МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ С "J_k- ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ"

Д.А. Графов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио 10 а

Аннотация. В работе исследуется вопрос о равносходимости на $T^N = [-\pi,\pi)^N$ разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций $f \in L_p(T^N)$ и $g \in L_1(R^N)$, p>1, N≥2, g(x)=f(x) на $T^N = [-\pi,\pi)^N$.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, кратные интегралы Фурье, лакунарная последовательность.

Пусть 2π −периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(T^N)$, $T^N = [-\pi,\pi)^N$, N≥1, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье f(x)~$\sum c_k e^{ixk}$, и $S_n(x;f)$, $n \in Z_+^N$, −прямоугольная частичная сумма этого ряда, и пусть функция $g \in L_1(R^N)$, разложена в кратный интеграл Фурье g(x)~$\int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi}$dξ, и $J_\alpha(x;g)$, $\alpha \in R_+^N$, − собственный интеграл Фурье.

Предположим, что g(x)=f(x) при $x \in T^N$. Обозначим символом $R_\alpha(x;f,g)$ разность $R_\alpha(x;f,g) = S_n(x;f) - J_\alpha(x;g)$, и символом $R_\alpha(x;f)$ разность $R_\alpha(x;f) = S_n(x;f) - J_\alpha(x;g)$, если g(x)=0 вне T^N. Здесь $n = ([\alpha_1],\dots,[\alpha_N]) \in Z_+^N$, $[\alpha_j]$ − целая часть $\alpha_j \in R_+^1$. В работе [1] И.Л. Блошанский доказал, что для N=2 и p>1, $R_\alpha(x;f,g) \to 0$ при α→∞ почти всюду (п.в.) на T^2. В этой же работе была выяснена существенность условий N=2, p>1.

Пусть M={1,2,…,N}, $J_k = \{j_1, \dots, j_k\} \subset M$, $j_1 <\dots< j_k$, $1 \le k \le N-2$, и пусть λ=λ(J_k)=($\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}$) $\in Z_+^N$, $j_s \in J_k$, s=1,2,…,k. Символом $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in R_+^N$ обозначим N-мерный вектор у которого компоненты α_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) обобщенных вещественных лакунарных последовательностей (данное понятие было введено в работе [2]), т.е. для $j \in J_k$: $\alpha_j = \alpha_j^{(\lambda_j)}$, $|\alpha_j^{(\lambda_j)} - n_j^{(\lambda_j)}| \le \rho$, $\frac{n_j^{(\lambda_j+1)}}{n_j^{(\lambda_j)}} \ge q > 1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, где ρ некоторая постоянная.

Обозначим $R[J_k] = \{x \in R^N: x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$, и $T[M \setminus J_k] = \{x \in R[M \setminus J_k]: -\pi \le x_j \le \pi$ при $j \in M \setminus J_k\}$.

Пусть Ω, $\Omega \subset T^N$, – произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ – ортогональная проекция множества Ω на плоскость $R[J_2]$, $J_2 \subset M$. Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times T[M \setminus J_2]$, $J_2 \subset M$.

Фиксируем произвольную выборку J_k из M, $1 \le k \le N-2$, и определим следующие множества

$$W(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \text{ и } W^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \quad (1)$$

В работе [3] И.Л. Блошанским и О.В. Лифанцевой было введено следующее понятие.

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{R} \subset T^N$, $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$.

1. *Будем говорить, что множество* $\mathfrak{R}$ *обладает свойством* $B_2^{(J_k)}$, *если найдется множество* $W = W(J_k)$ *вида* (1) *такое, что* μ(W\ $\mathfrak{R}$)=0 (μ=μ_N – N*-мерная мера Лебега*), *причем свойство* $B_2^{(J_k)}$ *есть свойство* $B_2^{(J_k)}(W^0)$, *если* $W = W(W^0, J_k)$.

2. *Свойство* $B_2^{(J_k)}(W^0)$ *множества* $\mathfrak{R}$ *будем называть максимальным свойством* $B_2^{(J_k)}$ *множества* $\mathfrak{R}$, *если для любого множества* $\widetilde{W^0} = \widetilde{W^0}(J_k)$ *вида* (1) *такого, что* μ($\widetilde{W^0}$\ W^0)>0, *множество* $\mathfrak{R}$ *не обладает свойством* $B_2^{(J_k)}(\widetilde{W^0})$.

Тогда справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{R}$ – *произвольное измеримое множество*, $\mathfrak{R} \subset T^N$, *N≥3, 0<μ*$\mathfrak{R}$*<*$(2\pi)^N$, *и пусть* $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$. *Если существует множество* $W^0 = W^0(J_k)$ *вида* (1)

такое, что множество $\Re$ *обладает свойством* $B_2^{(J_k)}(W^0)$, *то для любой функции* $f \in L_p(T^N)$, *p>1, f(x)=0 на* $\Re$,
$\lim_{\alpha(x)\to\infty} R_{\alpha(x)|J_k|}(x;f) = 0$ п.в. на W^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блошанский И.Л.* О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №2. С. 153-168.
2. *Блошанский И.Л., Графов Д.А.* Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае «лакунарной последовательности частичных сумм» // ДАН России. 2013. Т. 450. № 3. С. 260-263.
3. *Блошанский И.Л., Лифанцева О.В.* Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольный частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // ДАН России. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.

EQUICONVERGENCE EXPANSIONS
IN MULTIPLE TRIGONOMETRIC SERIES AND FOURIER INTEGRAL
FOR "J_k- LACUNARY SEQUENCE OF PARTIAL SUMS"

D. GRAFOV

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. In this paper we investigate the question of equiconvergence on $T^N = [-\pi,\pi)^N$ expansions in multiple trigonometric series and Fourier integral functions $f \in L_p(T^N)$ and $g \in L_1(R^N)$, p>1, N≥2, g(x)=f(x) on $T^N = [-\pi,\pi)^N$.

Keywords: multiple Fourier series, multiple Fourier integrals, lacunary sequence.