[2]*Sholokhov Moscow State University for the Humanities*
18, Tashkentskaya st., Moscow, 109444, Russia

Abstract. Research dielectric function for collisional plasmas with any degree of degeneracy of electronic gas is carried out. By special limiting transition the dielectric function of Maxwell plasmas is received. Research and comparison of longitudinal dielectric functions of quantum and classical Maxwell collisional plasmas is resulted.
Keywords: quantum plasma, Maxwell plasma,Fermi−Dirac distribution, electric conductivity.

УДК 533.72

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОФОРЕЗА

В.Е. Ефремов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Автор продолжает построение теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений.
Ключевые слова: нестационарный диффузиофорез, крупная сферическая частица, диффузионная задача.

В работе [1] была решена гидродинамическая задача в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей частицы сферической формы радиуса R, взвешенной в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси. В данной работе приведем решение диффузионной задачи.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси, имеет вид:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_{12}\Delta_{r\theta}C_1 + \frac{\partial\left|\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty\right|}{\partial t} r\cos\theta \,. \tag{1}$$

При этом справедливы равенства:

$$C_1(r,\theta,t) = C_1^{(1)}(r,\theta) + C_1^{(2)}(r,\theta,t), \tag{2}$$
$$C_1^{(1)}(r,\theta) = C_1(r,\theta,t)_{|t=0},$$
$$C_1^{(2)}(r,\theta,t)_{|t=0} = 0,$$
$$[\nabla C_1(t)]_\infty = (\nabla C_1^{(1)})_\infty + [\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty,$$
$$(\nabla C_1^{(1)})_\infty = \{[\nabla C_1(t)]_\infty\}_{|t=0},$$
$$\{[\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty\}_{|t=0} = 0.$$

Если функции $C_1^{(1)}(r,\theta)$, $C_1^{(2)}(r,\theta,t)$ являются решениями дифференциальных уравнений:

$$\Delta_{r\theta} C_1^{(1)} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12}\Delta_{r\theta} C_1^{(2)} + \frac{\partial \left|[\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty\right|}{\partial t} r\cos\theta \tag{4}$$

соответственно, то их сумма (2) будет решением дифференциального уравнения (1).

Общее решение уравнения (3) имеет вид [2]

$$C_1^{(1)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра порядка n; A_n, B_n – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи.

При $r \to \infty$ справедливо граничное условие

$$C_1 = C_{01} + \left(\left|(\nabla C_1^{(1)})_\infty\right| + \left|[\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty\right|\right)\cdot r\cos\theta. \tag{5}$$

Из граничного условия (5) при $t = 0$ получаем

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left|(\nabla C_1^{(1)})_\infty\right| r\cos\theta. \tag{6}$$

С учетом условия (6) для концентрации $C_1^{(1)}(r,\theta)$ находим:

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left|(\nabla C_1^{(1)})_\infty\right| r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta). \tag{7}$$

Для определения величин B_0, B_n (n = 1, 2,…) в разложении (7) обратимся к граничному условию:

$$\frac{\partial C_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0, \tag{8}$$

из которого при $t = 0$ получаем:

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0. \tag{9}$$

Учет граничного условия (9) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра [3], то есть равенства

$$\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta \ \ d\theta = \delta_{nm}\ (n,m = 0,\ 1,\ 2,...), \tag{10}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид

$$\frac{2B_1}{R^3} = \left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right|, \tag{11}$$

дают нулевые решения

$$B_0 = B_n = 0 \ \ (n \geq 2). \tag{12}$$

Из уравнения (11) находим

$$B_1 = \frac{R^3}{2}\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right|. \tag{13}$$

Подставив найденные значения коэффициентов (12), (13) в разложение (7), получим

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left[1 + \frac{R^3}{2r^3}\right]\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right| r\cos\theta.$$

Из последнего соотношения находим

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial \theta}_{|r=R} = -\frac{3R\sin\theta}{2}\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right|. \tag{14}$$

Используя выражение (14), соотношение [1]

$$\left|\vec{u}_1\right| = -\frac{2K_{sl}D_{12}}{3R\sin\theta}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial\theta}_{|r=R}$$

приведем к виду:

$$\left|\vec{u}_1\right| = K_{sl}D_{12}\left|\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty\right|. \qquad (15)$$

Напоминаем, что в последней формуле $\vec{u}_1$ – скорость центра инерции внешней среды относительно покоящейся частицы при $t = 0$.

Стационарная составляющая диффузиофоретической скорости частицы относительно центра инерции внешней среды $\vec{u}_{1D}$ равна $-\vec{u}_1$ [1]. Поэтому из формулы (15) получаем

$$\vec{u}_{1D} = -K_{sl}D_{12}\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty .$$

Полученная формула совпадает с известной формулой для скорости стационарного диффузиофореза твердой сферической частицы [3].

Рассмотрим уравнение (4). В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение

$$\left|\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty\right| = g_\infty(t).$$

Представим уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12}\left\{\frac{\partial^2 C_1^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial\mu}\right]\right\} + \frac{\partial g_\infty(t)}{\partial t}r\mu , \qquad (16)$$

где $\mu = \cos\theta$.

Применим к уравнению (16) конечное интегральное преобразование Лежандра по переменной μ [4]:

$$\widetilde{C}_1^{(2)} = \int_{-1}^{1}\overline{K}_n(\mu)\cdot C_1^{(2)}d\mu . \qquad (17)$$

Ядро преобразования имеет вид:

$$\overline{K}_n(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot P_n(\mu),$$

где $P_n(\mu)$ – полином Лежандра порядка *n*. Получаем следующее изображающее уравнение:

$$\frac{\partial \widetilde{C}_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12}\left[\frac{\partial^2 \widetilde{C}_1^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \widetilde{C}_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}n(n+1)\cdot \widetilde{C}_1^{(2)}\right] + \frac{\partial g_\infty(t)}{\partial t} rk, \qquad (18)$$

где $k = \int_{-1}^{1} \mu \cdot K_n(\mu) d\mu$.

Теперь применим к дифференциальному уравнению (18) интегральное преобразование Лапласа [5]

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt.$$

Дифференциальное уравнение в пространстве лапласовых изображений имеет вид:

$$\frac{d^2 \overline{\widetilde{C}}_1^{(2)}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)}}{dr} - \left[\frac{p}{D_{12}} + \frac{n(n+1)}{r^2}\right]\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)} = -\frac{r}{D_{12}} kpG_\infty(p), \qquad (19)$$

где $\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)} = L\left\{\widetilde{C}_1^{(2)}\right\}$, $G_\infty(p) = L\{g_\infty(t)\}$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение:

$$\frac{d^2 \overline{\widetilde{C}}_1^{(2)}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)}}{dr} - \left[\frac{p}{D_{12}} + \frac{n(n+1)}{r^2}\right]\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)} = 0.$$

Общее решение этого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода

$$I_{n+1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left[e^z \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} - (-1)^n e^{-z} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}\right],$$

$$K_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}$$

следующим образом

$$\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)} = \frac{A_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right) + \frac{B_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right), \qquad (20)$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

В соответствии с методом вариации постоянных, будем считать постоянные A_n, B_n функциями от r и составим систему уравнений

$$\frac{A_n'}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{B_n'}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} = 0,$$
$$A_n'\left(-\frac{1}{2r\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{p}{D_{12}}}\cdot I'_{n+1/2}\right) + B_n'\left(-\frac{1}{2r\sqrt{r}} K_{n+1/2} + \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{p}{D_{12}}}\cdot K'_{n+1/2}\right) = -\frac{r}{D_{12}} kpG_\infty(p),$$

из которой находим:

$$A_n = k\sqrt{\frac{p}{D_{12}}}\cdot G_\infty(p)\int \frac{K_{n+1/2}}{I_{n+1/2}K'_{n+1/2} - I'_{n+1/2}K_{n+1/2}} r\sqrt{r}dr + \overline{A}_n\,, \tag{21}$$

$$B_n = k\sqrt{\frac{p}{D_{12}}}\cdot G_\infty(p)\int \frac{I_{n+1/2}}{I'_{n+1/2}K_{n+1/2} - I_{n+1/2}K'_{n+1/2}} r\sqrt{r}dr + \overline{B}_n\,. \tag{22}$$

Подставив выражения (21), (22) в формулу (20), получаем решение дифференциального уравнения (19):

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{C}}_1^{(2)} = &\frac{I_{n+1/2}}{\sqrt{r}} k\sqrt{\frac{p}{D_{12}}}\cdot G_\infty(p)\int \frac{K_{n+1/2}}{I_{n+1/2}K'_{n+1/2} - I'_{n+1/2}K_{n+1/2}} r\sqrt{r}dr + \\ &+\frac{K_{n+1/2}}{\sqrt{r}} k\sqrt{\frac{p}{D_{12}}}\cdot G_\infty(p)\int \frac{I_{n+1/2}}{I'_{n+1/2}K_{n+1/2} - I_{n+1/2}K'_{n+1/2}} r\sqrt{r}dr + \frac{\overline{A}_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{\overline{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}\,,\end{aligned} \tag{23}$$

где $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$ – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи. Заметим, что во избежание громоздкости формул, аргументы модифицированных функций Бесселя и их производных, имеющие вид $r\sqrt{p/D_{12}}$, мы опускаем.

Формула обращения для интегрального преобразования (17) имеет вид:

$$C_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{K}_n(\mu)\cdot \widetilde{C}_1^{(2)} \tag{24}$$

Применим к формуле (24) интегральное преобразование Лапласа. Принимая во внимание свойство линейности этого преобразования, получаем:

$$S_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{K}_n(\mu)\cdot \overline{\widetilde{C}}_1^{(2)}\,, \tag{25}$$

где $S_1^{(2)} = L\left\{C_1^{(2)}\right\}$. Используя равенство [2]:

$$\int_{-1}^{1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases}$$

устанавливаем, что

$$k = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}, & n = 1. \end{cases} \tag{26}$$

Принимая во внимание (23), (26), запишем формулу (25) в виде

$$S_1^{(2)} = \frac{I_{3/2}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \mu \int \frac{K_{3/2}}{I_{3/2} K'_{3/2} - I'_{3/2} K_{3/2}} r \sqrt{r} dr +$$

$$+ \frac{K_{3/2}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \mu \int \frac{I_{3/2}}{I'_{3/2} K_{3/2} - I_{3/2} K'_{3/2}} r \sqrt{r} dr + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{A}_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{\overline{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\mu).$$

После довольно громоздких вычислений последнюю формулу можем окончательно записать так:

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p) r \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{A}_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{\overline{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos\theta). \tag{27}$$

Перейдем к определению постоянных $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$. Из соотношений (2), (5), (6) следует равенство

$$C_1^{(2)} = \left| \left[\nabla C_1^{(2)}(t) \right]_\infty \right| r \cos\theta .$$

В пространстве изображений имеем при $r \to \infty$ соответствующее ему равенство

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p) r \cos\theta . \tag{28}$$

С учетом условия (28) из разложения (27) получаем выражение:

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p) r \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos\theta). \tag{29}$$

Для определения величин B_n (n = 0, 1,2,…) используем изображение надлежащего граничного условия. Из граничного условия (8) получаем равенство:

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 .$$

В пространстве изображений ему соответствует следующее равенство:

$$\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0\,. \qquad (30)$$

Учет условия (30) для выражения (29) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра (10) приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид

$$\frac{\overline{B}_1}{R\sqrt{R}}\left[K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}}\,K'_{3/2}\right]\sqrt{3/2} = 2G_\infty(p), \qquad (31)$$

дают нулевые решения

$$\overline{B}_0 = \overline{B}_n = 0 \quad (n \ge 2). \qquad (32)$$

Во избежание громоздкости формул, аргументы модифицированной функции Бесселя $K_{3/2}$ и ее производной, имеющие вид $R\sqrt{p/D_{12}}$, мы опускаем.

Из уравнения (31) находим

$$\overline{B}_1 = \sqrt{2/3}\,\frac{2R\sqrt{R}\,G_\infty(p)}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}}\,K'_{3/2}}\,. \qquad (33)$$

Таким образом, учитывая (32), (33), из разложения (29) находим

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)\,r\cos\theta + \frac{\overline{B}_1}{\sqrt{r}}K_{3/2}\left(r\sqrt{p/D_{12}}\right)\sqrt{3/2}\cos\theta\,.$$

Из последнего соотношения находим

$$\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial \theta}\Big|_{r=R} = -R\sin\theta\cdot F_S(p)\cdot G_\infty(p), \qquad (34)$$

где

$$F_S(p) = 1 + \frac{2K_{3/2}}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}}\,K'_{3/2}}\,.$$

Используя выражение (34), формулу [1]

$$U_2 = -\frac{K_{sl}D_{12}}{R\sin\theta}F_U(p)\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial \theta}\Big|_{r=R}\,,$$

где $U_2 = L\{|\vec{u}_2|\}$,

$$F_U(p) = \frac{6\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu \cdot p}\right)}{2R^2(\rho_e - \rho_i)p + 9\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu \cdot p}\right)}$$

(ρ_i – плотность вещества сферической частицы, ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ_e – плотность среды), приведем к виду

$$U_2 = K_{sl} D_{12} F_U(p) \cdot F_S(p) \cdot G_\infty(p).$$

Таким образом, в пространстве изображений получена формула для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решение гидродинамической задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы / В.Е. Ефремов, М.К. Кузьмин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №2. С.15-29.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Издательство МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
3. *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 208 с.
4. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
5. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

PROBLEMS SOLUTION IN NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS

V. Efremov

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Author continues construction of the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particle in a viscous gas medium. The solution of diffusion problem is carried out. This problem is divided into stationary and strictly nonstationary parts. Final formula for determining stationary diffusiophoresis velocity component of the particle was obtained. For determining nonstationary diffusiophoresis velocity component of this particle corresponding formula in the space of Laplace images was obtained.

Key words: nonstationary diffusiophoresis, large spherical particle, diffusion problem.