УДК 533.72

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ КУЭТТА ДЛЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГАЗОВ

В.Н. Попов, Д.А. Рудный, А.А. Юшканов*

Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск)
163002, Архангельск, Набережная Северной Двины, 17
**Московский государственный областной университет (Москва)*
107005, Москва, ул. Радио 10 а

Аннотация. В рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о течении Куэтта для молекулярного газа. Построены профили массовой скорости газа и вектора потока тепла в канале, вычислены приходящиеся на единицу ширины канала величины потоков массы газа и тепла и отличная от нуля компонента тензора вязких напряжений. Проведено сравнение с аналогичными результатами, относящимися к бесструктурным одноатомным газам.

Ключевые слова: течение Куэтта, молекулярные газы, аналитические решения.

Введение

Для описания течений газа в каналах, расстояние между стенками которых соизмеримо со средней длиной свободного пробега молекул газа, необходимо использование кинетического подхода, основанного на решении кинетического уравнения Больцмана с соответствующими микроскопическими граничными условиями, которым должна удовлетворять функция распределения молекул газа на стенках канала [1]. В представленной работе в рамках кинетического подхода рассматривается задача о течении Куэтта – задача о течении газа в канале между двумя параллельными стенками, которые движутся, оставаясь параллельными самим себе, с равными по модулю, но противоположными по направлению скоростями. К настоящему времени в рамках кинетического подхода данная задача неоднократно рассматривалась, как с использованием точных аналитических, так и численных методов [2]-[11]. Однако полученные в указанных работах результаты относятся к газам, число Прандтля которых близко к $2/3$, в то время как для многих реальных газов это значение существенно отличается от приведенного выше. Так при $t = 20\ ^\circ C$ для воздуха, кислорода и аммиака число Прандтля равно соответственно 0.71, 0.85 и 0.93, для водяных паров при $t = 100\ ^\circ C$ число Прандтля равно 1.01 [12]. Учитывая сказанное, представляет интерес рассмотрение задач, связанных с исследованием зависимости макропараметров газа в канале от значения числа Прандтля. Анализ такого рода зависимости для молекулярных газов и составляет цель представленной работы. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе используется обобщение на случай молекулярных газов ЭС (эллипсоидально-статистической) модели кинетического уравнения Больцмана, предложенное в [13], а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения.

Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа

Рассмотрим плоский канал толщиной D', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$), ось Oz' которой параллельна стенкам канала. В выбранной системе координат обобщение ЭС модели кинетического уравнения Больцмана на случай молекулярных газов записывается в виде:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathrm{v}_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\mu(1-\nu+\theta\nu)}(G[f]-f), \tag{1}$$

где $p = nk_B T_{\text{tr}}$ и n – давление газа и концентрация молекул, k_B – постоянная Больцмана, T_{tr} – температура поступательных степеней свободы молекул газа, ν и θ – параметры релаксации, $\theta = 1/Z$, где $Z = \tau_R/\tau$, τ_R – время релаксации внутренних и поступательных степеней свободы молекул газа, τ – промежуток времени между двумя столкновениями молекул, а параметр ν связан со значением числа Прандтля газа Pr соотношением $\mathrm{Pr}^{-1} = 1-\nu+\theta\nu$,

$$G[f] = \frac{\rho\Lambda_\delta}{\sqrt{\det(2\pi F)}} \frac{1}{RT_{\text{rel}}{}^{\delta/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{v}-\mathbf{u}_g)F^{-1}(\mathbf{v}-\mathbf{u}_g) - \frac{I^{2/\delta}}{RT_{\text{rel}}}\right),$$

$\Lambda_\delta^{-1} = \int \exp(-I^{2/\delta})dI$, I – энергия внутренних степеней свободы молекул газа, $\rho = mn$ – плотность газа, m – масса молекулы газа, δ – число внутренних степеней свободы молекул газа, $\mathbf{u}_g$ – массовая скорость газа, $F = (1-\theta)[(1-\nu)RT_{\text{tr}}\mathbf{I} + \nu\,\Theta] + \theta RT_{eq}\mathbf{I}$, T_{rel} – температура релаксации, связанная с равновесной температурой T_{eq} и температурой, отвечающей внутренним степеням свободы молекул газа T_{int}, равенством $T_{\text{rel}} = \theta T_{eq} + (1-\theta)T_{\text{int}}$, $R = k_B/m$, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, а тензор Θ связан с тензором вязких напряжений равенством $\mathbf{P} = \rho\Theta$.

Предположим, что стенки канала движутся в своих плоскостях в противоположных направлениях со скоростями $\mathbf{u}$ и $-\mathbf{u}$. Будем считать, что течение носит стационарный характер, а скорость движения стенок канала много меньше скорости звука в газе. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям представим в виде:

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v},I) = M[f]\left[1 + C_z Z(x,C_x)\right], \tag{2}$$

где $M[f]$ – локально-равновесный максвеллиан, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор; $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T_{eq}$; $x = x'/l_g$ – безразмерная координата; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, η_g – коэффициент динамической вязкости газа,

$$M[f] = \frac{\rho \Lambda_\delta}{(2\pi R T_{eq})^{3/2}} \frac{1}{(RT_{rel})^{\delta/2}} \exp\left(-\frac{1}{2RT_{eq}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}_g|^2 - \frac{I^{2/\delta}}{RT_{eq}} \right).$$

Подставляя (2) в (1), после линеаризации приходим к уравнению для нахождения $Z(x,\mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tau^2)[1 + 2(1 - \Pr^{-1})\mu\tau] Z(x,\tau)\, d\tau \cdot \qquad (3)$$

Общее решение (3) имеет вид [6]

$$Z(x,\mu) = A_0 + A_1(x - \gamma\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x}{\eta}) F(\eta,\mu) a(\eta)\, d\eta \qquad (4)$$

Здесь A_0, A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению,

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\mu^2)\, d\mu}{\mu - z},$$

$P(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, $\gamma = \Pr^{-1}$. В случае использования модели диффузного отражения граничные условия на стенках канала запишутся в виде:

$$Z(\pm d; \mp\mu) = \pm 2U, \qquad \mu > 0. \qquad (5)$$

Здесь $U = \beta^{1/2} u$ – модуль безразмерной скорости движения стенок канала. Учитывая симметрию задачи, $Z(-d;-\mu) = -Z(d;\mu)$. В силу этого, в (4) необходимо положить $A_0 = 0$, $a(-\eta) = -a(\eta)$. Учитывая сказанное и подставляя (4) в (5), приходим к интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\, b(\eta,-d)\,d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)\,b(\mu,-d)\,\lambda(\mu)=f(\mu), \qquad \mu>0, \tag{6}$$

$$f(\mu)=-2U+A_1(d+\gamma\mu)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau\, b(\tau,d)\,d\tau}{\tau+\mu}, \qquad b(\eta,x)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)a(\eta)\cdot \tag{7}$$

Решение (6) ищем с использованием теории краевых задач функции комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши:

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\, b(\eta,-d)\,d\eta}{\eta-z}\cdot \tag{8}$$

С учетом граничных условий на верхнем и нижнем берегах разрезов для функций $N(z)$ и $\lambda(z)$, сведем интегральное уравнение (6) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси:

$$N^+(\mu)\lambda^+(\mu)-N^-(\mu)\lambda^-(\mu)=2\sqrt{\pi}i\mu\, f(\mu)\exp(-\mu^2), \qquad \mu>0. \tag{9}$$

Особенность краевой задачи (9) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность воспользуемся решением однородной краевой задачи:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \qquad \mu>0, \tag{10}$$

решение которой имеет вид [6]

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{[\theta(\tau)-\pi]\,d\tau}{\tau-z}\right], \qquad \theta(\tau)=\frac{\pi}{2}-arcctg\,\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\exp(-\tau^2)}\cdot$$

С учетом решения однородной краевой задачи (10) перепишем (9):

$$N^+(\mu)X^+(\mu)-N^-(\mu)X^-(\mu)=\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}2\sqrt{\pi}i\mu\, f(\mu)\exp(-\mu^2), \qquad \mu>0. \tag{11}$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Тогда, учитывая поведение входящих в (11) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение:

$$N(z)=\frac{1}{X(z)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\eta\, f(\eta)\exp(-\eta^2)\frac{d\eta}{\eta-z}\cdot \tag{12}$$

Раскладывая (12) в окрестности бесконечно удаленной точки, приходим к условию разрешимости краевой задачи (11)

$$-2U + A_1(d-\gamma Q_1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\eta X(-\eta)a(\eta)\exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)d\eta = 0\,. \qquad (13)$$

Здесь $Q_1 = -1.01619$ – интеграл Лойалки. Учитывая, что согласно (7), (8)

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu\, a(\mu)\exp\left(-\frac{d}{\mu}\right),$$

для нахождения $a(\mu)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = \frac{h(\mu)}{\gamma^{-1}d - Q_1}\left[2U + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\eta X(-\eta)a(\eta)\exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\gamma^{-1}d - Q_1)\int\limits_0^{+\infty}\eta X(-\eta)a(\eta)\exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta+\mu}\right], \qquad (14)$$

$$h(\mu) = \frac{X(-\mu)}{2|\lambda^+(\mu)|^2}\exp\left(-\mu^2 - \frac{d}{\mu}\right).$$

Решение (14) ищем в виде степенного ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k a_k(\mu), \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к системе рекуррентных соотношений, из которых находим:

$$a_0(\mu) = \frac{2Uh(\mu)}{\gamma^{-1}d - Q_1},$$

$$a_1(\mu) = a_0(\mu)\int\limits_0^{+\infty}g(\eta)\left[1 + \frac{\gamma^{-1}d - Q_1}{\eta+\mu}\right]d\eta,$$

$$a_2(\mu) = a_0(\mu)\int\limits_0^{+\infty}g(\eta)\left[1 + \frac{\gamma^{-1}d - Q_1}{\eta+\mu}\right]d\eta\int\limits_0^{+\infty}g(\tau)\left[1 + \frac{\gamma^{-1}d - Q_1}{\tau+\eta}\right]d\tau,$$

$\ldots,$

$$g(\eta) = \frac{\eta X^2(-\eta)}{2|\lambda^+(\eta)|^2(\gamma^{-1}d - Q_1)}\exp\left(-\eta^2 - \frac{d}{\eta}\right).$$

Коэффициент A_1 находим из (13). Подставляя (15) в (13) и вычисляя входящие в полученное выражение интегралы, находим

$$A_1 = \frac{2U}{\gamma^{-1}d - Q_1}\left[1 + \frac{1}{\gamma^{-1}d - Q_1}\sum_{k=0}^{+\infty} I_k\right]. \tag{16}$$

Здесь

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g_1(\mu)d\mu, \tag{17}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g_1(\mu)d\mu \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g(\eta)\left[1 + \frac{\gamma^{-1}d - Q_1}{\eta + \mu}\right]d\eta, \tag{18}$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g_1(\mu)d\mu \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g(\eta)\left[1 + \frac{\gamma^{-1}d - Q_1}{\eta + \mu}\right]d\eta$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g(\tau)\left[1 + \frac{\gamma^{-1}d - Q_1}{\tau + \eta}\right]d\tau, \qquad g_1(\mu) = g(\mu). \tag{19}$$

…

Таким образом, неизвестные параметры A_0, A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (4) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим безразмерную массовую скорость газа с канале $U_z(x)$, z-компоненту безразмерного вектора плотности потока тепла $q_z(x)$, приходящиеся на единицу ширины канала безразмерные потоки массы газа и тепла через верхнюю половину канала J_M и J_Q и значение безразмерной компоненты тензора вязких напряжений p_{xz}.

Исходя из статистического смысла функции распределения, находим

$$U_z(x) = \frac{U}{\gamma^{-1}d - Q_1}\left[1 + \frac{1}{\gamma^{-1}d - Q_1}\sum_{k=0}^{+\infty} I_k + \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(x)\right], \tag{20}$$

$$q_z(x) = -\frac{U}{4(\gamma^{-1}d - Q_1)}\sum_{k=0}^{+\infty} J_k(x). \tag{21}$$

Здесь интегралы I_k ($k = 0,1,2,\ldots$) определены выражениями (17)-(19), $d = D/2$, а интегралы $J_k(x)$ имеют тот же самый вид, что и введенные ранее I_k, с той лишь разницей, что в них вместо $g_1(\mu)$ входит функция

$$\gamma(x,\mu)=\frac{X(-\mu)}{2|\lambda^{+}(\mu)|^{2}}\exp\left(-\mu^{2}\right)\left[\exp\left(-\frac{d+x}{\mu}\right)-\exp\left(-\frac{d-x}{\mu}\right)\right].$$

Интегрируя (20) и (21) по x от 0 до d, находим

$$J_M=\frac{1}{2d^2}\int\limits_0^d U_z(x)dx=$$

$$=\frac{U}{2d^2(\gamma^{-1}d-Q_1)}\left[\left(1+\frac{1}{\gamma^{-1}d-Q_1}\sum_{k=0}^{+\infty}I_k\right)\frac{d^2}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}K_k\right], \tag{22}$$

$$J_Q=\frac{1}{2d^2}\int\limits_0^d q_z(x)dx=\frac{U}{8d^2(\gamma^{-1}d-Q_1)}\sum_{k=0}^{+\infty}K_k\,. \tag{23}$$

Здесь интегралы K_k отличаются от I_k тем, что в них вместо $g_1(\mu)$ входит функция

$$\zeta(\mu)=-\frac{\mu X(-\mu)}{2|\lambda^{+}(\mu)|^{2}}\exp\left(-\mu^{2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{d}{\mu}\right)\right]^{2}.$$

Аналогичным образом находим выражение для компоненты тензора вязких напряжений

$$p_{xz}=-\frac{U}{2(\gamma^{-1}d-Q_1)}\left[1+\frac{1}{\gamma^{-1}d-Q_1}\sum_{k=0}^{+\infty}I_k\right]. \tag{24}$$

Значения интегралов I_k и K_k, входящих в (21) – (23), вычислены с использованием пакета прикладных программ Maple 9.5 путем интерполяции подынтегральных функций линейными сплайнами. Учитывая то, что подынтегральные выражения содержат множитель $\exp(-\mu^2)$, эти интегралы достаточно быстро сходятся и вместо бесконечного верхнего предела интегрирования принималось значение, равное 5. Число учитываемых членов ряда существенно зависело от толщины канала. Так для канала толщиной $D'=0{,}1\,l_g$ для достижения точности 10^{-4} учитывалось шесть членов ряда, а для $D'=10\,l_g$ – только один (нулевой) член ряда. Значения J_M, J_Q и p_{xz}, рассчитанные для различных значений толщины канала на основании (22) – (24) приведены в таблице 1. Там же приведены соответствующие значения для одноатомного газа. Как следует из приведенной таблицы учет внутренних степеней свободы молекул газа практически не влияет на значение p_{xz}. Влияние на J_M имеет место только для каналов, толщиной $D'\le l_g$. В то же время имеет место существенная зависимость влияния внутренних степеней свободы на значение J_Q. Данные результаты согласуются с выводом, приведенным в [14], согласно которому наличие внутренних степеней свободы молекул газа в большей степени сказывается на тех свойствах газа, которые связаны с переносом молекулами энергии, и в меньшей степени на других характеристиках.

Таблица 1.

$\frac{D'}{l_g}$	NH_3 $\Pr = 0.93$	O_2 $\Pr = 0.85$	Воздух $\Pr = 0.71$	Cl_2 $\Pr = 0.64$	$\Pr = \frac{2}{3}$
J_M					
0.1	7.0063(–1)	7.1953(–1)	7.5811(–1)	7.8081(–1)	7.7185(–1)
1.0	2.3674(–1)	2.4264(–1)	2.5533(–1)	2.6319(–1)	2.5992(–1)
10	4.2306(-2)	4.2455(-2)	4.2847(-2)	4.3147(-2)	4.3022(–2)
$-J_Q$					
0.1	1.0979(-1)	1.1441(-1)	1.2388(-1)	1.2947(-1)	1.2730(–1)
1.0	1.6720(-2)	1.8101(-2)	2.1082(-2)	2.2935(-2)	2.2190(–2)
10	2.0538(-4)	2.4094(-4)	3.2840(-4)	3.9013(-4)	3.6479(–4)
$-p_{xz}$					
0.1	5.2297(–1)	5.2374(–1)	5.2514(–1)	5.2588(–1)	5.2533(–1)
1.0	3.3953(–1)	3.4029(–1)	3.4183(–1)	3.4272(–1)	3.4228(–1)
10	8.3113(-2)	8.3115(-2)	8.3122(-2)	8.3127(-2)	8.3125(–2)

Заключение

Итак, в работе с учетом внутренних степеней свободы молекул построено аналитическое решение задачи о течении Куэтта. Для различной толщины канала вычислены приходящиеся на единицу ширины канала потоки массы газа и тепла, построены профили массовой скорости газа и вектора потока тепла, вычислены значения отличной от нуля компоненты тензора вязких напряжений. Проведенные численные расчеты показали существенное влияние внутренних степеней свободы молекул газа на значение потока тепла в канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
2. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. – М.: Мир, 1973. – 245 с.
3. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 1999. – № 10. – С. 35-41.
4. *Siewert C.E.* Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European Journal of Mechanics B / Fluids. 2002. – Vol. 21. P. – 579-597.
5. *Siewert C.E.* The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. – Vol. 54. P. – 273-303.

6. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение граничных задач кинетической теории: Монография. – М.: МГОУ, 2004. – 286 с.
7. *Garcia R.D.M., Siewert C.E.* The Linearized Boltzmann Equation with Cercignani-Lampis Boundary Conditions: Basic Flow Problems in a Plane Channel. // European Journal of Mechanics B / Fluids. 2009. – Vol. 28. P. – 387-396.
8. *Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками // Журнал технической физики. 2011. – Т. 81, № 1. – С. 53-58.
9. *Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А.* Математическое моделирование течений газа в каналах. Монография. LAP LAMBERT Academic publishing. 2012. – 116 с.
10. *Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* Вычисление потока тепла в задаче о течении Куэтта с использованием зеркально-диффузной модели граничного условия на стенках канала // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия «Естественные науки». 2012. – № 2. – С. 80–85.
11. *Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* Моделирование процессов переноса в задаче о течении Куэтта при неполной аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала // Математическое моделирование. 2013. – Т. 25, № 2. – С. 111–124.
12. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
13. *Andries P., Tallec P. Lr., Perlat J., Perthame B.* The Gaussian-BGK model of Boltzmann equation with small Prandtl numbers // European Journal of Mechanics B Fluids. 2000. – Vol. 19, No 6. P. – 813-830.
14. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория переноса в газах. – М.: Мир, 1976. – 556 с.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE COUETTE FLOW PROBLEM FOR MOLECULAR GASES

V. Popov, D. Rydny, A. Yushkanov*

Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk)
17, Severnaya Dvina Emb. Arkhangelsk, 163002, Russia
**Moscow State Regional University (Moscow)*
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. An analytic solution to the problem of the Couette flow for molecular gases is constructed using the kinetic approach in the isothermal approximation. Structures of mass speed of gas and vector of a stream of heat in the channel are constructed. The mass and heat fluxes falling to the unit of channel width as well as the nonzero component of the viscous stress tensor are calculated. The results are compared with analogous data obtained for unstructured one-nuclear gases.
Keywords: Couette flow, molecular gases, analytic solution.