 e^{-\alpha_0 x} - \tilde{A}_i x + A_i,\ i = 1{,}3,$$
$$\tilde{a}_i(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} A_0 e^{-\alpha_0 x} + A_i,\ i = 1{,}3,$$
$$a_2(x) = -\frac{1}{\alpha_0} A_0 e^{-\alpha_0 x} + A_2,$$
$$\tilde{a}_2(x) = A_0 e^{-\alpha_0 x}.$$

Таким образом, искомое решение уравнения (4.2) построено:

$$h(x,v) = A_0 e^{-\alpha_0 x} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} sgn\, v + \frac{1}{\alpha_0} v + v\, sgn\, v - \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0}(v^2 - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - 1) \right] - \\ - \tilde{A}_1 x + A_1 + \tilde{A}_1 sgn\, v + A_2 v + \left(-\tilde{A}_3 x + A_3\right)(v^2 - 1) + \tilde{A}_3 (v^2 - 1) sgn\, v.$$

Здесь все константы A_m $(m = 0,1,2,3)$ и A_m с тильдой являются произвольными постоянными, а $\alpha_0 = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$.

4. Заключение

В настоящей работе построено одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) релаксационного типа. Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости.

При построении уравнения используются законы сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии. Построенное уравнение преобразуется к стандартному виду уравнения типа уравнения переноса с полиномиальным ядром.

Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. С помощью нормировочных соотношений вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией.

Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Множество нулей дисперсионного уравнения составляет дискретный спектр характеристического уравнения. Найдены собственные решения исходного кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Эта так называемые дискретные (или частные) решения.

Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру.

Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о структуре общего решения введенного кинетического уравнения. Исследованы предельные случаи введенного кинетического уравнения, когда оно переходит, во-первых, в уравнение с постоянной частотой столкновений молекул, и, во-вторых, в уравнение с частотой столкновений, пропорциональной модулю молекулярной скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черчиньяни, К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: 1978. 495 с.
2. *Латышев, А.В.* Аналитические методы решения модельных кинетических уравнений и их приложения//Автореф. дис. на соискание уч. ст. доктора физ.-матем. Наук. М.: ИПМатем. им. М.В. Келдыша РАН. 1993 г. 36 с.
3. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о сильном испарении (конденсации)//Известия РАН. Сер. МЖГ. 1993. №6. 143-155 с.
4. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Теория и точные решения задач скольжения бинарного газа вдоль плоской поверхности//Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1991. Т31. №8. 1201-1210 с.
5. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи Крамерса для плотного газа//Поверхность. 1994. №6. 45-51 с.
6. *Cercignani, C.* The method of elementary sdutions for kinetic models with velocity dependent collision frequency//Ann. Phys. 1966. V.40. 469-481 P.
7. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Кинетические уравнения типа Вильямса
8. и их точные решения. М.: МГОУ, 2004, 271 с.

9. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Аналитические методы в кинетической
10. теории. М.: МГОУ, 2008, 280 с.
11. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Граничные задачи для квантовых газов.
12. М.: МГОУ, 2012, 266 с.
13. *Латышев, А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение одномерной задачи об умеренно сильном испарении (и конденсации) в полупространстве//Прикл. мех. и техн. физ. 1993. №1. 102-109 с.
14. *Siewert, C.E., Thomas Y.R., jr.* Strong evaporation into a half-space//J. Appl. Math. Phys. 1981. V.32. №4. 421-433 P.
15. *Cercignani, C., Frezzoti A.* Linearized analysis of a one-speed B.G.K. model in the case of strong condensation//Bulgarian Academy of sci. theor. appl. mech. Sofia. 1988. V.XIX. №3. 19-23 P.
16. *Владимиров, В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука. 1978. 512 с.
17. *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука. 640 с.

THE KINETIC ONE-DIMENSIONAL EQUATION WITH COLLISIONAL FREQUENCY AFFINE DEPENDING ON THE MODULE OF MOLECULAR VELOCITY

A. Bugrimov, A. Latyshev, A. Yushkanov

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The one-dimensional kinetic equation with collisional integral type BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) is constructed. Frequency of collisions of molecules affine depending on the module of molecular velocity is considered. Laws of preservation of number of particles, momentum and energy at construction equation are used. Separation of variables leads to the characteristic equation. The system of the dispersion equations is entered. Its determinant is called as dispersion function. It is investigated continuous and discrete spectra of the characteristic equation. The set of zero of the dispersion equation makes the discrete spectrum of the characteristic equation. The eigen solutions (of the kinetic equation) correspond to the discrete spectrum are found. The solution of the characteristic equation in space of the generalized functions leads to eigen functions correspond to the continuous spectrum. Results of the spent analysis are formulated in the form of the theorem about a structure of the common decision of the entered kinetic equation.
Keywords: one-dimensional kinetic equation, affine dependence of collision frequency, laws preservation, separation of variables, characteristic equation, dispersion equation, spectra, eigen functions.